Rotation d'un solide autour d'un axe fixe

□ Exercice 27.1. Moteur électrique ★ (Théorème du moment cinétique)

Dans un moteur électrique, une puissance apportée sous forme électrique permet d'entraîner une charge en rotation. Le couple $\boldsymbol{\Gamma_0}$ à exercer sur la charge est supposé constant. Sur le plan mécanique, on peut modéliser le rotor du moteur par un solide de moment d'inertie $\boldsymbol{J}$ subissant deux couples supplémentaires :

- Un couple d'origine électrique proportionnel à la tension d'alimentation $\boldsymbol{U}$ du moteur $\boldsymbol{\Gamma_e = \phi U}$.
- Un couple dissipatif $\boldsymbol{\Gamma_d = -\lambda\omega}$, prenant en compte les pertes par frottement mécanique et par effet Joule.

1) Établir l'équation du mouvement.

2) Déterminer la tension $\boldsymbol{U}$ à appliquer au moteur pour entraîner la charge à une vitesse de rotation $\boldsymbol{\Omega_0}$ fixée.

3) Estimer la durée nécessaire pour que cette vitesse soit atteinte.

□ Exercice 27.2. Volant d'inertie ★★ (Théorème du moment cinétique, oscillations forcées)

On s'intéresse dans cet exercice à la régulation de la vitesse de rotation d'une machine tournante par un volant d'inertie, qui est un anneau lié au rotor de masse élevée et d'assez grand rayon. La machine tournante en question peut aussi bien être un moulin à blé qu'un broyeur de cailloux, mais les volants d'inertie sont également utilisés en Formule 1 dans le KERS « Kinetic Energy Recovering System ».

On modélise ici la machine tournante par un rotor de moment d'inertie J, soumis à un couple moteur Γ_0 constant et à un couple de frottement de type fluide $\Gamma_f = -\alpha\omega$ où α est une constante et ω la vitesse angulaire du rotor.

1 - Justifier par un argument énergétique que $\alpha > 0$.

2 - Le rotor est initialement immobile. Donner l'évolution de sa vitesse angulaire $\omega(t)$, en introduisant la vitesse finale ω_∞ et un temps caractéristique τ.

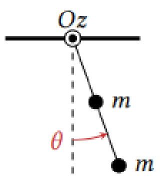
Des vibrations du dispositif se traduisent par un nouveau couple exercé sur le rotor, que l'on prendra harmonique $\Gamma_{vib}(t) = \gamma\cos(\Omega t)$. On cherche la vitesse angulaire du rotor sous la forme

$$\omega(t) = \omega_\infty + A\cos(\Omega t + \varphi)\,.$$

3 - En raisonnant sur $u(t) = \omega(t) - \omega_\infty$, déterminer l'amplitude A.

4 - En déduire l'intérêt et l'inconvénient d'un volant d'inertie.

□ Exercice 27.3. Pendule lesté ★★ (Pendule pensant, théorème du moment cinétique)



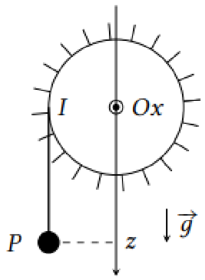
On considère un pendule formé d'une tige rigide de longueur L sur laquelle sont fixées deux masses m identiques à distance $L/2$ et L du centre. On néglige le moment d'inertie de la tige.

1 - Établir l'équation du mouvement.

2 - Montrer que le centre de masse G du système se trouve à distance $3L/4$ de l'axe.

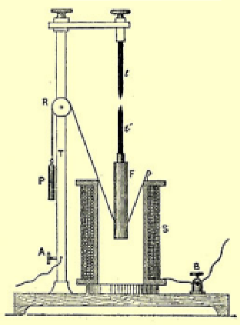
3 - Est-il équivalent d'appliquer le théorème du moment cinétique à un point matériel de masse $2m$ situé au centre de masse G ?

□ Exercice 27.4. Régulateur d'Archereau-Foucault ★★ (Théorème du moment cinétique)



Un régulateur d'Archereau-Foucault, schématisé ci-contre, est un dispositif ancien, qui a été utilisé par exemple en horlogerie ou dans des boîtes à musique.

On le modélise de façon simple par un contrepoids P de masse m accroché à un fil de masse négligeable devant m. Le fil est enroulé autour d'un cylindre tournant librement autour de son axe Ox fixé à un bâti, de rayon R et de moment d'inertie J_x. La chute de P entraîne la mise en rotation du cylindre. Ce cylindre est muni d'ailettes pour augmenter l'effet des frottements de l'air. On modélise leur action mécanique sur le cylindre par un couple de frottement $\Gamma_f = -\lambda\omega$, où $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de rotation du cylindre.



1 - Montrer que $\dot{z} = R\omega$.

2 - Montrer que la force $\overrightarrow{T}$ de tension du fil exercée en I sur le cylindre est donnée par

$$\overrightarrow{T} = m(g - \ddot{z})\,\overrightarrow{e}_z\,.$$

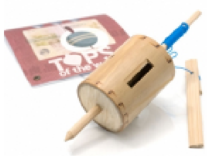
3 - Montrer que la vitesse angulaire de rotation ω vérifie l'équation différentielle

$$(J_x + mR^2)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \lambda\omega = mgR$$

4 - Résoudre cette équation. En déduire l'intérêt du dispositif.

Energie en rotation

□ Exercice 27.5. Lancer d'une toupie ★ (Théorème de l'énergie cinétique)



On modélise le lancer d'une toupie à l'aide d'un fil inextensible enroulé sur quatre tours sur le corps de la toupie. La toupie est modélisée par un cylindre de masse m et de rayon R, de moment d'inertie par rapport à son axe $mR^2/2$. Une pointe de moment d'inertie négligeable permet à la toupie de tenir sur le sol horizontal. On suppose que pendant tout son mouvement la toupie reste verticale et ne glisse pas sur le sol. Le fil est tiré avec une force de norme F constante pour lancer la toupie.

On note ω la vitesse angulaire instantanée de la toupie, et on suppose la toupie immobile à l'instant $t = 0$ où l'on commence à tirer sur le fil.

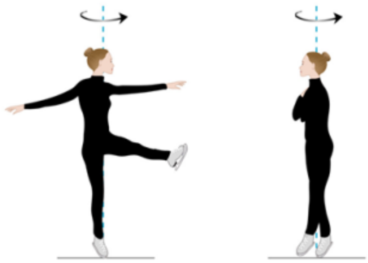
1 - Exprimer la puissance instantanée de la force $\overrightarrow{F}$.

2 - Déduire du théorème de l'énergie cinétique l'accélération angulaire $\dot{\omega}$ de la toupie.

3 - Quelle est la vitesse angulaire de la toupie lorsque les quatre tours de fil ont été déroulés ?

□ Exercice 27.6. la physique du patinage artistique ★★ (Système déformable, forces intérieures)

Une patineuse tourne sur elle-même avec une de ses jambes et ses bras perpendiculaire à son corps (schéma ci-dessous) : sa vitesse angulaire vaut 8 rad/s et son moment d'inertie vaut $3,6$ kg.m^2. En ramenant sa jambe à la verticale et en levant ses bras au-dessus de sa tête (schéma ci-dessous), elle diminue son moment d'inertie à $1,6$ kg.m^2 et sa vitesse angulaire augmente pour atteindre 18 rad/s.



1. Évaluer le travail (en J) qu'effectue la patineuse pour rapprocher ses bras et ses jambes près d'elle.