

**Rotation d'un solide autour d'un axe fixe**□ **Exercice 27.1. Moteur électrique ★ (Théorème du moment cinétique)**

1) En appliquant le théorème du moment cinétique au rotor du moteur :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_0 + \Gamma_e + \Gamma_d$$

$$J \frac{d\omega}{dt} + \lambda\omega = \Gamma_0 + \phi U$$

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\lambda}{J}\omega = \frac{\Gamma_0 + \phi U}{J}$$

2) La solution de l'équation du mouvement en régime permanent est (avec  $\omega_p = \Omega_0$ ):

$$\frac{\lambda}{J}\Omega_0 = \frac{\Gamma_0 + \phi U}{J} \Leftrightarrow \Omega_0 = \frac{\Gamma_0 + \phi U}{\lambda}$$

On en déduit la tension d'alimentation :

$$U = \frac{\lambda\Omega_0 - \Gamma_0}{\phi}$$

3) Le régime transitoire dure environ 5 fois le temps caractéristique avec  $\tau = \frac{J}{\lambda}$  :

$$t_f \approx 5\tau = 5 \frac{J}{\lambda}$$

□ **Exercice 27.2. Volant d'inertie ★★ (Théorème du moment cinétique, oscillations forcées)**

1) La puissance fournie au système par le couple de frottement vaut

$$\mathcal{P}_f = \Gamma_f \omega = -\alpha\omega^2.$$

Comme il s'agit d'un couple de frottement, alors forcément  $\mathcal{P}_f < 0$  donc  $\alpha > 0$ .

2) L'équation différentielle se déduit du théorème du moment cinétique.

- ▶ Système : rotor, solide de moment d'inertie  $J$  par rapport à l'axe de rotation;
- ▶ Référentiel : lié au stator, donc probablement le référentiel terrestre, et en tous cas un référentiel galiléen;
- ▶ Bilan des actions mécaniques :
  - Couple moteur  $\Gamma_0$ ;
  - Couple de frottement  $\Gamma_f = -\alpha\omega$ .

D'après le théorème du moment cinétique,

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_0 - \alpha\omega,$$

ce qui se met sous forme canonique

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{\tau}\omega = \frac{\Gamma_0}{J} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{J}{\alpha}.$$

Le second membre de cette équation est constant, donc on peut chercher une solution particulière constante également,

$$\omega_\infty = \frac{\tau\Gamma_0}{J} = \frac{\Gamma_0}{\alpha}.$$

Physiquement,  $\omega_\infty$  correspond à la vitesse de rotation une fois le régime permanent atteint. Ainsi,

$$\omega(t) = K e^{-t/\tau} + \omega_\infty.$$

La constante  $K$  se trouve à partir de la condition initiale  $\omega(0) = 0$ , d'où

$$\omega(t) = \omega_\infty \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

3 En prenant en compte le couple de vibration, l'équation différentielle s'écrit

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{\tau}\omega = \frac{1}{\tau}\omega_\infty + \frac{Y}{J} \cos(\Omega t) \quad \text{d'où} \quad \frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = \frac{Y}{J} \cos(\Omega t).$$

Cherchons maintenant la réponse au forçage harmonique, solution particulière de l'équation différentielle ne prenant en compte que le forçage harmonique,

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = \frac{Y}{J} \cos(\Omega t)$$

La représentation complexe est la méthode naturelle pour trouver cette solution. Posons  $\underline{u} = A e^{j\varphi} e^{j\Omega t}$ . L'équation différentielle donne alors

$$j\Omega \underline{u} + \frac{1}{\tau} \underline{u} = \frac{Y}{J} e^{j\Omega t} \quad \text{soit} \quad j\Omega A e^{j\varphi} + \frac{1}{\tau} A e^{j\varphi} = \frac{Y}{J} \quad \text{d'où} \quad A e^{j\varphi} = \frac{Y\tau}{J(1 + j\Omega\tau)}$$

Remplaçons  $\tau$  par  $J/\alpha$  et déterminons l'amplitude  $A$  à partir du module,

$$A = \frac{1}{J} \left| \frac{Y\frac{J}{\alpha}}{1 + j\Omega\frac{J}{\alpha}} \right| \quad \text{soit} \quad A = \frac{Y}{\sqrt{\alpha^2 + \Omega^2 J^2}}.$$

Le second membre, le forçage, est la somme d'un terme constant et d'un terme sinusoïdal. Comme l'équation différentielle est linéaire, alors d'après le principe de superposition la solution particulière est la somme des réponses à chaque terme du forçage. On peut donc traiter séparément les deux termes, chercher une solution particulière pour chacun, et les sommer.

4 Ajouter à la machine tournante un anneau de masse élevée et de grand rayon augmente considérablement son moment d'inertie. Comme on peut le voir sur l'expression obtenue à la question précédente, augmenter le moment d'inertie permet de diminuer l'amplitude des variations de vitesse angulaire : **un volant d'inertie permet donc de stabiliser la vitesse angulaire de rotation de la machine tournante**. En contre-partie, augmenter le moment d'inertie a aussi pour effet **d'augmenter la durée des régimes transitoires** avant que la vitesse angulaire n'atteigne sa valeur stationnaire de consigne.

#### □ Exercice 27.3. Pendule lesté ★★ (Pendule pensant, théorème du moment cinétique)

1 La tige a un mouvement de rotation autour de l'axe  $z$ . Comme il s'agit d'un solide, l'équation du mouvement s'obtient par le théorème du moment cinétique scalaire autour de l'axe  $Oz$ .

- **Système** : tige et masses.
- **Référentiel** : terrestre, qui est galiléen en bonne approximation pour un tel mouvement.
- **Repérage** : polaire de centre  $O$ ;
- **Bilan des actions mécaniques** :
  - le contact entre la tige et le bâti est modélisé par une liaison pivot, qu'on suppose implicitement parfaite donc de moment

$$\mathcal{M}_z(\text{liaison}) = 0;$$

- Lorsque  $\theta > 0$ , le poids  $\vec{P}_1$  de  $M_1$  fait tourner la tige en sens indirecte et a un bras de levier

$$b_1 = \frac{L}{2} \sin \theta$$

d'où un moment

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}_1) = -mg \times \frac{L}{2} \sin \theta$$

► De même,

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}_2) = -mgL \sin \theta.$$

Le moment du poids peut également se retrouver par projection et calcul du produit vectoriel :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_z(\vec{P}_1) &= [\overrightarrow{OM_1} \wedge m\vec{g}] \cdot \vec{e}_z \\ &= \left[ \frac{L}{2} \vec{e}_r \wedge m(g \cos \theta \vec{e}_r - g \sin \theta \vec{e}_\theta) \right] \cdot \vec{e}_z \\ &= -\frac{mgL}{2} \sin \theta [\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta] \cdot \vec{e}_z \\ \mathcal{M}_z(\vec{P}_1) &= -\frac{mgL \sin \theta}{2} \end{aligned}$$

N'hésitez pas à privilégier cette approche si vous n'êtes pas à l'aise avec le bras de levier.

• **Théorème du moment cinétique** : par additivité du moment cinétique, le moment cinétique du système est la somme des moments cinétiques de ses constituants, soit

$$L_z = J_1 \dot{\theta} + J_2 \dot{\theta} + \underbrace{J_{\text{tige}}}_{\text{négl}} \dot{\theta} = \frac{mL^2}{4} \dot{\theta} + mL^2 \dot{\theta} = \frac{5}{4} mL^2 \dot{\theta}$$

Aucun moment d'inertie n'est à connaître, mais franchement dans le cas d'une masse ponctuelle retenir que  $J = mr^2$  est beaucoup plus rapide que de recalculer le moment cinétique par projection ... ce qui reste néanmoins possible. Par exemple, pour la masse  $M_1$  dont le mouvement est circulaire,

$$L_{z, M_1/R} = \vec{L}_{O, M_1/R} \cdot \vec{u}_z = (m \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{v}_{M_1}) \cdot \vec{u}_z = m \left( \frac{L}{2} \vec{e}_r \wedge \frac{L}{2} \dot{\theta} \vec{e}_\theta \right) \cdot \vec{u}_z$$

ce qui conduit bien au résultat.

D'après le TMC,

$$\frac{dL_z}{dt} = \mathcal{M}_z(\vec{P}_1) + \mathcal{M}_z(\vec{P}_2) \quad \text{soit} \quad \frac{5}{4} mL^2 \ddot{\theta} = -\frac{3}{2} mgL \sin \theta$$

ce qui donne en simplifiant

$$\ddot{\theta} + \frac{6g}{5L} \sin \theta = 0$$

2 Par application de la définition,

$$2m \overrightarrow{OG} = m \overrightarrow{OM_1} + m \overrightarrow{OM_2} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2} \frac{L}{2} \vec{u}_r + \frac{1}{2} L \vec{u}_r \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{3}{4} L \vec{u}_r.$$

3 Appliquons le théorème du moment cinétique à ce nouveau système, un point matériel  $G$  de masse  $2m$  situé à distance  $3L/4$  de l'axe maintenu par une tige rigide de moment d'inertie négligeable en liaison pivot parfaite autour de  $(Oz)$ . Son poids a pour moment

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -2mg \times \frac{3L}{4} \sin \theta,$$

et son moment cinétique par rapport à l'axe  $z$  vaut

$$L_{z,G} = 2m \times \frac{9L^2}{16} \dot{\theta} = \frac{9mL^2}{8} \dot{\theta}.$$

D'après le théorème du moment cinétique,

$$\frac{9mL^2}{8} \ddot{\theta} = -\frac{3}{2} mgL \sin \theta \quad \text{soit} \quad \ddot{\theta} + \frac{4g}{3L} \sin \theta = 0$$

On n'aboutit pas à la même équation du mouvement, ce qui signifie que **les deux systèmes ne sont pas équivalents**.

La conclusion à retenir que la dynamique d'un solide en rotation n'est pas donnée par celle d'un point matériel situé en son centre d'inertie. C'est une différence importante avec un solide translation, pour lequel on aurait obtenu la même équation avec les deux modèles.

□ **Exercice 27.4. Régulateur d'Archereau-Foucault ★★ (Théorème du moment cinétique)**

Toute l'étude est menée dans le référentiel terrestre, supposé galiléen en très bonne approximation.

1 Comme le fil est inextensible et tendu, aussi bien sur la partie « libre » que sur la partie enroulée, alors tous les points du fil ont la même vitesse instantanée. Raisonons par exemple sur la descente du contrepoids. Les points du fil enroulés sur le cylindre sont en mouvement circulaire à vitesse angulaire  $\dot{\theta} = \omega > 0$ , leur vitesse vaut donc  $R\omega > 0$ . Les autres points du fil se trouvant sur la partie tendu se déplacent vers le bas à la vitesse  $\dot{z} > 0$  du contrepoids. Ainsi,

$$\dot{z} = R\omega.$$

2 Considérons comme système le point matériel  $P$ . Il est soumis à son poids  $m\vec{g}$  et à la force de tension du fil  $\vec{T}'$ , verticale et vers le haut. D'après le PFD,

$$m\ddot{z}\vec{e}_z = mg\vec{e}_z + \vec{T}' \quad \text{d'où} \quad \vec{T}' = m(\ddot{z} - g)\vec{e}_z.$$

Comme le fil est supposé idéal et tendu, alors il transmet parfaitement la force et exerce en  $I$  une force  $\vec{T} = -\vec{T}'$  de même norme mais de sens opposé. Ainsi,

$$\vec{T} = m(g - \ddot{z})\vec{e}_z.$$

3 Raisonons sur le cylindre, solide de moment d'inertie  $J_x$ . Les actions mécaniques qu'il subit sont

- ▷ les frottements avec l'air, qui exercent un couple  $\Gamma_f = -\lambda\omega$ ;
- ▷ la force  $\vec{T}$ , de bras de levier  $R$ , a un moment non nul qui vaut  $+TR$  car elle tend à faire tourner le cylindre dans le sens direct,
- ▷ la liaison pivot et le poids du cylindre exercent tous les deux un moment nul par rapport à l'axe  $Ox$  car leur droite d'action ( $Oz$ ) coupe l'axe ( $Ox$ ).

D'après le théorème du moment cinétique

$$J_x \frac{d\omega}{dt} = -\lambda\omega + m(g - \ddot{z})R$$

Or d'après la première question  $\ddot{z} = R\dot{\omega}$ , donc

$$J_x \frac{d\omega}{dt} = -\lambda\omega + mgR - mR^2 \frac{d\omega}{dt}$$

ce qui conduit à

$$(J_x + mR^2) \frac{d\omega}{dt} + \lambda\omega = mgR.$$

4 Écrite sous forme canonique, cette équation devient

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\lambda}{J_x + mR^2} \omega = \frac{mgR}{J_x + mR^2},$$

faisant apparaître un temps caractéristique

$$\tau = \frac{J_x + mR^2}{\lambda}.$$

Comme le forçage est constant, une solution particulière est donnée par

$$\omega_p = \frac{mgR}{\lambda},$$

et la forme générale des solutions est

$$\omega(t) = A e^{-t/\tau} + \omega_p,$$

où la constante  $A$  se détermine à partir des conditions initiales. Au bout d'une durée de l'ordre de  $5\tau$ , la vitesse de rotation devient donc pratiquement égale à  $\omega_p$  : **le dispositif permet de réguler la vitesse de rotation du cylindre.**

Energie en rotation

## □ Exercice 27.5. Lancer d'une toupie ★ (Théorème de l'énergie cinétique)

Commençons par un schéma de la toupie en vue de dessus pour fixer les notations, figure 3. En toute rigueur, la force  $\vec{F}$  est appliquée au fil entourant la toupie, mais en supposant celui-ci parfait (inextensible), cette force se retrouve au point  $I$ .

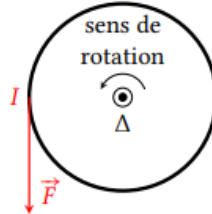


Figure 3 – Schéma de la toupie vue de dessus.

1 Comme on peut le constater sur le schéma, la force  $\vec{F}$  est tangente à la toupie, appliquée en un point situé à distance  $R$  de l'axe de rotation. Comme elle tend à faire tourner la toupie en sens direct autour de l'axe de rotation  $\Delta$ , son moment vaut donc

$$\mathcal{M}_{\Delta}(F) = +FR. \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathcal{P}(\vec{F}) = FR\omega.}$$

2 La toupie est soumise à son poids, qui ne travaille pas car son altitude reste constante, à la force de réaction du sol qui ne travaille pas non plus car son point d'application (la pointe de la toupie) est immobile, et à la force  $\vec{F}$  dont la puissance a été calculée à la question précédente. D'après le théorème de l'énergie cinétique appliqué dans le référentiel terrestre,

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J \omega^2 \right) = \mathcal{P}(\vec{F}) \quad \text{d'où} \quad J \omega \dot{\omega} = FR \omega$$

ce qui donne finalement pour l'accélération angulaire

$$\boxed{\dot{\omega} = \frac{FR}{J} = \frac{2F}{mR}.}$$

| Bien sûr, le théorème du moment cinétique même également au résultat.

3 Comme la question concerne la vitesse à un instant donné seulement, il faut privilégier la loi intégrale de l'énergie cinétique,

$$E_{c,f} - E_{c,i} = W_{i \rightarrow f}(\vec{F})$$

Le travail de  $F$  peut se calculer par exemple à partir de l'expression de la puissance. Comme  $\mathcal{P} = FR\omega$  où  $\omega$  est la vitesse angulaire, alors on en déduit le travail élémentaire

$$\delta W = \mathcal{P} dt = FR\omega dt = FR d\theta.$$

En intégrant ce travail élémentaire sur les quatre tours, on trouve

$$W_{i \rightarrow f}(\vec{F}) = FR(4 \times 2\pi),$$

d'où finalement

$$\frac{1}{2} J \omega_f^2 - 0 = 8\pi FR \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_f = \sqrt{\frac{32\pi F}{mR}}.}$$

□ **Exercice 27.6. la physique du patinage artistique ★★ (Système déformable, forces intérieures)**

1. On applique le TMC scalaire à la patineuse, de moment d'inertie  $J$  par rapport à son axe de rotation  $\Delta$  :

$$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = \mathcal{M}_z(\text{poids}) = 0 \quad \text{d'où} \quad L_{\Delta} = \text{cste}$$

Remarque : les moments des actions internes au système (l'action des bras par exemple) se compensent et n'apparaissent jamais dans le TMC. Seules les actions externes sont à prendre en compte.

Initialement,  $L_1 = J_1\omega_1$ . Dans l'état final,  $L_2 = J_2\omega_2$ . D'après la conservation précédente, on a alors  $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$ . D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a :

$$\Delta\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 = \frac{1}{2}J_1\omega_1\omega_2 - \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 = \frac{1}{2}J_1\omega_1(\omega_2 - \omega_1)$$

A.N : on trouve  $\Delta\mathcal{E}_c = 144$  J. Cette augmentation d'énergie cinétique provient de la puissance non nulle des actions internes au système (ramener les bras le long du corps nécessite un effort) : d'après le TEC appliqué à la patineuse en prenant en compte le travail des actions intérieures, on a :

$$\Delta\mathcal{E}_c = W(\text{poids}) + W(\text{bras} + \text{jambes}) = W(\text{bras} + \text{jambes})$$

Ainsi, la variation d'énergie cinétique calculée plus haut est directement égale au travail que doit effectuer la patineuse pour ramener ses bras et ses jambes près d'elle, à savoir 144 J .