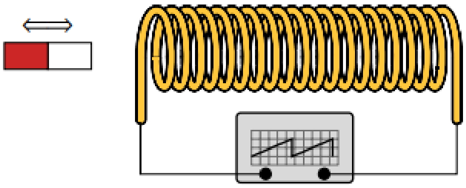
Introduction

Ce chapitre a pour objectif d'étudier les phénomènes d'induction dans les circuits immobiles soumis à un champ magnétique dépendant du temps : c'est l'induction de Neumann. La situation « symétrique » d'un circuit en mouvement dans un champ magnétique stationnaire sera étudiée au chapitre suivant.

I] Loi de l'induction de Faraday

1. Mise en évidence expérimentale

Considérons une bobine branchée sur un oscilloscope et approchons un aimant de la bobine, notons les observations :



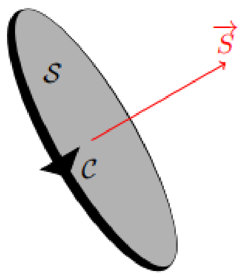
- *Aimant au repos :*

- *Aimant en mouvement :*

L'**apparition d'une tension** n'est pas liée à l'existence du champ magnétique créé par l'aimant, mais à **la variation de la « quantité de champ magnétique » traversant la bobine**.

La tension due au mouvement de l'aimant est appelée **force électromotrice induite**. Quand le circuit est fermé, il en résulte un courant appelé **courant induit**.

2. Flux du champ magnétique



Considérons un circuit $\boldsymbol{C}$, orienté par le sens du courant. On définit le vecteur surface $\vec{\boldsymbol{S}}$ de ce circuit comme étant orthogonal au plan du circuit, le vecteur $\vec{\boldsymbol{S}}$ est orienté par la règle de la main droite par rapport au sens conventionnel du courant et de norme égale à la surface du circuit.

Remarques :

- *Pour que $\vec{\boldsymbol{S}}$ soit défini, il faut donc d'abord orienter la flèche du courant, le sens du courant qui intervient dans la définition est son sens d'algébrisation conventionnelle.*

Le flux du champ magnétique $\vec{\boldsymbol{B}}$ *(ou flux magnétique)* à travers une surface $\boldsymbol{S}$ orientée par son vecteur $\vec{\boldsymbol{S}}$ est défini par :

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi} = \iint_{M \in S} \vec{\boldsymbol{B}} \bullet d\vec{\boldsymbol{S}}}$$

Remarques :

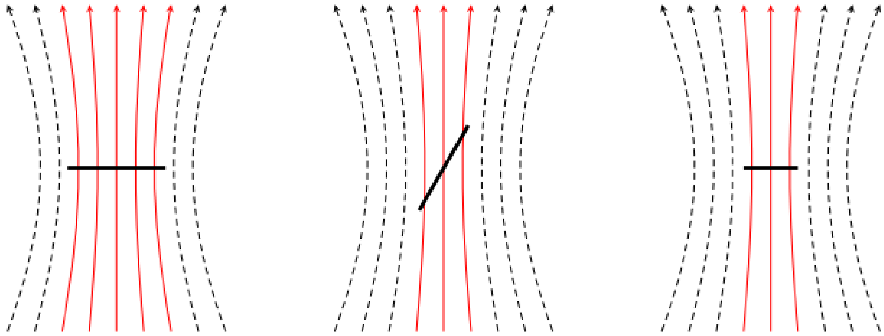
- Le flux du champ magnétique s'exprime en Weber ($\boldsymbol{1\,Wb = 1\,T.m^2}$).
- Si le champ magnétique est uniforme, l'expression du flux se simplifie :

$$\boldsymbol{\Phi} = \vec{\boldsymbol{B}} \bullet \iint_{M \in S} d\vec{\boldsymbol{S}} = \vec{\boldsymbol{B}} \bullet \vec{\boldsymbol{S}}$$

- Si le champ magnétique traverse **N** spires identiques (chacune de vecteur surface $\vec{\boldsymbol{S}}$), alors le flux total vaut :

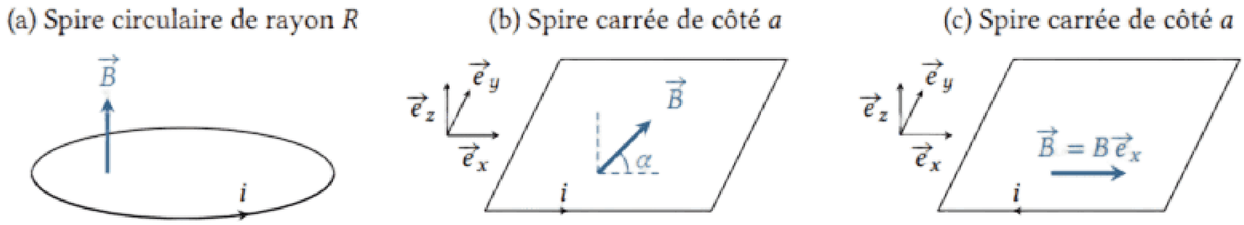
$$\boldsymbol{\Phi_N = N\,\Phi_{1\,spire}}$$

Qualitativement, le flux magnétique peut s'interpréter comme **« le nombre » de lignes de champ magnétique qui traversent le circuit**, cf. figure ci-dessous.



Flux magnétique et lignes de champ. Le trait épais symbolise le circuit vu de côté.

Application : *Calculer le flux magnétique au travers des circuits suivants, plongés dans un champ uniforme à l'échelle du circuit.*

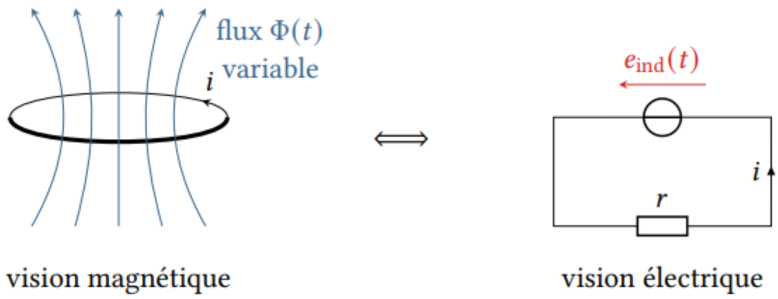


3. Loi de l'induction de Faraday

Les **variations de flux magnétique** Φ au travers d'un circuit fermé se modélisent électriquement par **l'ajout d'un générateur induit dans le circuit**, dont la force électromotrice induite e_{ind} est reliée au flux magnétique Φ au travers du circuit par la **loi de Faraday** :

$$\boxed{e_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

Le générateur induit doit être orienté en convention générateur par rapport à i.

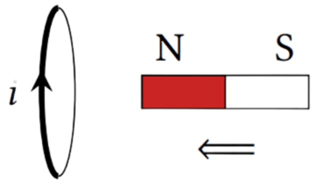


4. Loi qualitative de Lenz

Loi de Lenz : Par leurs conséquences, les phénomènes d'induction tendent à atténuer leurs causes.

En pratique, la cause est la variation du flux magnétique à travers le circuit, les phénomènes d'induction tendant à atténuer ces variations en générant un courant source d'un flux opposé.

Application : *Un aimant est progressivement rapproché d'une spire conductrice de résistance r.*



Déterminer le signe de i (ou de manière équivalente le sens réel du courant) lors de l'opération, d'abord en raisonnant par la loi de Lenz puis en retrouvant le résultat avec la loi de Faraday.

(On rappelle que les lignes de champ magnétique créées par un aimant partent du pôle Nord pour aboutir au pôle Sud, et que le champ est plus intense à proximité de l'aimant.)

II] Auto-induction

Un circuit parcouru par un courant crée un champ magnétique, dont le flux au travers du circuit lui-même est non nul, et peut donc causer des phénomènes inductifs : on parle alors **d'auto-induction**.

Ces phénomènes existent dans tous les circuits, mais ne jouent un rôle prépondérant que dans les bobines où les **nombreuses spires enroulées permettent d'amplifier leur effet.**

1. Flux propre et induction propre

Pour étudier les phénomènes inductifs dans un circuit, on distingue le **champ propre**, c'est-à-dire le champ magnétique créé par le circuit lui-même, du **champ extérieur**, créé par les autres sources à proximité (autre circuit, aimant, etc.).

Le **flux propre** $\boldsymbol{\Phi_P}$ est le flux du champ propre au travers du circuit. Le champ propre étant proportionnel au courant $\boldsymbol{i}$ dans le circuit, le flux propre est également proportionnel à $\boldsymbol{i}$.

On appelle **inductance propre**, notée L, d'une bobine le coefficient de proportionnalité entre le flux propre $\boldsymbol{\Phi_P}$ et le courant $\boldsymbol{i}$:

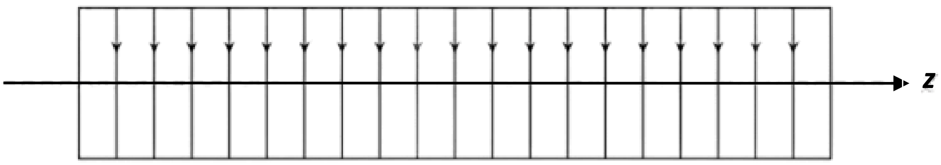
$$\boxed{\boldsymbol{\Phi_P = Li}}$$

Remarques :

- *L'inductance propre est toujours positive, et ne dépend que de la géométrie de la bobine. En particulier, elle ne dépend pas de l'intensité qui la traverse.*
- *L'inductance propre s'exprime en Henry :* $[\boldsymbol{L}] = \boldsymbol{H}$.

Application : *Inductance propre d'un solénoïde infini.*

Considérons une bobine de longueur $\boldsymbol{\ell}$ *très supérieure à son rayon, contenant* $\boldsymbol{N}$ *spires montées en série, d'axe* $\overrightarrow{e_z}$ *et de surface* $\boldsymbol{S}$*. La bobine est parcourue par un courant* $\boldsymbol{i}$*, on donne l'expression du champ magnétique à l'intérieur de la bobine :* $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \frac{N}{l} i\, \overrightarrow{e_z}$ *(démontré en 2ème année). Avec* μ_0*, la perméabilité magnétique du vide :* $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H.m^{-1}$*.*



1) *Indiquer sur le schéma le vecteur surface* $\overrightarrow{\boldsymbol{S}}$ *d'une spire de la bobine.*
2) *Exprimer le flux du champ magnétique propre* $\boldsymbol{\Phi_{P,1}}$ *à travers une spire de la bobine.*
3) *En déduire le flux propre* $\boldsymbol{\Phi_{P,N}}$ *à travers les* $\boldsymbol{N}$ *spires de la bobine.*
4) *En déduire l'expression de l'inductance propre* $\boldsymbol{L}$*. On pourra faire apparaître le nombre de spires par unité de longueur* $\boldsymbol{n}$ *et le volume* $\boldsymbol{V}$ *de la bobine.*
5) *Faire l'application numérique pour* $\boldsymbol{N = 1000}$*,* $\boldsymbol{r = 1cm}$ *et* $\boldsymbol{\ell = 10\ cm}$*.*

2. Circuit inductif, bilan de puissance

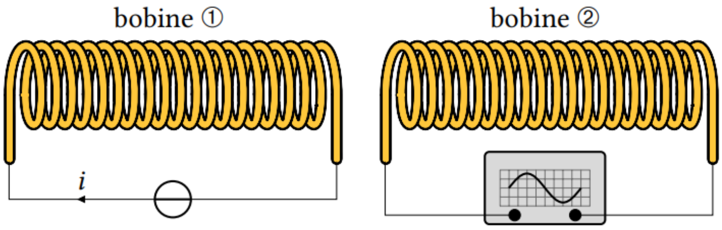
***Application**: On considère une bobine alimentée par un générateur de fem constante $\boldsymbol{E}$ à travers une résistance $\boldsymbol{R}$. La bobine est d'inductance propre $\boldsymbol{L}$ et de résistance $\boldsymbol{r}$. A $\boldsymbol{t = 0}$ on ferme l'interrupteur.*

***1)** Lors de la fermeture de l'interrupteur, quel phénomène se produit au niveau de la bobine ?*
***2)** En suivant la méthode précédente, établir l'équation différentielle vérifiée par $\boldsymbol{i}$.*
***3)** Commenter en lien avec la loi de Lenz.*
***4)** En multipliant l'équation différentielle par $\boldsymbol{i}$, établir le bilan de puissance du circuit et interpréter les différents termes.*

III] Inductance mutuelle

1. Mise en évidence expérimentale

Plaçons deux bobines l'une à côté de l'autre, comme schématisé ci-dessous. La bobine ① est alimentée par une tension sinusoïdale, la bobine ② n'est pas alimentée.



Observons la tensions au bornes de la bobine 2 : *On note l'apparition d'une tension aux bornes de la bobine ②, oscillant à la même fréquence que la tension imposée à la bobine ①, et d'amplitude d'autant plus grande que les bobines sont proches.*

Le champ créé par la bobine ① a un flux au travers de la bobine ② non-nul et qui dépend du temps, d'où un phénomène d'induction dont on mesure la force électromotrice induite.

On dit qu'il y a **couplage inductif** entre les deux bobines

2. Coefficient d'inductance mutuelle

Considérons le cas plus général où les deux bobines ① et ② sont parcourues toutes les deux par des courants $\boldsymbol{i_1}$ et $\boldsymbol{i_2}$, et créent chacune un champ magnétique. On suppose qu'il n'y a pas d'autre champ extérieur.

Le flux magnétique total au travers de la bobine ① s'écrit :

$$\boldsymbol{\Phi_{tot\to 1}} = \underbrace{\boldsymbol{\Phi_{1\to 1}}}_{\boldsymbol{\Phi_P}} + \boldsymbol{\Phi_{2\to 1}}$$

Le flux $\boldsymbol{\Phi_{2\to 1}}$ créé par une bobine ② au travers d'une bobine ① est proportionnel au courant $\boldsymbol{i_2}$ par la relation :

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi_{2\to 1}} = \boldsymbol{M i_2}}$$

Le coefficient $\boldsymbol{M}$ est appelé **inductance mutuelle** ou **coefficient d'induction mutuelle**.

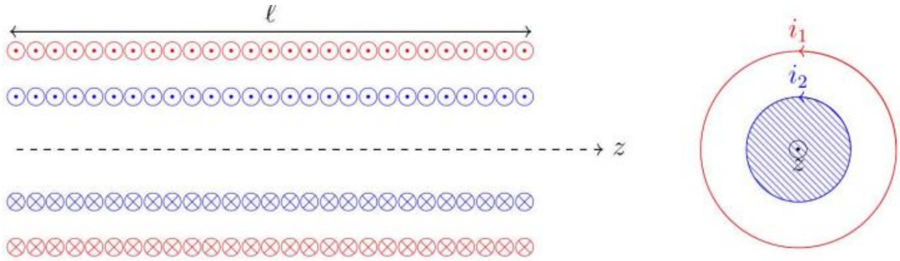
Remarques :

- *Le coefficient $\boldsymbol{M}$ dépend de la géométrie et de la position relative des deux bobines, mais est indépendant des courants les parcourent les bobines*
- *Le coefficient $\boldsymbol{M}$ peut être positif ou négatif, en fonction des conventions d'orientation choisies.*
- *L'inductance mutuelle s'exprime en Henry : $[\boldsymbol{M}] = \boldsymbol{H}$.*
- *Le théorème de Neumann (admis) énonce que les deux coefficients d'inductance mutuelle entre $\boldsymbol{\Phi_{1\to 2}}$ et $\boldsymbol{i_1}$ et entre $\boldsymbol{\Phi_{2\to 1}}$ et $\boldsymbol{i_2}$ sont égales :*

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi_{1\to 2}} = \boldsymbol{M i_1} \\ \boldsymbol{\Phi_{2\to 1}} = \boldsymbol{M i_2} \end{cases}$$

Application : *Solénoïdes imbriqués.*

On cherche à établir l'expression du coefficient d'inductance mutuelle $\boldsymbol{M}$ entre deux solénoïdes $\mathbf{1}$ et $\mathbf{2}$ de même axe $(\boldsymbol{Oz})$, de grande longueur $\boldsymbol{\ell}$, de surfaces $\boldsymbol{S_1}$ et $\boldsymbol{S_2} < \boldsymbol{S_1}$, et possédant respectivement $\boldsymbol{N_1}$ et $\boldsymbol{N_2}$ spires sont imbriqués l'un dans l'autre, comme schématisé ci-dessous. Ils sont parcourus par des courants $\boldsymbol{i_1}$ et $\boldsymbol{i_2}$.

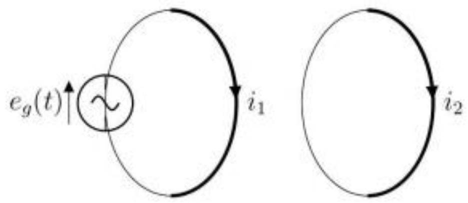


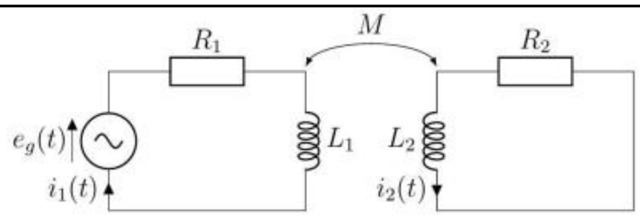
1) *Indiquer les vecteurs surfaces des deux bobines et exprimer le champ créé par chaque bobine.*
2) *Exprimer le flux magnétique $\boldsymbol{\Phi_{1\to2}}$ de $\overrightarrow{\boldsymbol{B_1}}$ à travers la deuxième bobine et $\boldsymbol{\Phi_{2\to1}}$ de $\overrightarrow{\boldsymbol{B_2}}$ à travers la première bobine. En déduire l'expression de l'inductance mutuelle $\boldsymbol{M}$.*
3) *On change l'orientation de la deuxième bobine, calculer l'un des deux flux précédents. Quel est la conséquence du changement d'orientation d'une des deux bobines ?*

3. Circuit couplés par inductance mutuelle, bilan de puissance

Application : *Circuits couplés par mutuelle induction*

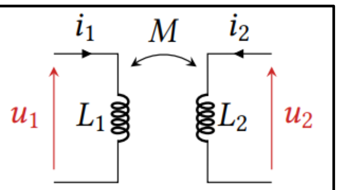
On considère l'ensemble des deux circuits couplés par mutuelle induction, on notera $\boldsymbol{M}$ le coefficient d'inductance mutuelle entre les deux circuits. Le circuit $\mathbf{1}$, d'inductance propre $\boldsymbol{L_1}$ et de résistance $\boldsymbol{R_1}$ est alimenté par un générateur qui impose une tension sinusoïdale : $\boldsymbol{e_g(t)} = \boldsymbol{E\cos(\omega t)}$. Le circuit $\mathbf{2}$ est d'inductance propre $\boldsymbol{L_2}$ et de résistance $\boldsymbol{R_2}$, cf. schéma :





1) *Comment peut-il exister un courant dans le deuxième circuit en l'absence de générateur ?*
2) *Exprimer le flux total* $\boldsymbol{\Phi_{tot\to 1}}$ *à travers le circuit* $\mathbf{1}$ *en fonction de* $\boldsymbol{L_1}$*,* $\boldsymbol{M}$*,* $\boldsymbol{i_1}$ *et* $\boldsymbol{i_2}$*. Appliquer la loi de Faraday pour en déduire la force électromotrice induite* $\boldsymbol{e_{ind}}$ *dans ce circuit.*
3) *Faire de même dans le circuit* $\mathbf{2}$*.*
4) *Représenter le circuit électrique équivalent faisant intervenir les générateurs fictifs.*
5) *Etablir le système de deux équations différentielles couplées vérifiées par* $\boldsymbol{i_1}$ *et* $\boldsymbol{i_2}$*.*
6) *Etablir le bilan de puissance en multipliant les équations couplées par respectivement* $\boldsymbol{i_1}$ *et* $\boldsymbol{i_2}$**.**

Généralisation : en présence de couplage inductif, les lois de comportement des bobines ne s'écrivent pas sous la forme habituelle ($\boldsymbol{u = L\frac{di}{dt}}$) mais impliquent les intensités dans les deux circuits couplés :



$$\boldsymbol{u_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}} \quad et \quad \boldsymbol{u_2 = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}}$$

4. Applications

Puces RFID : radio-identification C'est une méthode permettant la transmission à distance d'informations placées sur de petits marqueurs (étiquettes adhésives, puces sans contact, étiquettes antivol, ...). Lorsque l'étiquette passe près d'un lecteur, qui est un système actif fournissant un champ magnétique, un courant circule dans le circuit et permet d'alimenter une petite antenne qui peut alors envoyer l'information contenue dans la puce.

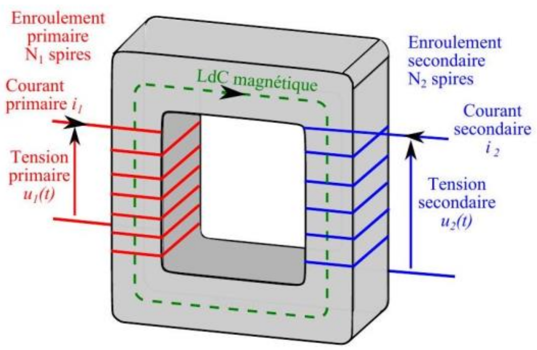
Les utilisations des puces RFID sont multiples : Antivols, forfaits de ski, badges de télépéage…

Boucle magnétique : Elle se trouve généralement aux feux rouges, ou devant des barrières de parking souterrain. Il s'agit d'une spire conductrice située dans le sol. Quand un véhicule s'arrête sur la boucle, il crée par couplage un courant induit dans la boucle magnétique qui peut ainsi détecter la présence du véhicule.

Rechargement par induction : Pour les brosses à dent, ou plus récemment les téléphones portables, on peut transmettre sans contact l'énergie électrique d'un générateur vers le système à recharger. Chacun est muni d'une bobine.

Transformateurs : Dispositifs permettant d'élever ou d'abaisser les tensions en régime alternatif. Ils sont utilisés en amont et aval des lignes à hautes tensions mais aussi en en électronique pour isoler un circuit de la masse d'un générateur.

5. Transformateur



Un **transformateur** est un dispositif qui permet de **modifier l'amplitude** (ou la valeur efficace) **de tensions** et de **courants alternatif**.

Un tel dispositif est constitué d'enroulements en fil de cuivre, bobinés autour d'un circuit magnétique.

L'**enroulement primaire** est constitué de $\boldsymbol{N_1}$ spires identiques, la tension à ses bornes est $\boldsymbol{u_1(t)}$ et est parcouru par un courant d'intensité $\boldsymbol{i_1(t)}$.

L'**enroulement secondaire** est constitué de $\boldsymbol{N_1}$ spires identiques, la tension à ses bornes est $\boldsymbol{u_2(t)}$ et est parcouru par un courant d'intensité $\boldsymbol{i_2(t)}$.

Le **cadre ferromagnétique** sert à **canaliser les lignes de champ magnétique** de façon à ce que le flux qui traverse une spire du primaire soit le plus proche possible de celui qui traverse une spire du secondaire. On supposera que le couplage est parfait, c'est-à-dire que ces flux sont égaux. On note $\boldsymbol{\Phi}$ le flux traversant une spire, orientée positivement dans le sens de la flèche en pointillé.

Application : *Modèle simplifié du transformateur.*

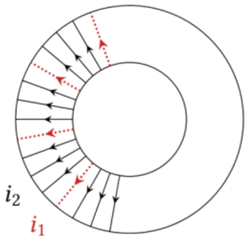
On considère un transformateur toroïdale constitué de deux bobinages en influence totale avec $N_2 = 3N_1$ (cf. schéma).

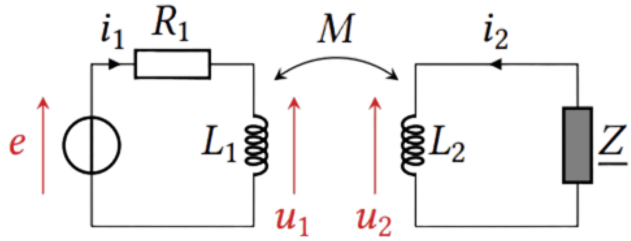
Les inductances L_1, L_2 et M dépendent des nombres de spires par des résultats voisins de ceux établis pour les solénoïdes imbriqués :

$$L_1 = \mu_0 {N_1}^2 \lambda \qquad L_2 = \mu_0 {N_2}^2 \lambda \qquad M = \mu_0 N_1 N_2 \lambda$$

où λ est une constante homogène à une longueur caractérisant la géométrie du transformateur.

Une tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$ est imposée au primaire au travers d'une résistance R_1. Le secondaire sert à alimenter une charge d'impédance $\underline{Z}$.





1) *Exprimer en régime sinusoïdale forcé les lois de comportement aux bornes des bobines couplées par mutuelle induction.*

2) *Déterminer le rapport de transformation $m = \frac{\underline{U_2}}{\underline{U_1}}$, lorsque le secondaire est en sortie ouverte.*

3) *Déterminer l'impédance d'entrée du transformateur, c'est-à-dire l'impédance équivalente vue du primaire, lorsqu'il débite dans une charge $\underline{Z}$ quelconque.*