

Cartes de champ magnétique□ **Exercice 28.1. Cartes de champ ★ (Analyser une carte de champ)**

- ▷ Les lignes de champ s'enroulent autour des sources, qui sont donc situées au niveau des points noirs de chaque figure. Il y en a six sur la figure de gauche et quatre sur la figure de droite.
- ▷ Connaissant l'enroulement des lignes de champ, le sens du courant dans les fils se déduit de la règle de la main droite (l'enroulement des doigts donne le sens des lignes de champ, le pouce donne le sens du courant). Dans tous les cas, le courant est perpendiculaire au plan de la feuille. Raisonons dans le cas où la feuille est posée sur votre table. Sur la carte de gauche, le courant va du sol vers le plafond \odot pour les trois sources du bas et du plafond vers le sol \otimes pour les trois sources du haut. C'est le contraire sur la carte de droite : le courant va du sol vers le plafond \odot pour les deux sources du haut et du plafond vers le sol \otimes pour les deux sources du bas.
- ▷ Les zones de champ fort sont celles où les lignes de champ sont très rapprochées, les zones de champ faible celles où il y a peu de lignes de champ.
- ▷ Une zone de champ uniforme se traduit par des lignes de champ parallèles et régulièrement espacées : il n'y en a sur aucune des deux cartes.

□ **Exercice 28.2. Champ sur l'axe d'un dipôle magnétique ★★ (Symétries, moment magnétique)**

- 1] Tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan d'anti-symétrie de la distribution de courant. Ainsi, $\vec{B}(M)$ doit être inclus dans chacun de ces plans, donc dans leur intersection. On a donc

$$\vec{B}(M) = B_z(M) \vec{e}_z.$$

Géométriquement,

$$\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad \text{d'où} \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z.$$

Pour identifier ou contrôler la nature « anti-symétrie » du plan identifié, se placer en un point de ce plan et analyser le sens de courant : ici, il est orthogonal au plan, ce qui permet de reconnaître un plan d'anti-symétrie. S'il avait été inclus dans le plan, il se serait agi d'un plan de symétrie.

- 2] Compte tenu du sens du courant, le vecteur normal à la spire est \vec{e}_z . Ainsi,

$$\vec{m} = IS \vec{e}_z \quad \text{soit} \quad \vec{m} = \pi I R^2 \vec{e}_z.$$

- 3] Dans la limite $z \gg R$, on a $R/z \ll 1$, ce qui permet de simplifier

$$\frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{R^2}{\left[z^2 \left(1 + \left(\frac{R}{z} \right)^2 \right) \right]^{3/2}} \simeq \frac{R^2}{z^3} \quad \text{donc} \quad \vec{B}(M) \simeq \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3} \vec{e}_z$$

ce qui donne

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi z^3} \vec{m}.$$

Action d'un champ magnétostatique uniforme□ **Exercice 28.3. Equilibre d'un aimant ★ (Moment magnétique, couple magnétique)**

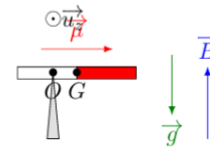
L'aimant est soumis à :

— son poids qui s'exerce en G et de moment par rapport à O :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(m\vec{g}) = \vec{OG} \wedge m\vec{g} = -mgd\vec{u}_x$$

— à l'action du champ magnétique de moment $\vec{\mu} \wedge \vec{B} = \mu B \vec{u}_z$

— au moment de l'action mécanique de contact en O , dont le moment est nul par rapport à O



L'équilibre est réalisé si la somme des moments est nul, donc pour $\mu B = mdg$,

soit $d = \frac{\mu B}{mg}$

□ **Exercice 28.4. Mouvement d'un aimant dans un champ magnétique uniforme ★★ (Solide en rotation autour d'un axe fixe, couple magnétique, énergie potentielle magnétique)**

1. Le couple magnétique est défini par :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B} = \mu \vec{e}_r \wedge B \vec{e}_x = \mu (\cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y) \wedge B \vec{e}_x = -\mu B \sin(\theta) \vec{e}_z$$

Le couple magnétique a tendance à aligner l'aimant sur le champ magnétique. On en déduit qu'en l'absence d'amortissement, le mouvement de l'aimant sera oscillant.

2. Les positions d'équilibres sont les positions où le couple magnétique est nul, c'est-à-dire lorsque l'aimant est aligné sur la direction du champ donc $\theta = 0$ ou π .

Si $\theta = 0$ la position est stable car en cas de perturbation le couple magnétique ramène l'aimant vers la position d'équilibre, si $\theta = \pi$ c'est l'inverse, la position est donc instable.

3. En appliquant le TMC par rapport à l'axe (Oz) :

$$J\ddot{\theta} = -\mu B \sin(\theta) \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{\mu B}{J} \sin(\theta) = 0$$

On reconnaît une équation similaire à celle du pendule pesant.

4. Pour faire apparaître des puissances, on multiplie l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$ et on intègre :

$$\dot{\theta} \times J\ddot{\theta} + \dot{\theta} \times \mu B \sin(\theta) = 0$$

Par intégration temporelle, il vient :

$$\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - \mu B \cos(\theta) = cste$$

On identifie alors l'énergie cinétique (de rotation) : $E_{c,rot} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$ et on interprète le second terme comme l'énergie potentielle dont dérive le couple magnétique : $E_{p,mag} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

□ **Exercice 28.5. Rails de Laplace en pente ★★ (Force de Laplace, puissance)**

1. Système : Tige

Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des actions mécaniques :

- poids $m\vec{g} = mg(\sin(\alpha)\vec{u}_x - \cos(\alpha)\vec{u}_y)$
- réaction normale du support
- force de Laplace

$$\begin{aligned}\vec{F}_L &= \int_{\text{tige, dans le sens du courant}} i \, d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \\ &= \int_0^\ell i \, dz \vec{u}_z \wedge B(\cos(\alpha)\vec{u}_y - \sin(\alpha)\vec{u}_x) \\ &= iB \int_0^\ell (-\cos(\alpha)\vec{u}_x - \sin(\alpha)\vec{u}_y) \, dz \\ &= -iB\ell(\cos(\alpha)\vec{u}_x + \sin(\alpha)\vec{u}_y)\end{aligned}$$

2. La tige monte à condition que la composante de la force de Laplace \vec{u}_x soit négative. Or $B\ell \cos(\alpha) > 0$, donc pour cela il faut que l'intensité du courant soit positive.
3. D'après le principe d'inertie, le système persévère dans un mouvement de translation rectiligne uniforme ssi la résultante des forces est nulle : $\vec{R}_N + \vec{F}_L + m\vec{g} = \vec{0}$.

On projette selon \vec{u}_x : $0 - i\ell B \cos(\alpha) + mg \sin(\alpha) = 0$, soit $i = \frac{mg \tan(\alpha)}{\ell B} = 2,51 \text{ A}$

4. Puissance des forces de Laplace vaut : $\mathcal{P} = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = -i\ell B \cos(\alpha) \dot{x}$

Le barreau se déplace à vitesse constante, et met $\tau = 0,5 \text{ s}$ pour augmenter son altitude de $h = 10 \text{ cm}$.

Avec un tout petit peu de trigo : on a $\sin(\alpha) = \frac{h}{\dot{x} \times \tau}$, soit $|\dot{x}| = \frac{h}{\tau \sin(\alpha)}$, avec $\dot{x} < 0$

Ainsi $\mathcal{P} = i\ell B \cos(\alpha) \times \frac{h}{\tau \sin(\alpha)} = \frac{i\ell B h}{\tau \tan(\alpha)} = \frac{mgh}{\Delta t}$

A.N. : $\mathcal{P} = 1,57 \cdot 10^{-2} \text{ W}$

□ **Exercice 28.6. Moteur synchrone ★ (Champ magnétique tournant)**

Les notations utilisées dans tout l'exercice sont présentées figure 1.

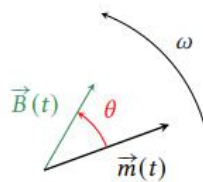


Figure 1 – Notations pour l'étude du moteur synchrone.

- 1 On peut utiliser deux bobines dont les axes forment un angle de $\pi/2$ et alimentées par des courants déphasés d'autant. Cependant, EDF fournit du courant triphasé, c'est-à-dire trois sorties (les phases) déphasées de $2\pi/3$ les

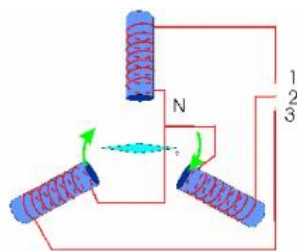


Figure 2 – Champ tournant généré par trois bobines. Chacune des bobines est reliée à une phase de l'alimentation de secteur et au neutre, qui joue le rôle de masse.

unes par rapport aux autres. La solution technologique la plus simple consiste donc à utiliser trois bobines dont les axes se coupent en un même point et inclinées de $2\pi/3$ les unes par rapport aux autres, comme indiqué sur la figure 2.

2] Appliquons le théorème du moment cinétique au rotor dans le référentiel du stator. Lorsque le moteur tourne à vide, il n'est soumis qu'au couple magnétique \vec{M} . D'après la loi du moment cinétique,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$$

mais comme on s'intéresse au régime permanent,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{\mu} \wedge \vec{B} = \vec{0}.$$

On en déduit que $\vec{\mu}$ et \vec{B} sont colinéaires, c'est-à-dire $\theta = 0$.

3] Toujours en régime permanent, le couple moteur et le moment résistant se compensent vectoriellement,

$$\vec{\mu} \wedge \vec{B} + \vec{M}_r = \vec{0}$$

donc en norme

$$\mu B \sin \theta = M_r \quad \text{soit} \quad \theta = \arcsin \frac{M_r}{\mu B} = 24^\circ.$$

L'angle θ est bien positif, d'une part car il est défini de $\vec{\mu}$ vers \vec{B} , et d'autre part car le couple résistant a forcément pour effet de retarder le rotor par rapport au champ. De façon générale, lorsque le moteur entraîne une charge, le moment magnétique suit le champ mais avec un angle interne d'autant plus grand que le couple résistant est important. La puissance fournie par le moteur vaut

$$\mathcal{P} = M_r \omega \quad \text{donc} \quad \mathcal{P} = \mu B \omega \sin \theta = 205 \text{ W}.$$

Cette puissance provient du générateur électrique qui alimente les bobines produisant le champ tournant.

4] La question précédente montre que $\mu B \sin \theta = M_r$, c'est-à-dire que la charge mécanique entraînée (décrite par le moment M_r) n'a d'influence que sur l'angle interne θ mais pas sur la vitesse de rotation. C'est d'ailleurs un des avantages de la machine synchrone par rapport à la machine asynchrone. Le couple maximal que peut fournir le moteur est obtenu pour $\sin \theta = 1$, soit

$$M_{\max} = mB = 1,6 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Au delà, le couple exercé par le champ sur le rotor est trop faible pour le mettre en mouvement.

□ Exercice 28.7. Balance de Cotton ★★ (Force de Laplace, moment cinétique)

Introduisons des coordonnées cylindriques de centre O et d'axe Oz tel que $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

1 Les parties circulaires ont pour centre O , si bien que l'élément de courant $I d\vec{\ell}$ est porté par $\pm \vec{e}_\theta$ (\oplus pour le conducteur aller et \ominus pour le retour) et la force de Laplace élémentaire $I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ par $\pm \vec{e}_r$. Toutes ces forces sont donc des forces centrales de centre O , dont le moment en O est donc nul.

2 Sur la partie rectiligne de longueur L , la force de Laplace vaut

$$\vec{F}_L = -IL\vec{e}_r \wedge B\vec{e}_z = ILB\vec{e}_\theta$$

Cette force s'applique au milieu du segment rectiligne, son bras de levier vaut donc a , d'où

$$\vec{M}_O(\vec{F}_L) = a\vec{e}_r \wedge ILB\vec{e}_\theta \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{M}_O(\vec{F}_L) = aILB\vec{e}_z}$$

3 Le bras gauche de la balance est soumis à la force de Laplace et à son propre poids. Le bras droit de la balance est soumis à son propre poids et à celui de la masse m additionnelle qui a été déposée sur le plateau. L'énoncé indique qu'à vide la balance est équilibrée, ce qui veut dire que les moments en O du poids de chaque bras se compensent. Comme la balance est de nouveau à l'équilibre, le moment du poids de la masse m doit exactement compenser celui des forces de Laplace, c'est-à-dire

$$-a'mg\vec{e}_z + aILB\vec{e}_z = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{B = \frac{a'mg}{aIL}}$$

4 La plus petite valeur de champ magnétique mesurable est celle pour laquelle $m = \delta m$, c'est-à-dire

$$\boxed{B_{\min} = \frac{a' \delta m g}{a I L} = 2 \text{ mT}}$$

À titre de comparaison, le champ magnétique terrestre a pour norme $5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ et n'est pas mesurable avec la balance, mais le champ créé par un aimant permanent « basique » est de l'ordre de 10 mT . **La balance de Cotton est donc tout à fait utilisable**, mais peu précise pour les champs faibles.