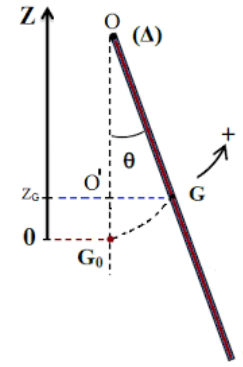


TP n° 23 : Rotation d'un solide autour d'un axe fixe

On considère le pendule pesant schématisé ci-contre, en rotation autour de l'axe fixe (Δ) horizontal par une liaison pivot supposé parfaite. On note J son moment d'inertie par rapport à (Δ) et on pose $l = OG$ la distance entre l'axe de rotation et le centre de masse de la barre.



I) Du pendule simple au pendule pesant

Dans cette première partie, on souhaite déterminer si un pendule pesant de longueur L est équivalent à un point de même masse situé au centre de gravité G de la barre. C'est-à-dire si on peut modéliser le pendule pesant par un pendule simple de longueur $\frac{L}{2}$ (Le centre de gravité de la barre est située au milieu de cette dernière).

★ Mesurer la longueur de la barre à l'aide d'une règle, peser la barre avec une balance.

$L =$	\pm	$m =$	\pm
-------	-------	-------	-------

★ Fixer le pivot du pendule pesant à l'extrémité de la barre.

★ Ecarter la barre de sa position d'équilibre (environ 20°) et chronométrer environ **10 périodes** (On vise un nombre de périodes suffisamment important pour obtenir une mesure précise, mais assez faible pour négliger l'influence des frottements)

$T_{exp} =$	\pm
-------------	-------

On rappelle l'équation du mouvement du pendule simple : $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \sqrt{\frac{g}{l}}\theta = 0$ et la période d'oscillation T_0 :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

1) Calculer la période d'oscillation d'un pendule simple de longueur $l = \frac{L}{2}$.

2) Comparer le résultat avec la mesure expérimentale de la période du pendule pesant. Peut-on assimiler la barre à un point de même masse situé au centre de gravité G de la barre ?

II) Etude expérimentale du pendule pesant

3) Lister les actions mécaniques subies par le pendule, leur résultante et le moment par rapport à l'axe (Δ).

4) Montrer que l'équation du mouvement du pendule pesant par application du théorème du moment cinétique autour de (Δ) s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{J}\theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \Omega_0^2\theta = 0$$

5) En déduire l'expression de la période T_0 des oscillations de la barre puis exprimer J en fonction de T_0 , m , g et ℓ .

6) En utilisant la valeur de T_{exp} mesurée à la partie I, déterminer la valeur expérimentale J_{exp} du moment d'inertie de la barre.

Le moment d'inertie théorique d'une barre de masse m et de longueur L autour d'une de ses extrémités est donné par : $J = \frac{1}{3}mL^2$ (cf. annexe).

7) Comparer le moment d'inertie expérimental et le moment d'inertie théorique. Conclure.

III) Théorème d'Huygens (pour les plus rapides)

Le moment d'inertie $J_{(Oz)}$ d'un solide par rapport à un axe de rotation orthogonal situé en O à une distance $\ell = OG$ de son centre de gravité G s'exprime avec le théorème d'Huygens (hors programme) en fonction de : $J_{(Gz)}$, m et $\ell = OG$:

$$J_{(Oz)} = J_{(Gz)} + mL^2$$

De plus pour une barre de masse m et de longueur L en rotation autour d'un axe perpendiculaire situé en son centre de gravité, on a : $J_{(Gz)} = \frac{1}{12}mL^2$ (cf. annexe).

8) Pour différente valeur de ℓ , déterminer expérimentalement la valeur de la période T_{exp} en chronométrant la durée $\Delta t = 10T_{exp}$ de 10 oscillations. Compléter les 3 premières lignes du tableau suivant :

ℓ (m)				
Δt (s)				
T_{exp} (s)				
J_{exp} (kg.m ²)				
J_{th} (kg.m ²)				

9) A l'aide de la relation $J_{(Oz)} = \frac{T^2}{4\pi^2}mg\ell$, compléter la 4^{ème} ligne du tableau.

10) À l'aide du théorème d'Huygens, compléter la dernière ligne du tableau.

11) Les résultats expérimentaux permettent-ils de confirmer l'expression du moment d'inertie donnée par le théorème de Huygens ? Justifier.

Annexe : Calcul des moments d'inertie d'une barre

En supposant que les dimensions transversales de la barre sont négligeables devant sa la longueur, la barre peut être considérée comme étant unidimensionnelle (d'axe x). Ainsi, pour une barre de masse linéique λ et de longueur L ($m = \lambda L$), on a :

Le moment d'inertie par rapport à un axe orthogonal passant par une de ses extrémités O est donné par :

$$J_{(Oz)} = \int_0^L \lambda x^2 dx = \left[\lambda \frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{1}{3} \lambda L^3 = \frac{1}{3} mL^2$$

Le moment d'inertie par rapport à un axe orthogonal passant par son centre de gravité G est donné par :

$$J_{(Gz)} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \lambda x^2 dx = \left[\lambda \frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \lambda \frac{L^3}{12} = \frac{1}{12} mL^2$$