Introduction

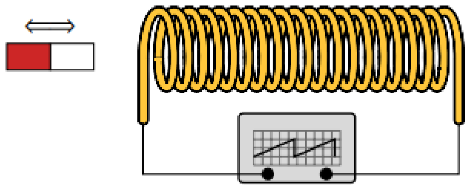
Ce chapitre a pour objectif d'étudier les phénomènes d'induction dans les circuits immobiles soumis à un champ magnétique dépendant du temps : c'est l'induction de Neumann. La situation « symétrique » d'un circuit en mouvement dans un champ magnétique stationnaire sera étudiée au chapitre suivant.

I] Loi de l'induction de Faraday

1. Mise en évidence expérimentale

Considérons une bobine branchée sur un oscilloscope et approchons un aimant de la bobine, notons les observations :

- *Aimant au repos : On observe aucune tension.*
- *Aimant en mouvement : On observe une tension positive quand on approche l'aimant et négative quand on éloigne l'aimant.*

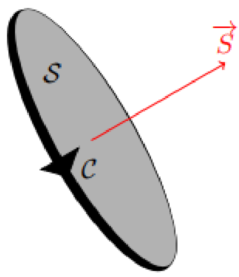


L'**apparition d'une tension** n'est pas liée à l'existence du champ magnétique créé par l'aimant, mais à **la variation de la « quantité de champ magnétique » traversant la bobine**.

La tension due au mouvement de l'aimant est appelée **force électromotrice induite**. Quand le circuit est fermé, il en résulte un courant appelé **courant induit**.

2. Flux du champ magnétique

Considérons un circuit $\boldsymbol{C}$, orienté par le sens du courant. On définit le vecteur surface $\vec{S}$ de ce circuit comme étant orthogonal au plan du circuit, le vecteur $\vec{S}$ est orienté par la règle de la main droite par rapport au sens conventionnel du courant et de norme égale à la surface du circuit.



Remarques :

- *Pour que $\vec{S}$ soit défini, il faut donc d'abord orienter la flèche du courant, le sens du courant qui intervient dans la définition est son sens d'algébrisation conventionnelle.*

Le flux du champ magnétique $\vec{B}$ *(ou flux magnétique)* à travers une surface $\boldsymbol{S}$ orientée par son vecteur $\vec{S}$ est défini par :

$$\boxed{\Phi = \iint_{M\in S} \vec{B} \bullet d\vec{S}}$$

Remarques :

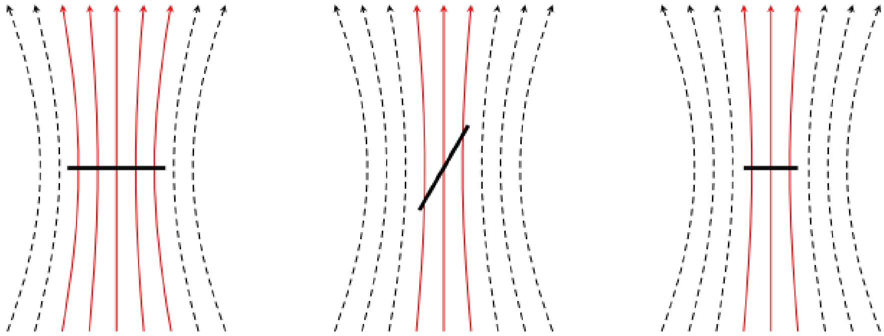
- *Le flux du champ magnétique s'exprime en Weber ($1\ Wb = 1\ T.m^2$).*
- *Si le champ magnétique est uniforme, l'expression du flux se simplifie :*

$$\Phi = \vec{B} \bullet \iint_{M\in S} d\vec{S} = \vec{B} \bullet \vec{S}$$

- *Si le champ magnétique traverse **N** spires identiques (chacune de vecteur surface $\vec{S}$), alors le flux total vaut :*

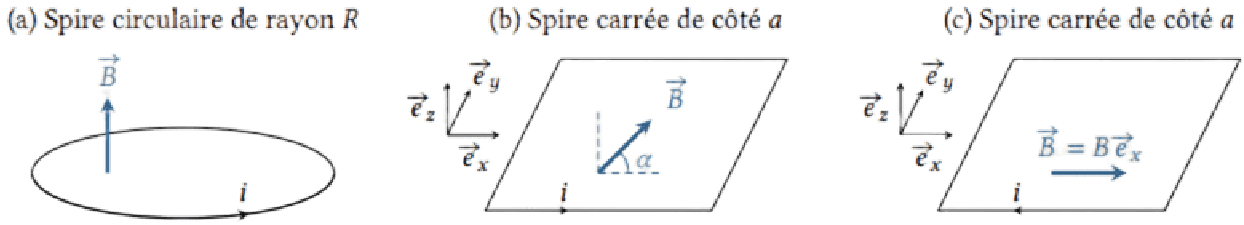
$$\Phi_N = N\,\Phi_{1\,spire}$$

Qualitativement, le flux magnétique peut s'interpréter comme **« le nombre » de lignes de champ magnétique qui traversent le circuit**, cf. figure ci-dessous.



Flux magnétique et lignes de champ. Le trait épais symbolise le circuit vu de côté.

Application : *Calculer le flux magnétique au travers des circuits suivants, plongés dans un champ uniforme à l'échelle du circuit.*



Correction :

1)

$$\Phi = B\pi R^2$$

2)

$$\Phi = Ba^2 \sin(\alpha)$$

3)

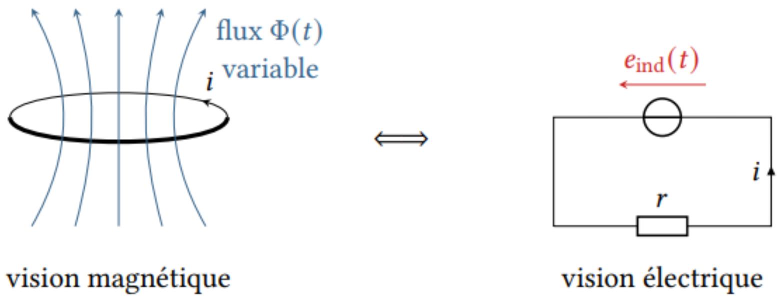
$$\Phi = 0$$

3. Loi de l'induction de Faraday

Les **variations de flux magnétique Φ** au travers d'un circuit fermé se modélisent électriquement par **l'ajout d'un générateur induit dans le circuit**, dont la force électromotrice induite e_{ind} est reliée au flux magnétique Φ au travers du circuit par la **loi de Faraday** :

$$\boxed{e_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

Le générateur induit doit être orienté en convention générateur par rapport à i.

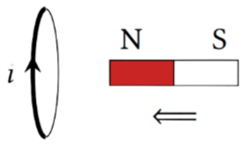


4. Loi qualitative de Lenz

Loi de Lenz : Par leurs conséquences, les phénomènes d'induction tendent à atténuer leurs causes.

En pratique, la cause est la variation du flux magnétique à travers le circuit, les phénomènes d'induction tendant à atténuer ces variations en générant un courant source d'un flux magnétique opposé.

Application : *Un aimant est progressivement rapproché d'une spire conductrice de résistance r.*



Déterminer le signe de i lors de l'opération, d'abord en raisonnant par la loi de Lenz puis en retrouvant le résultat avec la loi de Faraday.

(On rappelle que les lignes de champ magnétique créées par un aimant partent du pôle Nord pour aboutir au pôle Sud, et que le champ est plus intense à proximité de l'aimant.)

Correction :

- **Avec la loi de Lenz**

L'aimant est approché de la spire, ce qui augmente le champ magnétique vu par la spire et donc le flux magnétique au travers de la spire, comme schématisé figure 3. Ainsi, pour diminuer ces variations de flux [1], le champ magnétique induit s'oppose au champ extérieur. Par la règle de la main droite, on en déduit que le sens du courant induit est opposé au sens conventionnel. On a donc $i < 0$ au cours de l'expérience ... et bien sûr nul avant et après lorsque l'aimant est immobile.

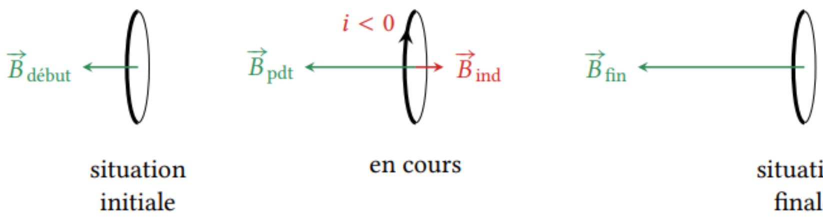


Figure 3 – Spire rapprochée d'un aimant.

- **Avec la loi de Faraday**

$\vec{B}$ et $\vec{n}$ sont de même sens, donc on peut dire que le flux Φ est positif et qu'il augmente au cours de l'expérience, même s'il est impossible de le calculer exactement. Ainsi,

$$e_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} < 0$$

D'après la loi des mailles appliquée au circuit électrique équivalent,

$$e_{\text{ind}} = Ri \qquad \text{donc} \qquad i < 0$$

II] Auto-induction

Un circuit parcouru par un courant crée un champ magnétique, dont le flux à travers le circuit lui-même est non nul, et peut donc causer des phénomènes inductifs : on parle alors **d'auto-induction**.

Ces phénomènes existent dans tous les circuits, mais ne jouent un rôle prépondérant que dans les bobines car les nombreuses spires enroulées permettent d'amplifier leur effet.

1. Flux propre et induction propre

Pour étudier les phénomènes inductifs dans un circuit, on distingue le **champ propre**, c'est-à-dire le champ magnétique créé par le circuit lui-même, du **champ extérieur**, créé par les autres sources à proximité (autre circuit, aimant, etc.).

Le **flux propre** $\boldsymbol{\Phi_P}$ est le flux du champ propre à travers le circuit. Le champ propre étant proportionnel au courant $\boldsymbol{i}$ dans le circuit, le flux propre est également proportionnel à $\boldsymbol{i}$.

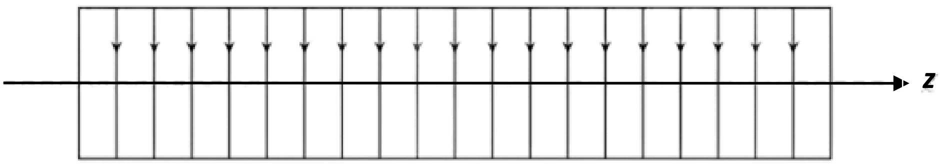
On appelle **inductance propre** d'une bobine, notée $\boldsymbol{L}$, le coefficient de proportionnalité entre le flux propre $\boldsymbol{\Phi_P}$ et le courant $\boldsymbol{i}$:

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi_P = Li}}$$

Remarques :
- *L'inductance propre est toujours positive, et ne dépend que de la géométrie de la bobine. En particulier, elle ne dépend pas de l'intensité qui la traverse.*
- *L'inductance propre s'exprime en Henry :* $[\boldsymbol{L}] = \boldsymbol{H}$.

Application : *Inductance propre d'un solénoïde infini.*

Considérons une bobine de longueur $\boldsymbol{\ell}$ *très supérieure à son rayon, contenant* $\boldsymbol{N}$ *spires montées en série, d'axe* $\overrightarrow{e_z}$ *et de surface* $\boldsymbol{S}$*. La bobine est parcourue par un courant* $\boldsymbol{i}$*, on donne l'expression du champ magnétique à l'intérieur de la bobine :* $\overrightarrow{B} = \mu_0 \frac{N}{l} i \overrightarrow{e_z}$ *(démontrée en 2ème année). Avec* μ_0*, la perméabilité magnétique du vide :* $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H.m^{-1}$.



1) *Indiquer sur le schéma le vecteur surface* $\overrightarrow{S}$ *d'une spire de la bobine.*
2) *Exprimer le flux du champ magnétique propre* $\boldsymbol{\Phi_{P,1}}$ *à travers une spire de la bobine.*
3) *En déduire le flux propre* $\boldsymbol{\Phi_{P,N}}$ *à travers les* $\boldsymbol{N}$ *spires de la bobine.*
4) *En déduire l'expression de l'inductance propre* $\boldsymbol{L}$*. On pourra faire apparaître le nombre de spires par unité de longueur* $\boldsymbol{n}$ *et le volume* $\boldsymbol{V}$ *de la bobine.*
5) *Faire l'application numérique pour* $N = 1000$*,* $r = 1cm$ *et* $\ell = 10\ cm$.

Correction :

2) *Le champ magnétique à l'intérieur de la bobine est uniforme, on en déduit :*

$$\Phi_{P,1} = \overrightarrow{B} \bullet \overrightarrow{S} = \mu_0 \frac{N}{l} i \pi r^2$$

3)

$$\boldsymbol{\Phi_{P,N} = N\Phi_{P,1} = \mu_0 \frac{N^2}{l} i\pi r^2}$$

4)

$$\boldsymbol{L = \frac{\Phi_{P,N}}{i} = \mu_0 \frac{N^2}{l}\pi r^2 = \mu_0 \frac{N^2}{l^2} V = \mu_0 n^2 V}$$

5)

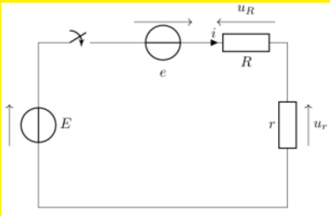
$$\boldsymbol{L = 4\pi^2 \times 10^{-7} \frac{1000^2}{10^{-1}} \times 10^{-4} = 4\,mH}$$

2. <u>Circuit inductif, bilan de puissance</u>

<u>Application</u>: *On considère une bobine alimentée par un générateur de force électromotice constante $\boldsymbol{E}$ à travers une résistance $\boldsymbol{R}$. La bobine est d'inductance propre $\mathbf{L}$ et de résistance $\boldsymbol{r}$. A $\boldsymbol{t = 0}$ on ferme l'interrupteur.*

1) *Lors de la fermeture de l'interrupteur, quel phénomène se produit au niveau de la bobine ?*
2) *En suivant la méthode précédente, établir l'équation différentielle vérifiée par $\boldsymbol{i}$.*
3) *Commenter en lien avec la loi de Lenz.*
4) *En multipliant l'équation différentielle par $\boldsymbol{i}$, établir le bilan de puissance du circuit et interpréter les différents termes.*

Correction :
1. Lors de la fermeture de l'interrupteur, le courant électrique du circuit varie dans le temps. Il y a donc un phénomène d'auto-induction, avec apparition d'une f.e.m auto-induite qui s'oppose à la variation du courant. La bobine agit donc comme un frein au démarrage du courant.
2. Le flux propre est $\varphi_P = L \times i$.
La f.e.m induite est $e = -\frac{d\varphi_P}{dt} = -L\frac{di}{dt}$.



En appliquant la loi des mailles dans le circuit contenant la force électromotrice E, la résistance R, la résistance interne r de la bobine et l'inductance L, on obtient :

$$E + e = Ri(t) + ri(t)$$

$$E - L\frac{di(t)}{dt} = (R + r)i(t)$$

On peut écrire cette équation sous la forme d'une équation différentielle :

$$L\frac{di(t)}{dt} + (R + r)i(t) = E$$

3. La loi de Lenz stipule que le courant induit s'oppose à la cause qui lui donne naissance. Ici, la cause est la variation du courant dans la bobine. La force électromotrice induite s'oppose donc à l'augmentation du courant imposée par le générateur. C'est pourquoi le courant ne croît pas instantanément mais progressivement : l'inductance retarde son établissement.

Correction : On reprend la loi des mailles et on multiplie par i :

$$L\frac{di(t)}{dt} + (R + r) \cdot i(t) = E \Rightarrow L\frac{di(t)}{dt} \cdot i + (R + r)i^2(t) = E \cdot i$$

soit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + (R + r)i^2(t) = E \cdot i$$

On reconnaît dans cette relation :
— la puissance $\mathcal{P}_g = Ei(t)$ cédée au circuit par le générateur,
— la puissance $\mathcal{P}_{\text{Joule}} = (R + r)i^2(t)$, dissipée par effet Joule dans les résistances $R + r$.

Ainsi :

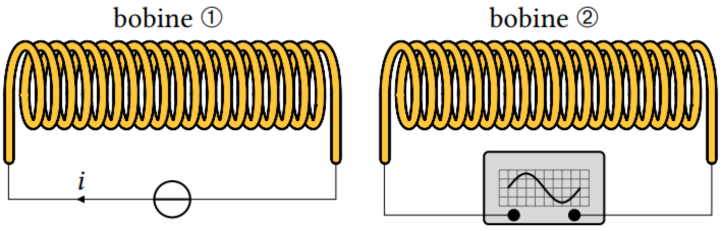
$$\mathcal{P}_g - \mathcal{P}_{\text{Joule}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2(t)\right).$$

On constate que l'énergie apportée par le générateur est supérieure à l'énergie dissipée par effet Joule : la différence est stockée dans le circuit. Il s'agit de l'énergie du champ magnétique créé par le circuit.

III] Inductance mutuelle

1. Mise en évidence expérimentale

Plaçons deux bobines l'une à côté de l'autre, comme schématisé ci-dessous. La bobine ① est alimentée par une tension sinusoïdale, la bobine ② n'est pas alimentée.



Observons la tensions au bornes de la bobine 2 : On note l'apparition d'une tension aux bornes de la bobine ②, oscillant à la même fréquence que la tension imposée à la bobine ①, et d'amplitude d'autant plus grande que les bobines sont proches.

Le champ créé par la bobine ① a un flux à travers la bobine ② non-nul et qui dépend du temps, d'où un phénomène d'induction dont on mesure la force électromotrice induite.

On dit qu'il y a **couplage inductif** entre les deux bobines.

2. Coefficient d'inductance mutuelle

Considérons le cas plus général où les deux bobines ① et ② sont parcourues toutes les deux par des courants $\boldsymbol{i_1}$ et $\boldsymbol{i_2}$, et créent chacun un champ magnétique. On suppose qu'il n'y a pas d'autre champ extérieur.

Ainsi, le flux magnétique total à travers la bobine ① s'écrit :

$$\boldsymbol{\Phi_{tot\to1}} = \underbrace{\boldsymbol{\Phi_{1\to1}}}_{\boldsymbol{\Phi_P}} + \boldsymbol{\Phi_{2\to1}}$$

Le flux $\boldsymbol{\Phi_{2\to1}}$ créé par une bobine ② au travers d'une bobine ① est proportionnel au courant $\boldsymbol{i_2}$ par la relation :

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi_{2\to1}} = \boldsymbol{M i_2}}$$

Le coefficient $\boldsymbol{M}$ est appelé **inductance mutuelle** ou **coefficient d'induction mutuelle**.

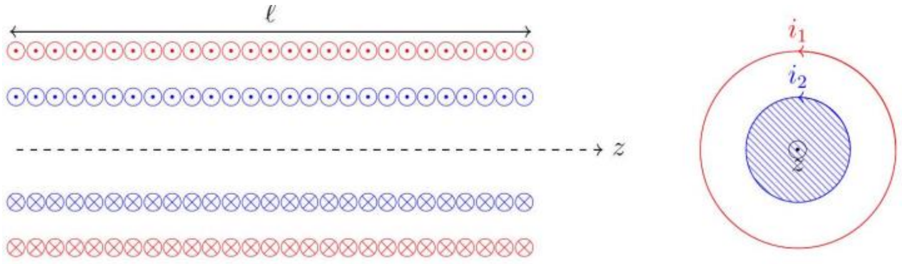
Remarques :

- *Le coefficient $\boldsymbol{M}$ dépend de la géométrie et de la position relative des deux bobines, mais est indépendant des courants qui parcourent les bobines*
- *Le coefficient $\boldsymbol{M}$ peut être positif ou négatif, en fonction des conventions d'orientation choisies.*
- *L'inductance mutuelle s'exprime en Henry : $[\boldsymbol{M}] = \boldsymbol{H}$.*
- *Le théorème de Neumann (admis) énonce que les deux coefficients d'inductance mutuelle entre $\boldsymbol{\Phi_{1\to2}}$ et $\boldsymbol{i_1}$ et entre $\boldsymbol{\Phi_{2\to1}}$ et $\boldsymbol{i_2}$ sont égales :*

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi_{1\to2}} = \boldsymbol{M i_1} \\ \boldsymbol{\Phi_{2\to1}} = \boldsymbol{M i_2} \end{cases}$$

Application : *Solénoïdes imbriqués.*

On cherche à établir l'expression du coefficient d'inductance mutuelle M entre deux solénoïdes 1 et 2 de même axe (Oz), de grande longueur ℓ, de surfaces S_1 et $S_2 < S_1$, et possédant respectivement N_1 et N_2 spires. Ils sont imbriqués l'un dans l'autre, comme schématisé ci-dessous. Ils sont parcourus par des courants i_1 et i_2.



1) *Indiquer les vecteurs surfaces des deux bobines et exprimer le champ créé à l'intérieur de chaque bobine. (cf. application précédente).*

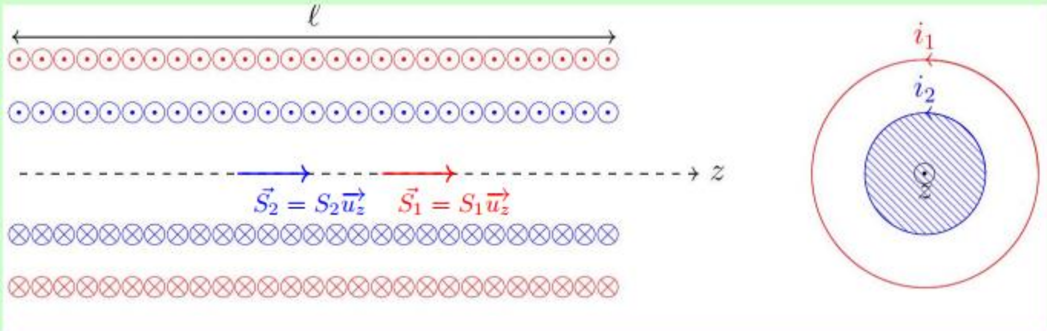
2) *Exprimer le flux magnétique $\Phi_{1\to 2}$ de $\overrightarrow{B_1}$ à travers la deuxième bobine et $\Phi_{2\to 1}$ de $\overrightarrow{B_2}$ à travers la première bobine. En déduire l'expression de l'inductance mutuelle M.*

3) *On change l'orientation de la deuxième bobine, calculer l'un des deux flux précédents. Quel est la conséquence du changement d'orientation d'une des deux bobines ?*

4) *Dans quel cas à t'on $M = \sqrt{L_1 L_2}$? On parle d'influence totale.*

Correction :

1.



Le champ créé par les bobines est $\overrightarrow{B_1} = \mu_0 n_1 i_1 \overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{B_2} = \mu_0 n_2 i_2 \overrightarrow{u_z}$.

2. On a $\varphi_{1\to 2} = \overrightarrow{B_1}\cdot N_2\overrightarrow{S_2} = \mu_0 n_1 N_2 i_1 S_2 = \mu_0 \dfrac{N_2 N_1 S_2}{\ell} i_1$, et $\varphi_{2\to 1} = \overrightarrow{B_2}\cdot N_1\overrightarrow{S_2} = \mu_0 n_2 N_1 i_2 S_2 = \mu_0 \dfrac{N_2 N_1 S_2}{\ell} i_2$.

L'inductance mutuelle vaut alors $M = \mu_0 \dfrac{N_2 N_1 S_2}{\ell}$.

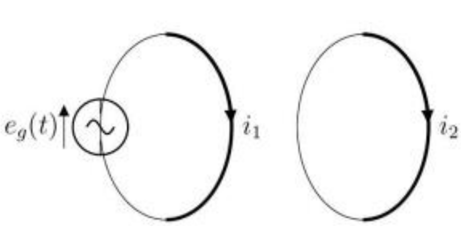
3. Si on considère la nouvelle orientation proposée, on a $\varphi_{1\to 2} = \overrightarrow{B_1}\cdot N_2\overrightarrow{S_2} = -\mu_0 n_1 N_2 i_1 S_2 = -\mu_0 \dfrac{N_2 N_1 S_2}{\ell} i_1$.

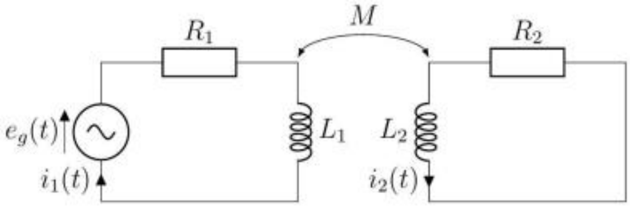
Dans ce cas, les flux deviennent négatifs et l'inductance mutuelle devient négative $M = -\mu_0 \dfrac{N_2 N_1 S_2}{\ell}$.

3. Circuit couplés par inductance mutuelle, bilan de puissance

Application : *Circuits couplés par mutuelle induction*

On considère l'ensemble des deux circuits couplés par mutuelle induction, on notera M le coefficient d'inductance mutuelle entre les deux circuits. Le circuit 1, d'inductance propre L_1 et de résistance R_1 est alimenté par un générateur qui impose une tension sinusoïdale : $e_g(t) = E\cos(\omega t)$. Le circuit 2 est d'inductance propre L_2 et de résistance R_2, cf. schéma :





1) *Comment peut-il exister un courant dans le deuxième circuit en l'absence de générateur ?*
2) *Exprimer le flux total $\boldsymbol{\Phi_{tot\to 1}}$ à travers le circuit $\mathbf{1}$ en fonction de $\boldsymbol{L_1}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{i_1}$ et $\boldsymbol{i_2}$. Appliquer la loi de Faraday pour en déduire la force électromotrice induite $\boldsymbol{e_{ind}}$ dans ce circuit.*
3) *Faire de même dans le circuit $\mathbf{2}$.*
4) *Représenter le circuit électrique équivalent faisant intervenir les générateurs fictifs.*
5) *Etablir le système de deux équations différentielles couplées vérifiées par $\boldsymbol{i_1}$ et $\boldsymbol{i_2}$.*
6) *Etablir le bilan de puissance en multipliant les équations couplées par respectivement $\boldsymbol{i_1}$ et $\boldsymbol{i_2}$.*

Correction :

1. Il existe un courant variable dans le circuit 1 donc il y a une f.e.m induite dans le circuit 2 permettant l'existence d'un courant.

2. $\varphi_{\text{tot1}} = \varphi_{1,p} + \varphi_{2\to 1} = L_1 i_1 + M i_2$.

La f.é.m. induite dans ce circuit est alors, d'après la loi de Faraday :

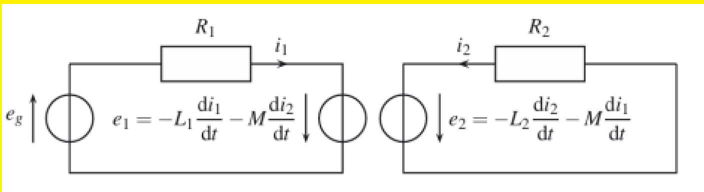
$$e_1(t) = -\frac{\mathrm{d}\varphi_{\text{tot1}}}{\mathrm{d}t} \quad \text{soit} \quad e_1(t) = -L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

3. De même, dans le circuit 2 , $\varphi_{\text{tot2}} = \varphi_{2,p} + \varphi_{1\to 2} = L_2 i_2 + M i_1$.

La f.é.m. induite dans ce circuit est alors, d'après la loi de Faraday :

$$e_2(t) = -\frac{\mathrm{d}\varphi_{\text{tot2}}}{\mathrm{d}t} \quad \text{soit} \quad e_2(t) = -L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

4.



5. On écrit ensuite les équations vérifiées par les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$ en appliquant la loi des mailles dans chacun des circuits :

$$\begin{cases} e_g(t) - R_1 i_1(t) + e_1(t) = 0 \\ e_2(t) - R_2 i_2(t) = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} e_g(t) = R_1 i_1(t) + L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ 0 = R_2 i_2(t) + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

1. Multiplions les équations du système obtenu ex 6 par $i_1(t)$ et $i_2(t)$ respectivement :

$$\begin{cases} e_g(t)\cdot i_1(t) = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\cdot i_1(t) + M\frac{\mathrm{d}i_2}{dt}\cdot i_1(t) + R_1 i_1^2(t) \\ 0 = L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\cdot i_2(t) + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\cdot i_2(t) + R_2 i_2^2(t) \end{cases}$$

Additionnons ces équations :

$$e_g(t)\cdot i_1(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1(t)^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2(t)\right) + \underbrace{M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\cdot i_2(t) + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\cdot i_1(t)}_{=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M i_1(t) i_2(t))} + R_1 i_1^2(t) + R_2 i_2^2(t),$$

soit :

$$e_g(t)\cdot i_1(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2}L_2 i_2^2(t) + M i_1(t)\cdot i_2(t)\right) + R_1 i_1^2(t) + R_2 i_2^2(t)$$

Cette égalité fait apparaître deux puissances interprétables :

— $\mathcal{P}_g(t) = e_g(t)\cdot i(t)$ est la puissance cédée par le générateur,

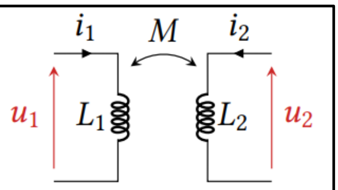
— $\mathcal{P}_{\text{Joule}}(t) = R_1 i_1^2(t) + R_2 i_2^2(t)$ est la puissance perdue par effet Joule dans les deux circuits.

Ainsi :

$$\mathcal{P}_g(t) - \mathcal{P}_{\text{Joule}}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2}L_2 i_2^2(t) + M i_1(t)\cdot i_2(t)\right)$$

Le membre de droite de cette équation s'interprète en disant que le circuit stocke de l'énergie. Si l'énergie apportée par le générateur est supérieure à l'énergie dissipée par effet Joule, la différence est stockée dans le circuit.

Généralisation : en présence de couplage inductif, les lois de comportement des bobines ne s'écrivent pas sous la forme habituelle ($\boldsymbol{u = L\frac{di}{dt}}$) mais impliquent les intensités dans les deux circuits couplés :



$$\boldsymbol{u_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}} \quad et \quad \boldsymbol{u_2 = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}}$$

4. Applications

Puces RFID : C'est une méthode permettant la transmission à distance d'informations placées sur de petits marqueurs (étiquettes adhésives, puces sans contact, étiquettes antivol, ...). Lorsque l'étiquette passe près d'un lecteur, qui est un système actif fournissant un champ magnétique, un courant circule dans le circuit et permet d'alimenter une petite antenne qui peut alors envoyer l'information contenue dans la puce.

Les utilisations des puces RFID sont multiples : Antivols, forfaits de ski, badges de télépéage…

Boucle magnétique : Elle se trouve généralement aux feux rouges, ou devant des barrières de parking souterrain. Il s'agit d'une spire conductrice située dans le sol. Quand un véhicule s'arrête sur la boucle, il crée par couplage un courant induit dans la boucle magnétique qui peut ainsi détecter la présence du véhicule.

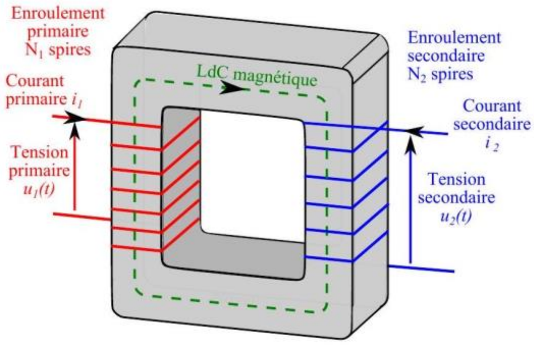
Rechargement par induction : Pour les brosses à dent, ou plus récemment les téléphones portables, on peut transmettre sans contact l'énergie électrique d'un générateur vers le système à recharger. Chacun est muni d'une bobine.

Transformateurs : Dispositifs permettant d'élever ou d'abaisser les tensions en régime alternatif. Ils sont utilisés en amont et aval des lignes à hautes tensions mais aussi en en électronique pour isoler un circuit de la masse d'un générateur.

5. Transformateur

Un **transformateur** est un dispositif qui permet de **modifier l'amplitude** (ou la valeur efficace) **de tensions** et de **courants alternatifs**.

Un tel dispositif est constitué d'enroulements en fil de cuivre, bobinés autour d'un circuit magnétique.



L'**enroulement primaire** est constitué de $\boldsymbol{N_1}$ spires identiques, la tension à ses bornes est $\boldsymbol{u_1(t)}$ et est parcouru par un courant d'intensité $\boldsymbol{i_1(t)}$, défini en convention récepteur.

L'**enroulement secondaire** est constitué de $\boldsymbol{N_1}$ spires identiques, la tension à ses bornes est $\boldsymbol{u_2(t)}$ et est parcouru par un courant d'intensité $\boldsymbol{i_2(t)}$, défini en convention récepteur.

Le **circuit magnétique** sert à **canaliser les lignes de champ magnétique** de façon à ce que le flux magnétique $\boldsymbol{\Phi}$ qui traverse une spire du primaire soit le plus proche possible de celui qui traverse une spire du secondaire.

Application : *Modèle simplifié du transformateur.*

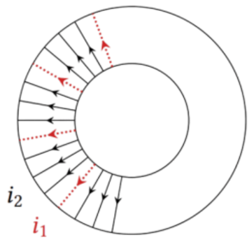
On considère un transformateur toroïdale constitué de deux bobinages en influence totale avec $\boldsymbol{N_2 = 3N_1}$ (cf. schéma).

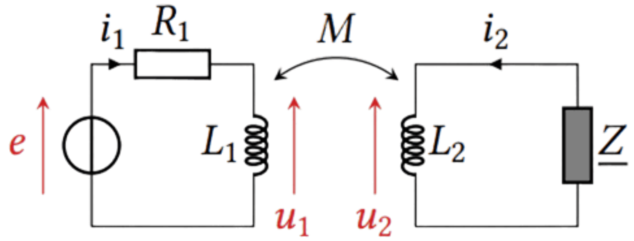
Les inductances $\boldsymbol{L_1}$, $\boldsymbol{L_2}$ et $\boldsymbol{M}$ dépendent des nombres de spires par des résultats voisins de ceux établis pour les solénoïdes imbriqués :

$$\boldsymbol{L_1 = \mu_0 {N_1}^2 \lambda \qquad L_2 = \mu_0 {N_2}^2 \lambda \qquad M = \mu_0 N_1 N_2 \lambda}$$

où $\boldsymbol{\lambda}$ est une constante homogène à une longueur caractérisant la géométrie du transformateur.

Une tension sinusoïdale $\boldsymbol{e(t) = E\cos(\omega t)}$ est imposée au primaire au travers d'une résistance $\boldsymbol{R_1}$. Le secondaire sert à alimenter une charge d'impédance $\boldsymbol{\underline{Z}}$.





1) *Exprimer en régime sinusoïdale forcé les lois de comportement aux bornes des bobines couplées par induction mutuelle (en convention recepteur).*

2) *Déterminer le rapport de transformation $\boldsymbol{m = \frac{\underline{U_2}}{\underline{U_1}}}$, lorsque le secondaire est en sortie ouverte.*

3) *Déterminer l'impédance d'entrée du transformateur, c'est-à-dire l'impédance équivalente vue du primaire, lorsqu'il débite dans une charge $\boldsymbol{\underline{Z}}$ quelconque.*

Correction :

1 Lois de comportement en complexe :

$$\underline{U_1} = jL_1\omega\,\underline{I_1} + jM\omega\,\underline{I_2} \qquad \text{et} \qquad \underline{U_2} = jL_2\omega\,\underline{I_2} + jM\omega\,\underline{I_1}$$

2 En sortie ouverte $\underline{I_2} = 0$ donc on a directement

$$m = \frac{\underline{U_2}}{\underline{U_1}} = \frac{M}{L_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

Un transformateur peut amplifier ou atténuer une tension, selon le nombre de spires des enroulements.

3 Par définition, $\underline{Z_e} = \underline{U_1}/\underline{I_1}$. L'idée est donc d'exprimer $\underline{I_2}$ en fonction de $\underline{I_1}$ et/ou $\underline{U_1}$ puis d'utiliser la loi de comportement de la bobine ①. Par la loi des mailles dans le circuit secondaire,

$$\underline{U_2} + \underline{Z}\,\underline{I_2} = 0$$

et en reprenant la loi de comportement en complexe pour la bobine ②,

$$-\underline{Z}\,\underline{I_2} = jL_2\omega\,\underline{I_2} + jM\omega\,\underline{I_1} \qquad \text{soit} \qquad \underline{I_2} = -\frac{jM\omega}{\underline{Z} + jL_2\omega}$$

d'où

$$\underline{U_1} = \underbrace{\left[jL_1\omega + \frac{(M\omega)^2}{\underline{Z} + jL_2\omega}\right]}_{=\underline{Z_e}}\underline{I_1}\,.$$