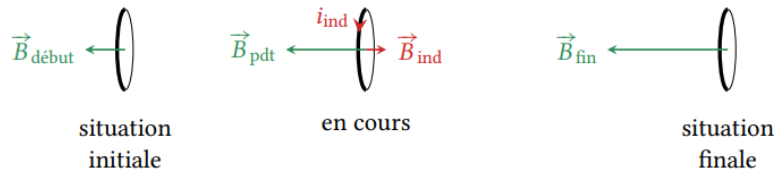


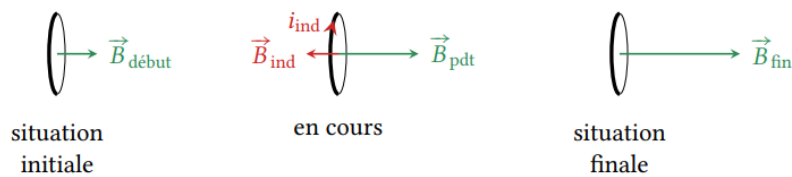
□ **Exercice 29.1. Signe du courant induit ★ (loi de Lenz)**

1 Le sens réel du courant indiqué sur le schéma central est celui de la flèche indiquant le sens positif, donc $i_{\text{ind}} > 0$.



2 La physique est identique à la situation précédente, seule change la convention sur le sens positif du courant : on déduit immédiatement $i < 0$.

3 Le sens réel du courant est opposé au sens positif, donc $i_{\text{ind}} < 0$.



□ **Exercice 29.2. Mesure d'une inductance mutuelle ★★ (couplage inductif, RSF)**

1 La bobine 2 n'est reliée qu'à un oscilloscope, donc $i_2 = 0$. En prenant en compte l'induction mutuelle, la loi de comportement devient

$$u_2 = L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = M \frac{di_1}{dt},$$

puis d'après la loi d'Ohm on a simplement

$$u_2 = \frac{M}{R} \frac{du_1}{dt}.$$

2 On a

$$u_1(t) = U_1 \cos(2\pi ft) \quad \text{d'où} \quad u_2 = -2\pi f \frac{M}{R} \sin(\omega t) = 2\pi f \frac{M}{R} \cos\left(2\pi ft + \frac{\pi}{2}\right)$$

d'où

$$M = \frac{R U_2}{2\pi f U_1} = 1,3 \text{ mH}.$$

On peut aussi travailler en représentation complexe,

$$\underline{U}_2 = j\omega \frac{M}{R} \underline{U}_1 \quad \text{d'où} \quad M = \frac{R |\underline{U}_2|}{2\pi f |\underline{U}_1|}.$$

3 ▶ Lorsque la bobine 2 est tournée de 180° , elle retrouve exactement la configuration géométrique de départ excepté le sens de branchement des fils, qui est inversé : on mesure alors $u'_2 = -u_2$, et le même calcul que précédemment montre que **M change de signe mais |M| est inchangée**.

▶ Lorsque la bobine est tournée de 90° , beaucoup moins de lignes du champ magnétique créé par la bobine 1 peuvent traverser la bobine 2, si bien que le flux $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ est nettement diminué à courant i_1 fixé, ce qui veut dire que **M est plus faible**.

▶ Au contraire, si la bobine 2 est placée sur le même axe que la bobine 1 alors davantage de lignes de champ issues de la bobine 1 traversent la bobine 2, donc le flux $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ est plus élevé à courant i_1 fixé, donc **M est plus grande**.

□ Exercice 29.3. Réponse à un échelon de circuits couplés ★★ (couplage inductif, transitoire)

1 En tenant compte du couplage inductif dans la loi de comportement de la bobine,

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + r_1 i_1 \\ u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + r_2 i_2 \end{cases}$$

2 Le schéma complet est représenté figure 1, en utilisant la représentation de Thévenin du générateur, dont la fém e passe alternativement de 0 à E , en restant constante par morceaux.

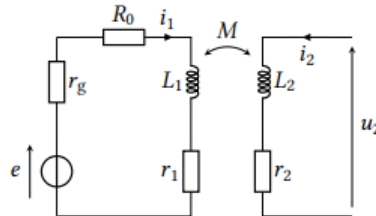


Figure 1 – Schéma du montage complet.

Le circuit secondaire est ouvert implique qu'il n'y a pas de courant : $i_2 = 0$. La loi des mailles appliquée au circuit primaire pour $t > 0$ donne alors

$$e = (r_g + R_0 + r_1)i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt},$$

d'où on déduit l'équation différentielle

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{r_g + R_0 + r_1}{L_1} i_1 = \frac{e}{L_1}.$$

On constate sur la figure donnée que la tension u_0 tend vers 0, qui est la solution particulière de l'équation différentielle ci-dessus : on en déduit que la portion de créneau étudiée est ici descendante, donc $e = 0$. Pour la partie de courbe sur laquelle la tension varie, l'équation différentielle est donc

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{r_g + R_0 + r_1}{L_1} i_1 = 0.$$

3 À un facteur R_0 près, la courbe donnée est l'image du courant i_1 dans le circuit primaire. L'équation différentielle fait apparaître un temps caractéristique $\tau = L_1 / (r_g + R_0 + r_1)$, et la tension u est donc de la forme

$$u(t) = U_0 e^{-t/\tau}.$$

Au bout d'une durée τ après l'échelon, 63 % de la variation de courant a déjà eu lieu, donc

$$u(t=\tau) = 0,37 U_0 \approx 3,4 \text{ V}.$$

Tenant compte du fait que l'échelon n'est pas imposé à $t = 0$ mais au bout de 1,3 ms, on lit graphiquement

$$\tau \approx 2,5 - 1,3 = 1,2 \text{ ms}$$

d'où on déduit

$$L_1 = (r_g + R_0 + r_1)\tau = 200 \text{ mH}.$$

4 Le circuit secondaire étant ouvert, l'équation la loi des mailles écrite à la première question se simplifie en

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt}.$$

Pour $t < 0$, i_1 est nul donc u_2 aussi, et pour $t > 0$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} = \frac{M}{R_0} \frac{du}{dt} = -\frac{M}{\tau R_0} U_0 e^{-t/\tau} = -\frac{M}{L_1} \frac{r_g + R_0 + r_1}{R_0} U_0 e^{-t/\tau}$$

Numériquement,

$$\frac{M}{L_1} = 0,5 \quad \text{et} \quad \frac{r_g + R_0 + r_1}{R_0} = 1,65.$$

Sachant que $U_0 = 9 \text{ V}$, on en déduit

$$u_2(t=0^+) = -7,4 \text{ V},$$

ce qui permet de construire le tracé.

□ **Exercice 29.4. Circuits LC couplés par mutuelle ★★ (couplage inductif, oscillateur)**

1 La tension aux bornes de L_1 orientée en convention récepteur s'écrit

$$u_{L1} = L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = LC \frac{d^2 u_{C1}}{dt^2} + MC \frac{d^2 u_{C2}}{dt^2}$$

La loi des mailles dans le circuit 1 s'écrit alors

$$u_{L1} + u_{C1} = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{LC \frac{d^2 u_{C1}}{dt^2} + MC \frac{d^2 u_{C2}}{dt^2} + u_{C1} = 0.}$$

La même démarche dans le circuit 2 en permutant les indices conduit à

$$\boxed{LC \frac{d^2 u_{C2}}{dt^2} + MC \frac{d^2 u_{C1}}{dt^2} + u_{C2} = 0.}$$

2 En sommant ces deux équations on obtient

$$(L + M)C \frac{d^2 \Sigma}{dt^2} + \Sigma = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{d^2 \Sigma}{dt^2} + \omega_1^2 \Sigma = 0.}$$

En prenant la différence,

$$(L - M)C \frac{d^2 \Delta}{dt^2} + \Delta = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{d^2 \Delta}{dt^2} + \omega_2^2 \Delta = 0.}$$

3 Il faut bien sûr passer par la résolution des deux équations précédentes.

• **Forme des solutions** : ce sont des équations d'oscillateurs harmoniques dont les solutions s'écrivent

$$\Sigma(t) = A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t) \quad \text{et} \quad \Delta(t) = A' \cos(\omega_2 t) + B' \sin(\omega_2 t)$$

où les constantes A, A', B et B' dépendent des conditions initiales.

• **Conditions initiales** : continuité des tensions aux bornes des condensateurs et des courants dans les bobines, d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{C1}(0^+) = U_0 \\ u_{C2}(0^+) = 0 \\ \frac{du_{C1}}{dt}(0^+) = \frac{i_1(0^+)}{C} = 0 \\ \frac{du_{C2}}{dt}(0^+) = \frac{i_2(0^+)}{C} = 0 \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma(0^+) = U_0 \\ \Delta(0^+) = U_0 \\ \frac{d\Sigma}{dt}(0^+) = 0 \\ \frac{d\Delta}{dt}(0^+) = 0 \end{array} \right.$$

• **Détermination des constantes** : par identification,

$$A = A' = U_0 \quad \text{et} \quad B = B' = 0$$

• **Conclusion** : en réexprimant u_{C1} en fonction de Σ et Δ , on obtient

$$u_{C1}(t) = \frac{1}{2}(\Sigma + \Delta) = \frac{U_0}{2} (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t))$$

soit en factorisant les cosinus

$$\boxed{u_{C1}(t) = U_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right).}$$

4 Un développement limité des définitions de ω_1 et ω_2 donne directement

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \times \frac{1}{(1 \pm M/L)^{1/2}} \simeq \omega_0 \left(1 \pm \frac{M}{2L}\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{\beta = \frac{M}{2L}.}$$

5 On en déduit

$$u_{C1}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t) \cos(\beta\omega_0 t).$$

Comme $\beta \ll 1$, la période du second cosinus est largement supérieure à celle du premier. On peut deux interpréter u_{C1} comme un signal quasi-harmonique de pulsation ω_0 dont l'amplitude $U_0 \cos(\beta\omega_0 t)$ varie lentement à la pulsation $\beta\omega_0$. Cela conduit à l'allure de la figure 2.

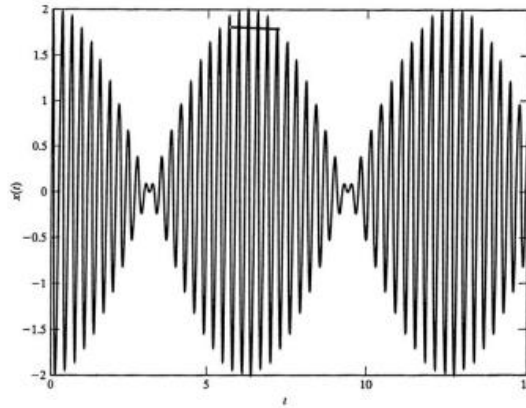


Figure 2 – Battements.

□ Exercice 29.5. Plaque de cuisson à induction ★★★ (couplage inductif, RSF, puissance)

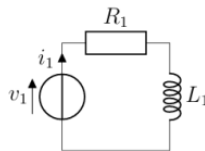
1 L'inducteur étant alimenté par une tension sinusoïdale, on peut utiliser la notation complexe : $\underline{v}_1 = (L_1 j\omega + R_1) \underline{i}_1$

En module : $V_{1m} = \sqrt{R_1^2 + (L_1\omega)^2} I_{1m}$

Les valeurs efficaces sont reliées aux amplitudes par : $V_{1, \text{eff}} = \frac{V_{1,m}}{\sqrt{2}}$ et $I_{1, \text{eff}} = \frac{I_{1,m}}{\sqrt{2}}$

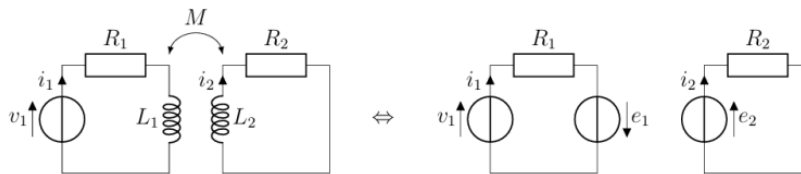
Ainsi $V_{1, \text{eff}} = \sqrt{R_1^2 + (L_1\omega)^2} I_{1, \text{eff}} \Leftrightarrow \left(\frac{V_{1, \text{eff}}}{I_{1, \text{eff}}}\right)^2 = R_1^2 + (L_1\omega)^2$

Ainsi : $L_1 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{V_{1, \text{eff}}}{I_{1, \text{eff}}}\right)^2 - R_1^2} = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\left(\frac{V_{1, \text{eff}}}{I_{1, \text{eff}}}\right)^2 - R_1^2} = 3,0 \cdot 10^{-5} \text{H} = 30 \mu\text{H}$



2 Numériquement : $L_1 \times 2\pi f = 4,7\Omega \gg R_1$ De même : $L_2 \times 2\pi f = 3,8 \cdot 10^{-2}\Omega \gg R_2$ (approximation un peu forte)

3 Voir ci-dessous



4 — Fem induite dans le premier circuit : $e_1 = -\frac{d\varphi_1}{dt}$, avec $\varphi_1 = L_1 i_1 + M i_2$, donc $e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$

Loi des mailles dans le premier circuit : $v_1 - R_1 i_1 + e_1 = 0$, soit $v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$

— Fem induite dans le deuxième circuit : $e_2 = -\frac{d\varphi_2}{dt}$, avec $\varphi_2 = L_2 i_2 + M i_1$, donc $e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$

Loi des mailles dans le deuxième circuit : $e_2 - R_2 i_2 = 0$, soit $0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$

5 En RSF, on utilise la notation complexe : $\begin{cases} \underline{v}_1 = (R_1 + L_1 j\omega) \underline{i}_1 + M j\omega \underline{i}_2 \\ 0 = (R_2 + L_2 j\omega) \underline{i}_2 + M j\omega \underline{i}_1 \end{cases}$

D'après la question précédente, on néglige les résistances, et on obtient : $\begin{cases} \underline{v}_1 = L_1 j\omega \underline{i}_1 + M j\omega \underline{i}_2 \\ 0 = L_2 j\omega \underline{i}_2 + M j\omega \underline{i}_1 \end{cases}$

Ainsi $\frac{i_2}{i_1} = -\frac{M}{L_2}$ et $\left| \frac{i_2}{i_1} \right| = \frac{|M|}{L_2} = 6,7 \cdot 10^{-2}$

6 La puissance dissipée par effet Joule dans l'inducteur s'écrit : $\mathcal{P}_{J1} = R_1 i_1^2$

$$\text{En moyenne : } \langle \mathcal{P}_{J1} \rangle = R_1 \underbrace{\langle i_1^2 \rangle}_{= I_{1, \text{eff}}^2}$$

$$\text{On impose } \langle \mathcal{P}_{J1} \rangle \leq \mathcal{P}_{\text{max}} = 50 \text{ W} \Leftrightarrow R_1 I_{1, \text{eff}}^2 \leq \mathcal{P}_{\text{max}} \Leftrightarrow I_{1, \text{eff}} \leq \sqrt{\frac{\mathcal{P}_{\text{max}}}{R_1}} = 53 \text{ A}$$

D'après la loi des mailles en complexe dans le circuit 1 : $\underline{v}_1 = L_1 j\omega i_1 + M j\omega i_2$

$$\text{Or } \underline{i}_2 = -\frac{M}{L_2} \underline{i}_1$$

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= L_1 j\omega i_1 - \frac{M^2}{L_2} j\omega i_1 \\ \underline{v}_1 &= \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) j\omega i_1 \\ |\underline{v}_1| &= \left| L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right| \omega |i_1| \\ V_{1m} &= \left| L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right| \omega I_{1m} \\ V_{1, \text{eff}} &= \left| L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right| \omega I_{1, \text{eff}} \end{aligned}$$

Ainsi pour être dans les conditions de sécurité demandées, il faut que : $V_{1, \text{eff}} < \left| L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right| \omega I_{1, \text{eff}} = 110 \text{ V}$
Enfin, la puissance électrique moyenne reçue par le fond de la casserole modélisée par le deuxième circuit et dissipée par effet Joule s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_{J2} \rangle &= R_2 \langle i_2^2 \rangle \\ &= R_2 I_{2, \text{eff}}^2 \\ &= R_2 \times \frac{M^2}{L_2^2} I_{1, \text{eff}}^2 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi au maximum : } \langle \mathcal{P}_{J2} \rangle = R_2 \times \frac{M^2}{L_2^2} I_{1, \text{eff}, \text{max}}^2 = 3,6 \cdot 10^5 \text{ W}$$