

## DM de physique MP2I → MPI

### Exercice 1 : Connaître son sol par décantation fractionnée (Mécanique)

Afin de mettre en place la bonne stratégie d'irrigation, le maraîcher doit d'abord connaître la composition de son sol qui est un mélange en proportions variables :

- d'argiles (particules de taille inférieure à  $2\ \mu\text{m}$ ) ;
- de limons (particules de taille comprise entre  $2\ \mu\text{m}$  et  $50\ \mu\text{m}$ ) ;
- de sables (particules de taille supérieure à  $50\ \mu\text{m}$ ).

Afin d'estimer grossièrement la composition d'un sol, les jardiniers ont souvent recours au « test du bocal » dont le protocole est défini ainsi :

#### Test du bocal

- Prélever un échantillon de terre dans le potager et remplir environ le tiers d'un grand bocal en verre de cette terre.
- Compléter le bocal au trois quart avec de l'eau et refermer-le hermétiquement.
- Agiter le bocal vigoureusement pendant trois minutes afin de former un mélange eau/terre homogène.
- Poser le bocal sur un meuble sans y toucher pendant 72 heures.

Après 72 heures de repos, le bocal ressemble à la **Figure 2**. On peut distinguer des strates de matériaux de différentes granulométries, les plus gros grains reposant au fond du bocal. En mesurant les épaisseurs respectives de chacune des strates, on peut alors déterminer les proportions de sables, limons et argiles de la terre récoltée. Dans la suite de cette partie, nous allons chercher un modèle permettant d'expliquer la stratification du contenu du bocal.

Le bocal est de section  $S$  et de profondeur  $p$ . On note respectivement  $\eta$  et  $\rho_e$  la viscosité dynamique et la masse volumique de l'eau.  $\eta$  et  $\rho_e$  sont supposées constantes. On définit le repère  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  lié au bocal. L'axe  $(Oz)$  est vertical descendant. L'interface du mélange terre/eau avec l'air dans le bocal correspond à la cote  $z = 0$ . On suppose que les particules minérales (sables, limons ou argiles) sont sphériques, de rayon  $r$  (qui dépend de la particule considérée), et qu'elles sont soumises, entre autres, à la force de frottement fluide  $\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v}$ , où  $\vec{v}$  est la vitesse des particules, et à la poussée d'Archimède dont l'énoncé historique peut se formuler ainsi : « Tout corps plongé dans un fluide au repos subit une force verticale de norme égale et opposée au poids du volume de fluide déplacé. »



**Figure 2** : résultat du « test du bocal » après 72 heures de décantation.

On note enfin  $\rho_0$  (avec  $\rho_0 > \rho_e$ ) la masse volumique des particules, supposée constante et identique pour toutes les particules.

- Q1.** Donner les expressions des trois forces s'exerçant sur une particule en mouvement durant la décantation.
- Q2.** A partir de la seconde loi de Newton, établir l'équation différentielle sur  $v_z$ , projection selon  $\vec{e}_z$  de la vitesse de la particule. Déterminer alors, en fonction de  $\rho_0, \rho_e, r, \eta$  et de l'accélération  $g$  de la pesanteur, la vitesse limite  $\vec{v}_l = v_l \cdot \vec{e}_z$  atteinte par ces particules. Quel est le signe de  $v_l$  ?
- Q3.** Introduire un temps caractéristique  $\tau_c$  que l'on exprimera en fonction de  $\rho_0, r$  et de  $\eta$ , puis donner la solution  $v_z(t)$  de l'équation différentielle en supposant qu'initialement  $v_z(t=0) = 0$ .

On appelle temps de sédimentation noté  $\tau_s$  la durée nécessaire pour qu'une particule initialement à  $z = 0$  se retrouve au fond du bocal, c'est-à-dire en  $z = p$ .

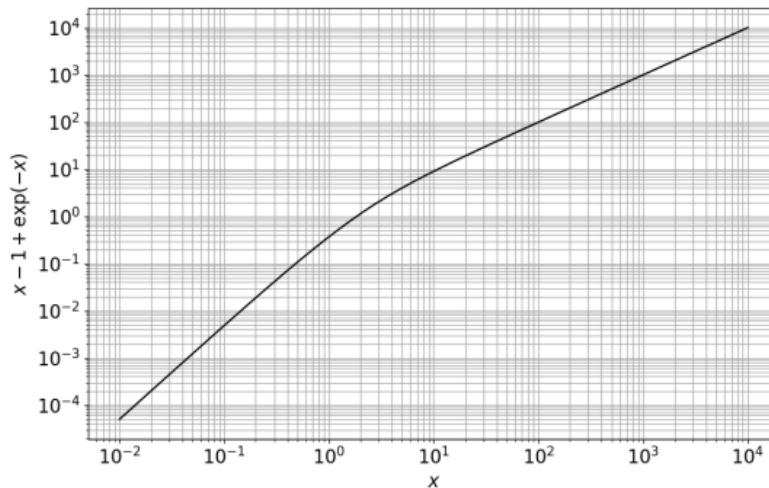
- Q4.** Déterminer l'évolution de  $z(t)$  en supposant une particule initialement à la surface  $z(t=0) = 0$  avec une vitesse nulle  $v_z(t=0) = 0$ .
- Q5.** Montrer que le temps de sédimentation  $\tau_s$  est à chercher comme solution de l'équation :

$$v_l[\tau_s + \tau_c\{\exp(-\tau_s/\tau_c) - 1\}] = p$$

On ne cherchera pas à résoudre cette équation.

On donne **Figure 3** la représentation graphique, en échelle log-log, de la fonction

$$f : x \rightarrow x - 1 + \exp(-x)$$



**Figure 3** : représentation graphique de la fonction  $f$  en échelle log-log.

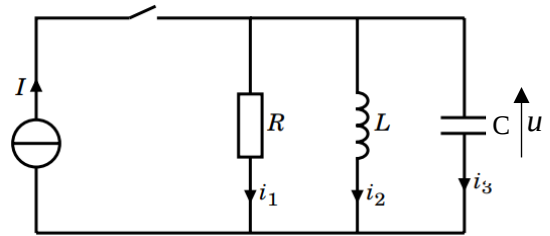
On récapitule également dans un tableau les valeurs de  $\tau_c$  et du rapport  $p/(v_l \tau_c)$  pour trois types de particules :

|                  | argiles ( $r = 1 \mu\text{m}$ ) | limons ( $r = 20 \mu\text{m}$ ) | sables ( $r = 2 \text{mm}$ ) |
|------------------|---------------------------------|---------------------------------|------------------------------|
| $\tau_c$ (en s)  | $2 \times 10^{-7}$              | $9 \times 10^{-5}$              | 0,9                          |
| $p/(v_l \tau_c)$ | $8 \times 10^{11}$              | $5 \times 10^6$                 | $5 \times 10^{-2}$           |

- Q6.** Déterminer graphiquement la valeur prise par  $\tau_s$  pour les sables  $r = 2 \text{ mm}$ .

**Exercice 2 : Etude d'un émetteur radio (Traitement du signal)**

L'antenne d'un émetteur radio peut être modélisée par un circuit électrique équivalent composé de l'association en parallèle d'une résistance  $R$ , d'une bobine d'inductance  $L$  et d'un condensateur de capacité  $C$ .



L'antenne est alimentée par une source idéale de courant. On s'intéresse à la réponse en tension  $u(t)$ .

Le première partie de l'exercice traite la réponse en régime libre de l'antenne. La deuxième, la réponse en régime sinusoïdal forcé.

**Partie 1 : Etude du régime libre**

La source idéale de courant délivre un courant constant  $I$ . A  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur.

Pour  $t < 0$ , aucun courant ne circule et le condensateur est déchargé.

- Q7.** Ecrire la loi des nœuds ainsi que les relations tension-courant de la résistance, du condensateur et de la bobine dans le circuit.
- Q8.** En dérivant par rapport au temps la loi des nœuds, obtenir l'équation différentielle du circuit sur  $u(t)$ . (On remarquera que  $\frac{dI}{dt} = 0$ ).
- Q9.** Identifier la pulsation propre  $\omega_0$ , le facteur de qualité  $Q$  et la constante  $f$  de la forme canonique ci-dessous. Commenter la dépendance en la résistance  $R$  de l'expression du facteur de qualité  $Q$ .

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = f$$

- Q10.** Déterminer les valeurs de  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  et  $u$  à  $t = 0^+$ .
- Q11.** En déduire les conditions initiales sur  $u(t = 0^+)$  et  $\frac{du}{dt}(t = 0^+)$ .
- Q12.** Dessiner le schéma électrique équivalent du circuit en régime permanent (on rappelle qu'en régime libre, le régime permanent est stationnaire). En déduire, les valeurs de  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  et  $u$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .
- Q13.** Déterminer la condition sur  $R$ ,  $L$  et  $C$  sous laquelle le régime transitoire est pseudo-périodique.
- Q14.** Pour ce régime, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (sur  $u(t)$ ) du circuit, on fera apparaître deux constantes d'intégrations  $A$  et  $B$ .
- Q15.** Appliquer les conditions initiales pour déterminer les constantes d'intégrations. Ecrire l'expression finale de  $u(t)$  et tracer son allure.

**Partie 2 : Etude du régime forcé**

La source idéale de courant délivre un courant  $\mathbf{i(t)} = \mathbf{Icos(\omega t)}$ , on s'intéresse au régime forcé, c'est-à-dire la réponse du circuit (toujours  $\mathbf{u(t)}$ ) une fois le régime transitoire terminé.

On rappelle l'expression de la représentation complexe d'une grandeur sinusoïdale :  $\underline{\mathbf{u(t)}} = \mathbf{Ue^{j(\omega t + \varphi)}} = \underline{\mathbf{U}}\mathbf{e^{j\omega t}}$ , avec  $\underline{\mathbf{U}} = \mathbf{Ue^{j\varphi}}$  l'amplitude complexe.

**Q16.** Rappeler les expressions des impédances complexes de la résistance  $\underline{\mathbf{Z_R}}$ , du condensateur  $\underline{\mathbf{Z_C}}$  et de la bobine  $\underline{\mathbf{Z_L}}$ .

**Q17.** Déterminer l'impédance complexe de l'association équivalente à l'antenne  $\underline{\mathbf{Z_{eq}}}$ . (sous forme d'une fraction).

**Q18.** Exprimer  $\underline{\mathbf{U}}$  en fonction de  $\underline{\mathbf{Z_{eq}}}$  et  $\underline{\mathbf{I}}$  puis montrer que l'on peut exprimer l'amplitude complexe de la tension  $\underline{\mathbf{U}}$  en fonction de  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  la pulsation réduite et de  $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$  le facteur de qualité selon l'expression :

$$\underline{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{RI}}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

**Q19.** Exprimer l'amplitude  $\mathbf{U}$  de la tension réelle  $\mathbf{u(t)} = \mathbf{Ucos(\omega t + \varphi)}$ . En déduire l'expression de la pulsation  $\omega_r = \omega_0$  qui maximise  $\mathbf{U}$  en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$  (On parle de phénomène de résonance).

**Q20.** Représenter l'allure du graphe de  $\mathbf{U}$  en fonction de  $x$ .

**Q21.** Les signaux radio **FM** sont transmis grâce à une technique appelée modulation de fréquence. Elle utilise une onde porteuse de fréquence  $f_0$ . Le signal à transmettre est contenu dans des variations de fréquence autour de  $f_0$ . Déterminer l'expression de la fréquence optimale  $f_0$  de la porteuse pour l'émetteur radio.

**Exercice 3 : Moteur à essence (Thermodynamique)**

On s'intéresse au fonctionnement d'une voiture Clio de la marque Renault dont les caractéristiques sont données dans le document 1.

**Document 1 - Caractéristiques techniques d'une Renault Clio**

| Moteur                                             |         |
|----------------------------------------------------|---------|
| Carburant                                          | Essence |
| Cylindrée (cm <sup>3</sup> )                       | 898     |
| Rapport de compression                             | 9,5:1   |
| Puissance maximale (ch)                            | 90      |
| Couple maximal (N · m)                             | 140     |
| Performances                                       |         |
| Vitesse maximale (km · h <sup>-1</sup> )           | 178     |
| 0 - 100 km · h <sup>-1</sup> (s)                   | 12,1    |
| Carburant                                          |         |
| Consommation à 100 km · h <sup>-1</sup> (L/100 km) | 10      |
| Volume du réservoir (L)                            | 45      |

**Tableau 1 - Caractéristiques de la voiture**Source : [www.renaultgroup.com](http://www.renaultgroup.com)

On définit le rapport volumétrique comme le rapport  $\delta = \frac{V_h}{V_b}$  et la cylindrée comme le volume total admis par l'ensemble des cylindres du moteur lors de la phase d'admission.

Le moteur à essence de cette voiture utilise un mélange air-essence modélisé par un cycle thermodynamique de Beau de Rochas. Ce cycle est constitué des phases successives suivantes :

- **0 → 1** : admission isobare et isotherme du mélange dans la chambre de combustion jusqu'au point mort haut de volume  $V_h$ . La quantité de matière de mélange admise sera notée  $n_e$  ;
- **1 → 2** : compression adiabatique réversible du mélange vers le point mort bas de volume  $V_b$  où le mélange est porté à une température de **614 K** ;
- **2 → 3** : combustion isochore du mélange qui atteint une température de **1 800 K** ;
- **3 → 4** : détente adiabatique réversible du mélange jusqu'au point mort haut où le mélange descend à une température de **879 K** ;
- **4 → 1** : ouverture de la soupape modélisée par un refroidissement isochore jusqu'à la température ambiante de **300 K** ;
- **1 → 0** : éjection isobare et isotherme du mélange jusqu'au point mort bas.

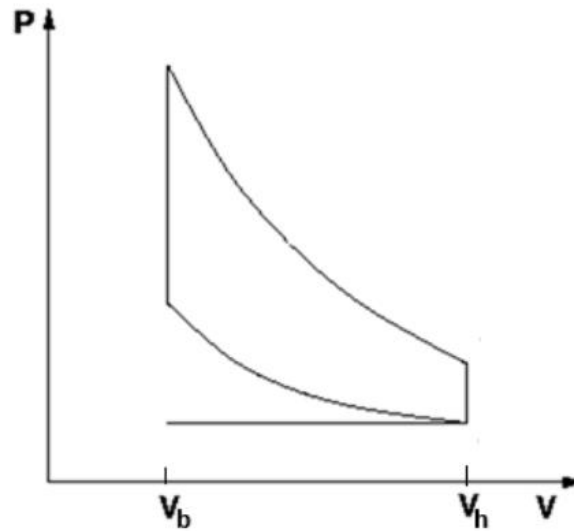
Pour simplifier l'étude, on assimile le mélange air-essence à un système fermé constitué d'une quantité de matière  $n_e$  d'un gaz parfait diatomique de coefficient isentropique  $\gamma$ , hors étapes d'admission et d'éjection. On notera {GP} ce système. On note respectivement  $W$ ,  $Q_c$  et  $Q_f$ , le travail reçu par le système de la part du rotor du moteur, le transfert thermique reçu par le système de la part de la source chaude et le transfert thermique reçu par le système de la part de la source froide sur un cycle. On note également d'un indice  $i$ , toute variable d'état associée à l'état  $i$ .

On rappelle que  $C_V = \frac{nR}{\gamma-1}$  et  $C_P = \frac{\gamma nR}{\gamma-1}$ .

**Q22.** Identifier les sources chaude et froide, et donner leurs températures.

**Q23.** Donner, en justifiant, les signes de  $Q_f$ ,  $Q_c$  et de  $W$ .

**Q24.** Recopier et compléter le diagramme de Watt ( $P, V$ ) ci-dessous en indiquant les différents états **1** à **4**, le sens de parcours du cycle et les transferts thermiques  $Q_f$  et  $Q_c$ . Commenter le sens de parcours du cycle représenté.



**Q25.** Exprimer  $Q_{2 \rightarrow 3}$ , le transfert thermique reçu par {GP} lors de la phase  $2 \rightarrow 3$ , en fonction notamment des températures  $T_2$  et  $T_3$ .

**Q26.** Exprimer  $Q_{4 \rightarrow 1}$ , le transfert thermique reçu par {GP} lors de la phase  $4 \rightarrow 1$ , en fonction notamment des températures  $T_1$  et  $T_4$ .

**Q27.** En écrivant le premier principe sur un cycle, exprimer le travail  $W$  en fonction notamment des températures  $T_1, T_2, T_3$  et  $T_4$ .

**Q28.** En déduire une expression du rendement du moteur  $\eta$  en fonction des températures  $T_1, T_2, T_3$  et  $T_4$ .

*On rappelle que pour une transformation adiabatique et réversible, la loi de Laplace s'écrit :  $PV^\gamma = C^{te}$*

**Q29.** Exprimer la température  $T_4$  en fonction de  $T_3, V_b, V_h$  et de  $\gamma$ .

**Q30.** Exprimer la température  $T_1$  en fonction de  $T_2, V_b, V_h$  et de  $\gamma$ .

**Q31.** En déduire l'expression de  $\eta$  en fonction de  $\delta$  et de  $\gamma$ . L'application numérique donne  $\eta = 0,59$ . On utilisera cette valeur pour la suite.

**Q32.** Établir l'expression du rendement de Carnot  $\eta_c$  associé à ce cycle. Faire l'application numérique et commenter.

**Q33.** Écrire le second principe de la thermodynamique sur un cycle

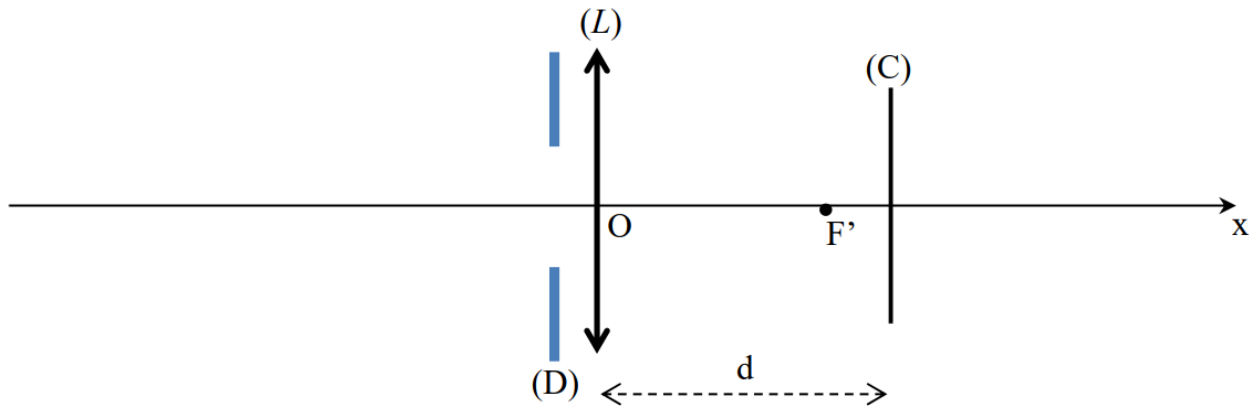
**Q34.** Exprimer l'entropie totale échangée  $S_e$  avec la source froide et la source chaude.

**Q35.** En déduire l'expression de l'entropie créée  $S_c$  sur un cycle.

**Exercice n°4 : Appareil photo (Optique géométrique)**

On modélise un appareil photo par l'association d'une lentille mince (L) de focale  $f' = \overline{OF'}$  appelée "objectif", d'un capteur (C) sur lequel on souhaite récupérer l'image et d'un diaphragme (D) placé devant la lentille.

La distance  $d$  entre la lentille (L) et le capteur (C) est réglable, grâce à un mécanisme lié à l'objectif, elle est comprise entre  $d_{min}$  et  $d_{max}$ .



À l'aide de cet appareil de focale  $f' = 50 \text{ mm}$ , on souhaite former sur le capteur l'image d'un arbre de hauteur  $h = 5 \text{ m}$  situé à une distance  $L = 20 \text{ m}$  devant l'objectif.

**Q36.** La lentille mince est utilisée dans les "conditions de Gauss".

- Préciser en quoi elles consistent.
- Quelle partie de l'appareil permet d'assurer que ces conditions sont remplies ?

**Q37.** Faire un schéma soigné de la situation en notant  $\overline{AB}$  l'objet et  $\overline{A'B'}$  son image sur le capteur (A est sur l'axe et  $\overline{AB}$  appartient à un plan orthogonal à l'axe). Positionner les foyers principaux et tracer au moins deux rayons lumineux issus de B pour justifier la position de l'image  $\overline{A'B'}$ .

**Q38.** Exprimer la taille  $\overline{A'B'}$  de l'image de l'arbre sur le capteur en fonction de  $h$ ,  $f'$  et  $L$  puis effectuer l'application numérique.

On pourra simplifier l'expression obtenue en considérant  $f' \ll L$ .

**Q39.** Quelle est la valeur de  $d$  lorsque l'objet est situé à l'infini ?

On souhaite obtenir une image de l'arbre sur le capteur plus grande sans changer de place (donc en gardant la même valeur pour  $L$ ). On change donc l'objectif et on le remplace par un objectif de focale  $f'_1 = 10 \text{ cm}$ . La distance  $d$  est toujours réglable.

**Q40. a.** Quelle sera la taille de l'image de l'arbre sur le capteur ?

**b.** Le capteur fait  $24 \text{ mm} \times 36 \text{ mm}$ , est-il possible de voir l'arbre en entier sur la photo obtenue ?

**Exercice n°5 : Les trous d'Young (Optique ondulatoire)**

En 1802, l'expérience dite des « trous d'Young » a permis de confirmer la nature ondulatoire de la lumière en réalisant une figure d'interférence lumineuse.

Une version moderne de cette expérience consiste à éclairer avec une lumière laser de longueur d'onde  $\lambda$  deux fentes parallèles distantes de  $a$  et d'épaisseurs très inférieures à  $a$ . Sur un écran situé à une distance  $D \gg a$ , on observe la lumière qui a traversé le système.

On fait l'hypothèse que le problème est invariant selon la direction des fentes et on travaille dans le plan  $(Oxy)$ . On note  $S_1$  et  $S_2$  les points des fentes appartenant à ce plan et  $O$  le milieu de ces points. On suppose que les ondes sont en phase en  $S_1$  et  $S_2$ .

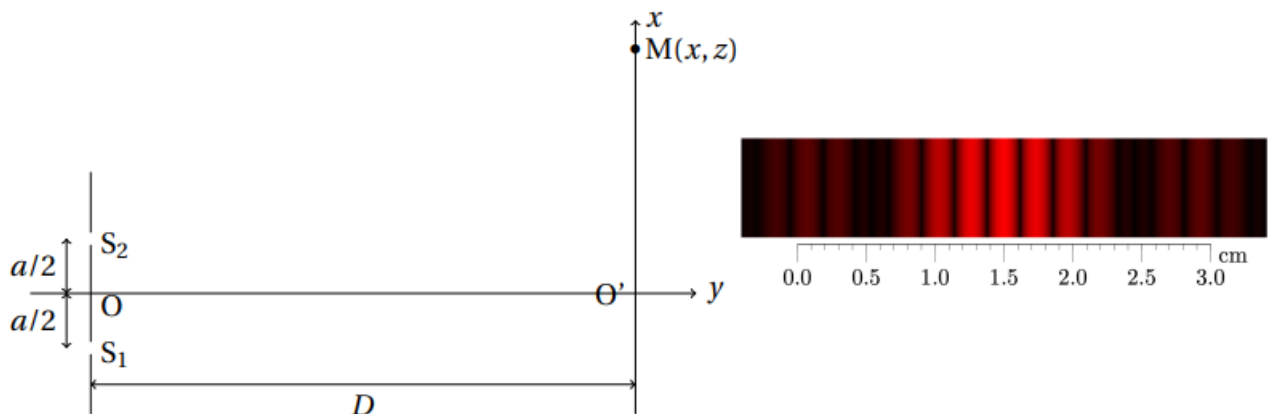
L'axe  $(Oy)$  est perpendiculaire au plan contenant les fentes, l'axe  $(O'x)$  se trouve sur l'écran, perpendiculaire à  $(Oy)$ . Les notations sont schématisées ci-dessous. Le point courant  $M$  est repéré par son ordonnée  $x$ .

La photographie ci-dessous reproduit ce qui est visualisé sur l'écran pour un laser de longueur d'onde  $\lambda = 633\text{nm}$  et une distance  $D = 1,20\text{m}$ .

Données :

- indice optique de l'air :  $n = 1$
- développement limité à l'ordre 1 au voisinage de  $X = 0$  (c'est-à-dire  $|X| \ll 1$ ) :

$$(1 + X)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}X$$



- Q41.** Exprimer la différence de marche en  $M$  en fonction de  $S_1M$ ,  $S_2M$  et  $n$ .
- Q42.** Exprimer les distances  $S_1M$  et  $S_2M$  en fonction de  $x$ ,  $z$ ,  $a$  et  $D$ . Effectuer un développement limité pour en déduire l'expression de la différence de marche  $\delta$  en fonction de  $x$ ,  $a$  et  $D$ .
- Q43.** Déterminer les abscisses  $x_k$  où les interférences sont constructives.
- Q44.** Déterminer les abscisses  $x_k'$  où les interférences sont destructives.
- Q45.** Donner la définition de l'interfrange  $i$ , établir son expression.
- Q46.** À l'aide de la photographie, déterminer la distance  $a$  entre les deux fentes.