

Introduction

Mettre en mouvement un circuit électrique dans un champ magnétique suffit pour y voir apparaître un courant électrique, et réciproquement imposer un courant dans un circuit plongé dans un champ magnétique permet de mettre en mouvement les parties mobiles du circuit.

On observe ainsi de nouvelles manifestations du phénomène d'induction qui permettent de transformer une puissance électrique en une puissance mécanique, et réciproquement. On dit qu'il y a couplage ou conversion électromécaniques.

Les applications sont multiples : tous les moteurs électriques reposent sur ces principes, de même que la production d'électricité dans toutes les centrales thermodynamiques.

I] Induction de Lorentz : Circuit en mouvement dans un champ stationnaire

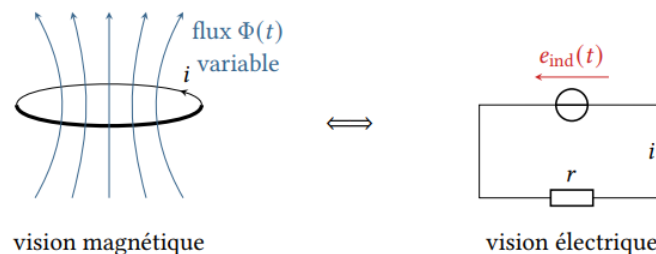
Dans de nombreuses situations pratiques, le mouvement du circuit (ou d'une partie du circuit) fait varier le flux magnétique au travers de celui-ci. Dans ce cas, la **loi de Faraday reste valable**.

Rappels :

Loi de Faraday : Les variations de flux magnétique Φ au travers d'un circuit fermé se modélisent électriquement par l'ajout d'un générateur induit dans le circuit, dont la force électromotrice induite e_{ind} est reliée au flux magnétique Φ au travers du circuit par :

$$e_{ind} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Le générateur induit doit être orienté en convention générateur par rapport à $\vec{z}$.



Loi de Lenz : Par leurs conséquences, les phénomènes d'induction tendent à atténuer leurs causes.

Cependant, il y a des **exceptions** (toujours signalées dans les exercices et au concours) ! Dans certaines géométries, le mouvement du circuit ne fait pas varier le flux au travers de celui-ci. Pourtant, il y apparaît bien une force électromotrice induite, mais celle-ci n'est pas donnée par la loi de Faraday. Pour la déterminer en PTSI, on utilise alors la conservation de la puissance :

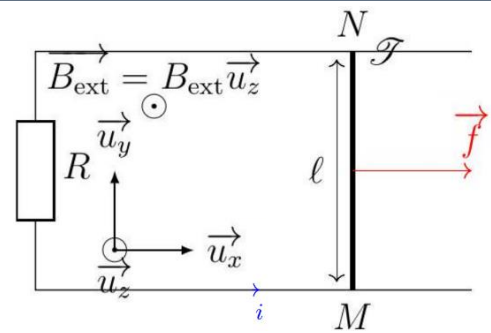
$$P_{Laplace} + e_{ind}i = 0$$

Remarques :

- Ces exceptions s'expliquent par le fait que la loi de Faraday n'est pas la « vraie » équation fondamentale. Il s'agit de l'équation de Maxwell-Faraday, l'une des quatre équations de Maxwell. La loi de Faraday se démontre à partir de l'équation de Maxwell-Faraday (vous le ferez l'an prochain), ce qui nécessite une hypothèse de circuit fixe dans le référentiel d'étude, d'où l'existence d'exceptions pour les circuits en mouvement.
- La loi de Lenz reste valable dans toutes les configurations.

II] Conversion électromécanique en translation**1. Conversion mécanique → électrique****Application : Rail de Laplace générateurs**

On considère le dispositif des rails de Laplace, dans lequel une tige de masse m , de longueur ℓ , conductrice, glisse sans frottement sur deux rails conducteurs, à la vitesse $\vec{v} = v\vec{U}_x$. Elle est tirée par une force $\vec{f} = f\vec{U}_x$ constante. La tige T reste toujours parallèle à $\vec{U}_y$ lors de son mouvement.



L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B\vec{U}_z$, orthogonal au plan des rails. La résistance de l'ensemble est notée R , supposée constante au cours du déplacement de la tige.

Equation électrique

- 1) Décrire les phénomènes mis en jeu lorsque la tige est mise en mouvement par la force $\vec{f}$.
- 2) Orienter le circuit.
- 3) Déterminer l'expression de la force électromotrice induite. On négligera l'auto-induction.
- 4) Représenter le circuit équivalent et en déduire l'expression de l'intensité du courant induit.

Equation mécanique

- 5) Déterminer l'expression de la force de Laplace qui s'exerce sur la tige.
- 6) Etablir l'équation mécanique.

Résolution du système

On obtient un système de deux équations différentielles couplées à deux inconnues $\dot{x}(t)$ et $i(t)$.

- 7) En combinant les deux équations précédentes, établir l'équation différentielle vérifiée par $\dot{x}(t)$.
- 8) La résoudre. Commenter.
- 9) En déduire l'évolution de l'intensité du courant. Commenter.

Bilan énergétique

- 10) Etablir le bilan de puissance suivant : $f\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) + Ri^2$

- 11) L'interpréter.

- 12) Exprimer la puissance de la force de Laplace ainsi que la puissance électrique de la force électromotrice induite. Interpréter leurs signes. Commenter.

Correction :

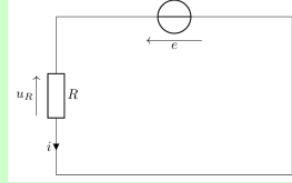
1. $\mathcal{T}$ est mise en mouvement par la force $\vec{f}$. Elle est en mouvement dans le champ magnétique dont elle coupe des lignes de champ donc il y a un phénomène d'induction : le flux du champ $\vec{B}_{\text{ext}}$ varie dans le temps, il apparaît une f.e.m et on observe l'apparition d'un courant induit dans le circuit. Dès lors, $\mathcal{T}$ est parcourue par un courant et plongée dans un champ magnétique, donc elle subit une force de Laplace. D'après la loi de Lenz, cette force de Laplace s'oppose à $\vec{f}$.

2. Voir schéma

3. On exprimer le flux induit $\varphi = \vec{B}_{\text{ext}} \cdot \vec{S} = B_{\text{ext}} \vec{u}_z \cdot \ell \times x \vec{u}_z = B_{\text{ext}} \times \ell \times x$.

On en déduit la f.e.m : $e = -\frac{d\varphi}{dt} = -B_{\text{ext}} \times \ell \dot{x}$.

4.



On a donc, d'après la loi des mailles : $e = u_R = R \times i \Rightarrow i = \frac{e}{R} = -\frac{B_{\text{ext}} \times \ell \dot{x}}{R}$. L'intensité est négative, ce qui est cohérent avec la loi de Lenz : le flux augmente au cours du temps, et la fem s'oppose à cette variation en créant un courant d'intensité i responsable d'un champ $\vec{B}$ induit dans le sens opposé à $\vec{B}_{\text{ext}}$, tendant à diminuer l'augmentation du flux.

5. La force de Laplace qui s'exerce sur la tige parcourue par l'intensité $i(t)$ de M vers N est :

$$\vec{f}_L = i(t) \vec{MN} \wedge \vec{B} = i(t) (\ell \vec{u}_y) \wedge (B_{\text{ext}} \vec{u}_z) = i(t) \ell B_{\text{ext}} \vec{u}_x$$

6. La tige $\mathcal{T}$ est soumise aux forces suivantes : la force de Laplace $\vec{f}_L = i(t) \ell B_{\text{ext}} \vec{u}_x$, la force de traction $\vec{f} = f \vec{u}_x$, le poids $m\vec{g} = -mg \vec{u}_z$, et la réaction des rails (de résultante normale au déplacement car $\mathcal{T}$ glisse sans frottement) $\vec{R} = R \vec{u}_z$. La loi de la quantité de mouvement, appliquée à la tige $\mathcal{T}$, en projection sur $\vec{u}_x$, mène à l'équation mécanique :

$$m \frac{dv}{dt} = i(t) \ell B_{\text{ext}} + f$$

7.

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = i(t) \ell B + f \\ B i(t) + R i(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \frac{dv}{dt} = i(t) \ell B + f \\ i(t) = -\frac{B \ell}{R} v(t) \end{cases} \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = -\frac{(B \ell)^2}{R} v(t) + f \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = -\frac{(B \ell)^2}{R} v + f$$

8. La vitesse $v(t)$ vérifie une équation différentielle du premier ordre que l'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v(t)}{\tau} = \frac{v_\infty}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{mR}{(B \ell)^2} \quad \text{et} \quad v_\infty = \frac{Rf}{(B \ell)^2}$$

τ est la constante de temps du système. La solution de cette équation est de la forme : $v(t) = v_\infty + \lambda \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ où λ est une constante. Supposons que la tige a une vitesse nulle à l'instant $t = 0$, alors $\lambda = -v_\infty$ et :

$$v(t) = v_\infty \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

9. On sait que

$$i = -\frac{\ell B_{\text{ext}}}{R} v = -\frac{\ell B_{\text{ext}}}{R} v_\infty \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

L'intensité du courant $i(t)$ est négative puis tend vers 0 au cours du temps.

10. L'équation électrique doit être multipliée par l'intensité et l'équation mécanique par la vitesse. On obtient des relations mettant en jeu des puissances.

$$\begin{cases} B i(t) v(t) + R i(t) v(t) = 0 \\ m \frac{dv}{dt} v(t) = i(t) \ell B v(t) + f v(t) \end{cases}$$

Dans ces deux équations apparaît un terme commun, $B i(t) v(t)$ que l'on peut appeler terme de couplage électromécanique. En éliminant ce terme entre les deux équations on obtient :

$$f v(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) + R i^2(t) \quad \text{soit} \quad \mathcal{P}(\vec{f}) = \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} + \mathcal{P}_{\text{Joule}}$$

en notant :

- $\mathcal{P}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v} = f v(t)$ la puissance fournie par la force $\vec{f}$,
- $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m v^2(t)$ l'énergie cinétique de $\mathcal{T}$,
- $\mathcal{P}_{\text{Joule}} = R i^2(t)$ la puissance dissipée par effet Joule dans le circuit.

11. Cette équation montre qu'une partie de la puissance mécanique fournie par la force de traction est transformée en puissance électrique consommée dans le circuit, où elle est dissipée par effet Joule.

12. — La puissance de la f.e.m. :

$$\mathcal{P}_{fem} = e(t) i(t) = -B i(t) v(t),$$

qui est positive (en effet : $i(t) < 0$ et $v(t) > 0$) puisque le dispositif fonctionne en générateur, — L'opposé de la puissance de la force de Laplace :

$$\mathcal{P}_L = \vec{f}_L \cdot \vec{v} = (i(t) \ell B \vec{u}_x) \cdot (v(t) \vec{u}_x) = B i(t) v(t)$$

qui est négative puisque la force de Laplace freine la tige.

On constate que ces deux puissances sont égales et opposées.

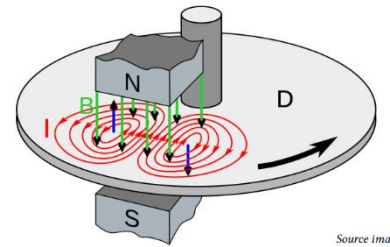
2. Freinage par induction : Courants de Foucault

Lorsqu'un **circuit** est **mobile dans un champ magnétique**, la variation du flux magnétique à travers le circuit est à l'origine de courants dont l'énergie peut être dissipée par effet Joule.

Généralisation : Un conducteur massif en mouvement dans un champ magnétique peut être décrit du point de vue de l'induction comme une spire de courant. Les courants électriques qui apparaissent par induction au sein du conducteur sont appelés **courants de Foucault**, les forces de Laplace dues aux courants de Foucault sont toujours des forces de freinage.

Exemple :

Des systèmes de freinage à courants de Foucault sont utilisés notamment sur les véhicules poids lourds ou les autocars, où on les désigne sous le nom de « ralentisseurs » (ou par leur nom commercial « freins Telma »). Ces freins sont constitués d'électroaimants fixes (stator) induisant des courants de Foucault dans des disques conducteurs (rotor) entraînés par les roues.



La photo ci-contre représente le frein du train à grande vitesse japonais Shinkansen. Au lieu d'être dissipée par frottement, la puissance est dissipée par effet Joule dans le métal où apparaissent les courants. Cependant, le freinage étant produit par le mouvement des disques, il devient de moins en moins efficace au fur et à mesure que la vitesse diminue, et ne peuvent pas permettre l'arrêt complet. Des freins conventionnels à friction restent donc indispensables.

Vidéo sur le freinage dans un champ magnétique :

<https://www.youtube.com/watch?v=MnLAzrT6Ps8&is=a78jRZZG8zBf322G>

3. Conversion électrique → mécanique

Cf. exercice de TD sur les rails de Laplace moteur.

4. Bilan sur la méthodologie pour étudier les systèmes de conversion électromécanique

Pour étudier un système couplant deux domaines différents, l'approche est nécessairement double et implique aussi bien la mécanique que l'électricité. Le comportement du système est ainsi régi par deux équations différentielles couplées :

- Une **équation mécanique**, obtenue en appliquant le théorème de la résultante cinétique (translation) ou du moment cinétique (rotation) aux parties en mouvement du système.
- Une **équation électrique**, obtenue en appliquant la loi des mailles au circuit électrique équivalent.

Du côté mécanique, le couplage apparaît dans l'action de Laplace qui implique le courant, et du côté électrique il transparaît dans la force électromotrice induite, puisque les variations de flux magnétique dépendent de la vitesse (éventuellement vitesse angulaire) des parties mobiles.

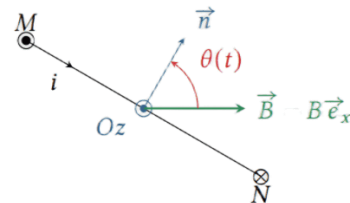
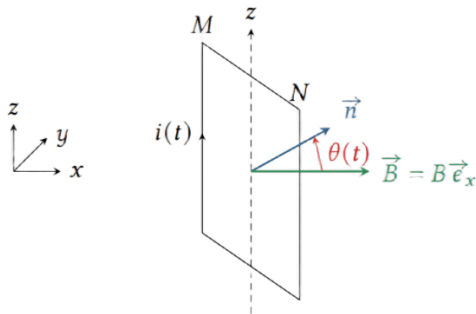
II] Conversion électromécanique en rotation

1. Modèle simplifié de l'alternateur : Conversion mécanique → électrique

Un alternateur, également appelé **générateur synchrone** est un dispositif utilisé dans toutes les centrales électriques, mais aussi par exemple pour la production d'électricité dans une voiture ou l'éclairage à dynamo d'un vélo. Il permet une conversion d'énergie mécanique de rotation en énergie électrique. Le générateur synchrone à **un fonctionnement réciproque à celui du moteur synchrone** dont le principe a été présenté dans les grandes lignes dans le cours sur les actions mécaniques de Laplace.

Application : Modèle simplifié d'alternateur

Considérons une spire rectangulaire tournant autour d'un axe (Oz), de moment d'inertie J par rapport à cet axe, plongée dans un champ magnétique constant $\vec{B} = B\vec{u}_x$. Cette spire possède une résistance interne r et alimente une résistance électrique extérieure R , qui modélise un récepteur. Sa vitesse de rotation reste constante ($\dot{\theta} = \Omega_0$), imposée par un dispositif mécanique extérieur non représenté qui fournit un couple Γ_0 .

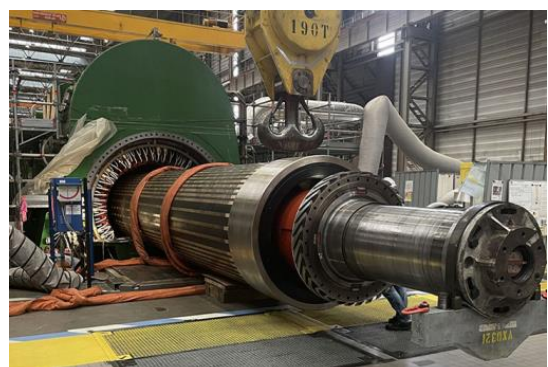


- 1) Justifier l'apparition d'un courant dans la spire.
- 2) Établir les équations électrique et mécanique du système. Les simplifier dans l'hypothèse de rotation uniforme.
- 3) Procéder au bilan de puissance et l'interpréter. Vérifier que l'on retrouve la conservation de la puissance lors de la conversion électromécanique.

Remarque : Il n'y a guère que dans des applications marginales que les alternateurs réels fonctionnent sur ce principe : dynamo de vélo ou micro-générateurs à aimants permanents. Dans la majorité des alternateurs industriels (centrales électriques, éoliennes, etc.), le rotor porte des aimants permanents ou des électroaimants alors que les bobinages dans lesquels est induite la tension sont au stator (structure fixe).

Le champ magnétique est donc tournant dans le référentiel du stator. Que le circuit de puissance soit fixe présente plusieurs avantages techniques, principalement en termes de robustesse mécanique et de refroidissement des circuits électriques.

La photo ci-contre montre l'alternateur d'une centrale nucléaire, avec le rotor sorti pour une opération de maintenance. La puissance produite par une centrale est telle qu'il serait impossible de créer un champ suffisamment intense avec des aimants permanents.



Correction :

1 Circuit en mouvement dans un champ magnétique $\iff$ induction.

2 **Équation mécanique :** La spire est en rotation, on utilise donc le théorème du moment cinétique en projection sur l'axe (Oz). Les actions mécaniques qu'elle subit sont les suivantes :

- le poids s'applique au centre de masse de la spire, qui est sur l'axe de rotation, donc $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = 0$;
- la liaison pivot est parfaite donc $\mathcal{M}_z(\text{liaison}) = 0$;
- le couple de Laplace vaut

$$\vec{\mathcal{M}}_L = \vec{\mu} \wedge \vec{B} = iS\vec{n} \wedge \vec{B} = iSB \sin(-\theta) \vec{e}_z \quad \text{d'où} \quad \mathcal{M}_{z,L} = -iSB \sin \theta$$

- la mise en mouvement à vitesse constante ne se fait pas seule mais vient d'un couple extérieur $\Gamma_0(t) \vec{e}_z$, inconnu mais qui dépend a priori du temps.

D'après le théorème du moment cinétique appliqué à la spire dans le référentiel terrestre,

$$J\ddot{\theta} = \Gamma_0 - iSB \sin(\theta)$$

et comme $\dot{\theta} = \Omega_0 = \text{cte}$ alors l'équation mécanique s'écrit

$$\Gamma_0 - iSB \sin(\Omega_0 t) = 0.$$

Équation électrique : Le flux magnétique au travers du circuit vaut

$$\Phi = \iint_{\text{spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint (B \vec{e}_x) \cdot (dS \vec{n}) = BS \vec{e}_x \cdot \vec{n} = BS \cos \theta,$$

d'où on déduit la fém induite

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = +BS\dot{\theta} \sin \theta = +BS\Omega_0 \sin(\Omega_0 t).$$

Le circuit électrique équivalent est simplement constitué du générateur induit de fém e_{ind} , monté en série avec la résistance interne r de la spire et la résistance extérieure R . La loi des mailles donne alors directement

$$e_{\text{ind}} = ri + Ri \quad \text{soit} \quad BS\Omega_0 \sin(\Omega_0 t) = (r + R)i.$$

3 Le bilan de puissance mécanique s'obtient en multipliant le TMC par la vitesse angulaire ω_0

$$0 = \Gamma_0 \Omega_0 - iSB \sin(\Omega_0 t) \Omega_0,$$

alors que le bilan de puissance électrique donne

$$iBS\Omega_0 \sin(\Omega_0 t) = (r + R)i^2$$

En éliminant le terme de couplage électromécanique de ces deux équations, on obtient le bilan de puissance globale,

$\Gamma_0 \omega_0$	=	Ri^2	+	ri^2
puiss méca fournie au rotor		puiss élec fournie au récepteur		puiss élec dissipée

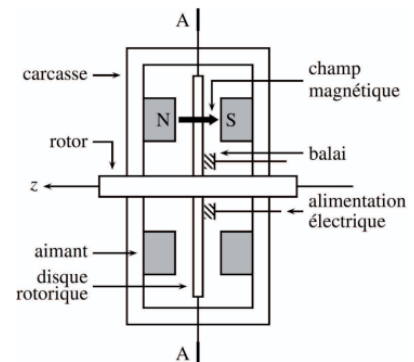
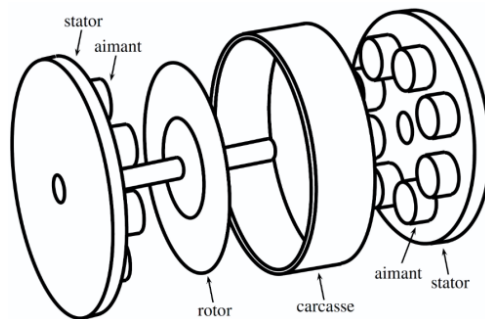
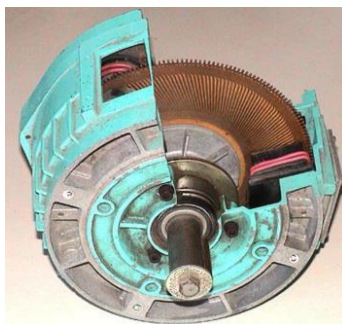
La puissance mécanique apportée au rotor se retrouve dissipée par effet Joule dans le récepteur que l'on souhaite alimenter. Contrairement aux deux exemples précédents, il n'y a pas de terme de variation d'énergie cinétique ici car la spire est supposée en rotation à vitesse constante, son énergie cinétique ne varie donc pas.

2. Moteur à courant continu à entrefer plan : Conversion électrique → mécanique

On s'intéresse à un moteur à courant continu à entrefer plan, technologie que l'on peut retrouver par exemple dans la motorisation des pompes médicales, l'articulation de robots, ou encore le positionnement de précision de machines outils. Ses atouts sont un faible encombrement et un contrôle précis et simple de la vitesse de rotation, mais sa puissance demeure relativement limitée.

Le stator est constitué d'une carcasse et de deux supports fixes circulaires sur lesquels sont montés des aimants produisant un **champ magnétique stationnaire, parallèle à l'axe de rotation**.

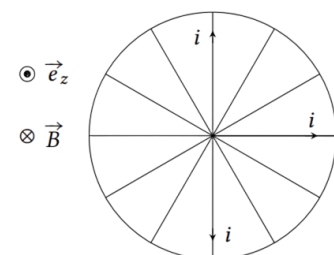
De nombreux **circuits électriques radiaux** séparés d'isolant sont imprimés sur le rotor. Des **contacts métalliques frottants appelés balais** assurent le passage du courant entre les circuits électriques mobiles du rotor et l'alimentation. L'**entrefer** désigne l'espace situé entre les aimants : il s'agit ici du plan du rotor, noté AA sur le schéma de droite, d'où la dénomination de MCC à entrefer plan.



Comme la machine synchrone, le fonctionnement de la machine à courant continu repose sur **l'interaction entre un champ magnétique et des conducteurs parcourus par un courant (moment magnétique)**. La différence essentielle réside dans le fait que la machine à courant continu utilise un système de **commutation mécanique** (collecteur et balais) qui adapte en permanence le sens du courant dans le rotor afin de maintenir un couple de Laplace dans le sens de la rotation. Pour aller plus loin, voir le fichier PDF : [mcc_entrefer_plan_commutation.pdf](#)

Application : Modèle simplifié d'une machine à courant continu à entrefer plan.

On modélise le rotor par N rayons de longueur a , parcourus le même courant i , de résistance totale constante R , alimentés par un générateur de force électromotrice E_0 . Il tourne à la vitesse angulaire ω , son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation est noté J . La charge qu'il entraîne exerce un moment résistant $M_z = -\lambda\omega$.



1) Représenter la force de Laplace subie par un rayon en supposant $i > 0$, et en déduire le sens de rotation.

2) Établir l'équation mécanique.

3) Justifier que la loi de Faraday ne s'applique pas dans cette géométrie. Établir l'équation électrique en exploitant la conservation de la puissance.

4) En déduire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse de rotation ω . Comment contrôler la vitesse de rotation en régime permanent ?

Correction :

1 La règle des doigts de la main droite donne la direction du produit vectoriel selon $+\vec{e}_\theta$, donc rotation en sens direct autour de l'axe Oz .

2 Force de Laplace subie par un rayon :

$$\vec{F}_L = \int i d\ell \vec{e}_r \wedge (-B \vec{e}_z) = iaB \vec{e}_\theta$$

Cette force s'applique au milieu du rayon, le bras de levier vaut donc $a/2$, et son moment

$$M_L = \frac{a}{2} \times iaB = \frac{ia^2B}{2}.$$

Remarque : Le moment est d'autant plus grand que le milieu du rayon est éloigné de l'axe, c'est pourquoi on voit sur la photo que les rayons ne sont gravés que sur la partie extérieure de la roue et ne vont pas jusqu'au centre.

D'après le TMC appliqué au rotor, tenant compte des N rayons,

$$J \frac{d\omega}{dt} = N \frac{ia^2B}{2} - \lambda\omega.$$

3 Le champ est uniforme et la surface du circuit ne varie pas, signe que la loi de Faraday ne peut s'appliquer.

Remarque : En même temps, l'énoncé ne dit pas clairement comment le câblage permet que les circuits soient bel et bien fermés ... Le câblage est en fait astucieux, et repose sur des techniques de commutation du sens du champ et du courant : cf. problème 25.4 de l'ouvrage « Toute la physique de sup en applications », Renaud Carpentier, éditions Ellipses.

D'après la conservation de la puissance,

$$N \frac{ia^2B}{2} \omega + e_{\text{ind}} i = 0 \quad \text{soit} \quad e_{\text{ind}} = -N \frac{a^2B}{2} \omega.$$

Le circuit électrique équivalent compte le générateur E_0 , le générateur induit e_{ind} et la résistance R , d'où

$$E_0 + e_{\text{ind}} = Ri \quad \text{soit} \quad E_0 - N \frac{a^2B}{2} \omega = Ri$$

4 On isole dans l'équation électrique

$$i = \frac{E_0}{R} - \frac{Na^2B}{2R} \omega$$

et en insérant dans l'équation mécanique

$$J \frac{d\omega}{dt} = \frac{Na^2B}{2} \left(\frac{E_0}{R} - \frac{Na^2B}{2R} \omega \right) - \lambda\omega \quad \text{soit} \quad J \frac{d\omega}{dt} + \left(\frac{N^2 a^4 B^2}{4R} + \lambda \right) \omega = \frac{Na^2B}{2R} E_0$$

La vitesse de rotation en régime permanent correspond à la solution particulière de l'équation différentielle, dont on voit qu'elle est facilement contrôlable via la tension E_0 imposée par le générateur.