

Conversion électromécanique en translation**□ Exercice 30.1. Rail de Laplace moteurs ★★ (Equations électrique et mécanique, puissance)**

1 Pour que la masse soit soulevée, il faut que la force de Laplace subie par la tige soit dirigée selon $-\vec{e}_x$, ce qui impose $i > 0$. La valeur minimale de E correspond au cas statique, où la norme de la force de Laplace est égale au poids de m_0 , c'est-à-dire

$$m_0 g = i_{\min} a B = \frac{E_{\min}}{R} a B \quad \text{d'où} \quad \boxed{E_{\min} = \frac{R m_0 g}{a B}}$$

2 D'après le TRC appliqué à la masse m_0 ,

$$m_0 \vec{a} = m_0 \vec{g} + \vec{T} \quad \text{soit} \quad \vec{T} = m_0 (\vec{a} - \vec{g}) = m_0 \left(\frac{dv_z}{dt} + g \right) \vec{e}_z \quad \text{donc} \quad \boxed{T = m_0 \left(\frac{dv_z}{dt} + g \right)}$$

3 • **Équation mécanique.** Appliquons le théorème de la résultante cinétique à la tige (masse m). Le mouvement est horizontal, donc le poids de la tige est compensé par la force de réaction normale exercée par les rails. Ainsi,

$$m \frac{dv}{dt} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_L + \vec{T} \quad \text{soit} \quad \boxed{m \frac{dv_x}{dt} = -iaB + m_0 \left(\frac{dv_z}{dt} + g \right)}.$$

Compte tenu du repère choisi, $v_x = -v_z$ (la masse descend si la tige se déplace vers la droite), donc

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= -iaB + m_0 \left(g - \frac{dv_x}{dt} \right) \\ (m + m_0) \frac{dv_x}{dt} &= -iaB + m_0 g. \end{aligned}$$

• **Équation électrique.** Raisonnons sur le circuit équivalent, qui contient le générateur E , une résistance R et un générateur induit de fém e dû à l'induction. La surface du circuit vaut $S = ax$ donc

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot (-dS \vec{e}_z) = -axB \quad \text{d'où} \quad e = -\frac{d\phi}{dt} = +av_x B.$$

Par la loi des mailles,

$$\boxed{E + av_x B = Ri}$$

4 Commençons par le vitesse v_x de la tige mobile. En isolant l'expression de i dans l'équation électrique pour l'insérer dans l'équation mécanique,

$$(m + m_0) \frac{dv_x}{dt} = -aB \left(\frac{E + av_x B}{R} \right) + m_0 g \quad \text{soit} \quad \frac{dv_x}{dt} + \frac{(aB)^2}{R(m + m_0)} v_x = -\frac{aBE}{R(m + m_0)} + \frac{m_0}{m + m_0} g$$

On pose $\tau = R(m + m_0)/(aB)^2$, et on en déduit

$$v_x(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{m_0 g R}{(aB)^2} - \frac{E}{aB}.$$

Vue la géométrie, la vitesse de la masse v_z est de même norme mais de signe opposé par rapport à v_x , donc

$$v_z(t) = -A e^{-t/\tau} - \frac{m_0 g R}{(aB)^2} + \frac{E}{aB}$$

En régime asymptotique on identifie la vitesse limite de levage,

$$\boxed{V_0 = -\frac{m_0 g R}{(aB)^2} + \frac{E}{aB}}.$$

et on écrit la solution sous la forme

$$\boxed{v_z(t) = V_0 \left(1 - e^{-t/\tau} \right)}.$$

5 En régime permanent à vitesse de la masse V_0 (et donc courant dans le circuit I_0 mais vitesse $v_x = -V_0$), les équations électrique et mécanique deviennent respectivement

$$E = +aV_0B + RI_0 \quad \text{et} \quad 0 = -I_0aB + m_0g$$

En multipliant comme d'habitude par I_0 et V_0 ,

$$EI_0 = +aI_0V_0B + RI_0^2 \quad \text{et} \quad 0 = -I_0aBV_0 + m_0gV_0$$

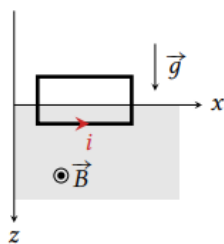
et en sommant ces deux équations

$$EI_0 = RI_0^2 + m_0gV_0.$$

Interprétation :

- ▶ EI_0 : puissance fournie par le générateur ;
- ▶ RI_0^2 : puissance dissipée par effet Joule ;
- ▶ m_0gV_0 : variation d'énergie potentielle de la masse m_0 .

□ Exercice 30.2. Freinage inductif en translation ★★ (Equations électrique et mécanique)



1 Lorsqu'elle pénètre dans la zone de champ magnétique, la cabine est soumise à son poids qui est vertical selon $\vec{e}_z$. En outre, comme le flux magnétique au travers de la spire varie, un courant induit apparaît dans la spire, responsable d'une force de Laplace. Sans préjuger du signe réel du courant induit, orientons la spire de telle sorte que la normale orientée soit dans le même sens que $\vec{B}$, ce qui oriente nécessairement le courant dans le sens représenté ci-contre. Sur les deux parties verticales plongées dans la zone de champ, le courant est le même mais circule dans des sens différents, donc les forces de Laplace sont opposées. En revanche, seul un des deux côtés horizontaux voit le champ magnétique et subit une force de Laplace

$$\vec{F}_L = iaB \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = iaB \vec{e}_z.$$

Finalement, la vitesse initiale et toutes les forces subies par la cabine d'ascenseur sont dirigées selon $\vec{e}_z$. On en déduit que **le mouvement de la cabine reste une translation le long de cet axe.**

2 • **Équation mécanique** : D'après le théorème de la résultante appliquée à la cabine dans le référentiel terrestre galiléen, tant que la spire est à cheval entre la zone avec et la zone sans champ, on a par projection sur l'axe z

$$m \frac{dv}{dt} = +mg + iaB.$$

• **Équation électrique** : Du point de vue électrique, il faut prendre en compte la résistance R de la spire et la force électromotrice induite. Calculons cette f.é.m. La surface de circuit plongée dans le champ magnétique est égale à $S(t) = az$ tant que la spire est à cheval entre la zone avec et la zone sans champ. Ainsi, le flux magnétique vaut

$$\phi(t) = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = +azB,$$

et d'après la loi de Faraday,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -aBv.$$

La loi des mailles appliquée dans le circuit équivalent donne

$$e = Ri \quad \text{soit} \quad -aBv = Ri.$$

• **Découplage des équations** : on dispose de deux équations, mais l'intensité du courant dans la spire est inconnue. D'après l'équation électrique,

$$i = -\frac{aB}{R}v,$$

ce qui donne en injectant dans l'équation mécanique

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{(aB)^2}{R}v$$

ou encore

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = g \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{Rm}{(aB)^2}.$$

3 La forme générale des solutions est

$$v(t) = Ae^{-t/\tau} + g\tau,$$

avec

$$v(0) \underset{\text{CI}}{=} v_0 \underset{\text{expr}}{=} A + g\tau \quad \text{d'où} \quad A = v_0 - g\tau.$$

Finalement,

$$v(t) = (v_0 - g\tau) e^{-t/\tau} + g\tau.$$

L'équation et donc évidemment sa solution ne sont valables que lorsque la spire est à cheval entre la zone avec et la zone sans champ. Lorsque $z \geq b$, la boucle conductrice est intégralement dans la zone de champ magnétique si bien le flux au travers de la spire ne varie plus et le phénomène d'induction cesse. **La cabine retrouve alors un mouvement de chute libre**, et est de nouveau accélérée.

4 Si la cabine se trouvait complètement arrêtée, alors le flux magnétique ne varierait plus et le phénomène d'induction cesserait. La force de Laplace s'annulerait alors ... mais pas le poids de la cabine ! La cabine se retrouverait donc soumise à une seule force verticale vers le bas, et serait donc à nouveau accélérée puisqu'il n'y a rien pour la retenir. On en déduit qu'un freinage magnétique ne permet pas d'arrêter complètement la cabine d'ascenseur.

□ Exercice 30.3. Haut-parleur ★★★ (Conservation de la puissance, RSF)

1 Raisonnons sur le tronçon de spire représenté figure 1. L'orientation de i est celle donnée par l'énoncé. La force élémentaire qu'elle subit s'écrit

$$d\vec{F}_L = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i(d\vec{\ell} \vec{e}_\theta) \wedge (B\vec{e}_r) \quad \text{soit} \quad d\vec{F}_L = -iBd\ell \vec{e}_z.$$

Par intégration sur tout le long de la bobine, on en déduit

$$\vec{F}_L = \int_{\text{bobine}} -iBd\ell \vec{e}_z \quad \text{soit} \quad \vec{F}_L = -iB\ell_{\text{bob}} \vec{e}_z,$$

avec ℓ_{bob} la longueur totale du fil bobiné.

2

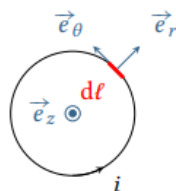


Figure 1 – Une spire du haut-parleur vue de face.

- Système : équipage mobile ;
- Référentiel : terrestre $\mathcal{R}$, supposé galiléen ;
- Bilan des forces :
 - le poids est nécessairement compensé par une force de réaction car le mouvement est horizontal ;
 - force de Laplace $\vec{F}_L = -iB\ell_{\text{bob}} \vec{e}_z$;
 - force de rappel du ressort $\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_{\text{sortant}} = -kz \vec{e}_z$;
 - force de frottement linéaire, qui modélise l'émission du son $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$.
- D'après le théorème de la résultante cinétique,

$$m \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{F}_L + \vec{F}_r + \vec{F}_f,$$

et en remplaçant et en projetant sur $\vec{e}_z$,

3 La puissance de la force de Laplace s'écrit

$$\mathcal{P}_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = -iB\ell_{\text{bob}} v_z.$$

On en déduit la fém induite,

$$e_{\text{ind}} = -\frac{\mathcal{P}_L}{i} \quad \text{soit} \quad e_{\text{ind}} = B\ell_{\text{bob}} v_z.$$

4 Le schéma électrique équivalent est représenté figure 2. D'après la loi des mailles,

$$u + e_{\text{ind}} = Ri + L \frac{di}{dt} \quad \text{soit} \quad u + B\ell_{\text{bob}}v_z = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

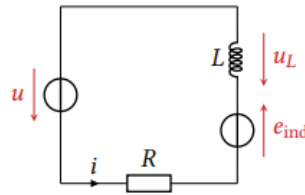


Figure 2 – Schéma électrique équivalent du haut-parleur.

5 D'après l'équation électrique,

$$\underline{V_z} = \frac{1}{B\ell_{\text{bob}}} (R + jL\omega) \underline{I} - \frac{1}{B\ell_{\text{bob}}} \underline{U}.$$

On remplace dans l'équation mécanique multipliée par $j\omega$ au préalable,

$$(-m\omega^2 + j\omega\alpha + k) \frac{1}{B\ell_{\text{bob}}} [(R + jL\omega) \underline{I} - \underline{U}] = -j\omega\ell_{\text{bob}}B\underline{I}$$

On regroupe alors les termes

$$(-m\omega^2 + j\omega\alpha + k)\underline{U} = [(m\omega^2 - j\omega\alpha - k)(R + jL\omega) - j\omega(\ell_{\text{bob}}B)^2] \underline{I},$$

ce qui conduit à

$$\underline{Z} = \underbrace{\frac{-j\omega(\ell_{\text{bob}}B)^2}{m\omega^2 - j\omega\alpha - k}}_{=Z_m} + \underbrace{(R + jL\omega)}_{=Z_e}.$$

Conversion électromécanique en rotation

□ Exercice 30.4. Roue de Barlow ★★ (Equations électrique et mécanique, moment cinétique)

Utilisons des coordonnées cylindriques d'axe (Oz).

1 La force de Laplace vaut

$$\vec{F}_L = \int i(-d\ell \vec{e}_r) \wedge B \vec{e}_z = iaB \vec{e}_\theta.$$

Elle s'applique au milieu de CO , son bras de levier vaut donc $a/2$ et son moment

$$\Gamma_L = i \frac{a^2 B}{2}.$$

Outre le couple de Laplace Γ_L , le disque subit le couple résistant Γ_m dû à la masse qu'il soulève. En supposant la liaison pivot parfaite, le TMC appliqué au disque donne

$$J\ddot{\theta} = i \frac{a^2 B}{2} + \Gamma_m.$$

2 Les actions de Laplace ont pour puissance

$$\mathcal{P}_L = \Gamma_L \dot{\theta} = i \frac{a^2 B}{2} \dot{\theta}.$$

La conservation de la puissance donne alors

$$e_{\text{ind}} = -\frac{\mathcal{P}_L}{i} = -\frac{a^2 B}{2} \dot{\theta}.$$

D'après la loi des mailles appliquée au circuit électrique équivalent de la figure 4,

$$U + e_{\text{ind}} = Ri \quad \text{soit} \quad i = \frac{U}{R} - \frac{a^2 B}{2R} \omega.$$

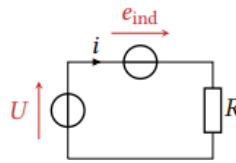


Figure 4 – Circuit électrique équivalent à la roue de Barlow.

3 En régime permanent, $\omega = \dot{\theta} = \text{cte}$. En injectant l'expression de i dans l'équation mécanique, il vient

$$\frac{a^2 B}{2} \left(\frac{U}{R} - \frac{a^2 B}{2R} \omega_{\infty} \right) + \Gamma_m = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{U}{R} - \frac{a^2 B}{2R} \omega_{\infty} - \frac{2}{a^2 B} bmg = 0$$

et ainsi

$$\omega_{\infty} = \frac{2}{a^2 B} U - \frac{4R}{a^4 B^2} bmg.$$

□ Exercice 30.5. Moteur asynchrone ★★★ (Equations électrique et mécanique, RSF)

1 Supposons la spire immobile. Du fait de la rotation du champ tournant, le flux magnétique au travers de la spire varie. Il y a donc un phénomène d'induction, qui génère un courant dans la spire. Ce courant a pour conséquence l'apparition d'un moment magnétique qui tend à s'aligner avec le champ. Comme le champ tourne, la spire tourne également. On peut donner une vision équivalente à partir de la loi de Lenz : l'effet du courant induit est de diminuer les variations de flux magnétique au travers de la spire, et donc de chercher à donner à la spire une orientation constante par rapport au champ $\vec{B}$. Comme le champ tourne, la spire tourne également.

Les deux vitesses de rotation ne peuvent pas être égales. Si tel était le cas, en se plaçant dans le référentiel de la spire, le champ magnétique serait fixe et de norme constante, et il ne pourrait donc plus y avoir d'induction. La spire ralentirait alors en raison des frottements ... ce qui impliquerait de nouveau un phénomène d'induction.

2 À l'instant t , $\vec{n}$ forme avec $\vec{e}_z$ un angle ωt et $\vec{B}$ un angle $\omega' t$. L'angle θ vaut donc

$$\theta(t) = \omega' t - \omega t = \Omega t.$$

La vitesse de glissement Ω est la vitesse angulaire à laquelle $\vec{n}$ et $\vec{B}$ se décalent l'un par rapport à l'autre.

3 • **Circuit électrique équivalent** : voir figure 5. Il n'y a pas de couplage inductif à prendre en compte. Le sens de i et de e doit être le même pour pouvoir appliquer la loi de Faraday.

• **Calcul de la fém induite** : Le flux magnétique au travers de la spire à l'instant t est égal à

$$\phi(t) = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = SB \cos \theta = SB \cos(\Omega t).$$

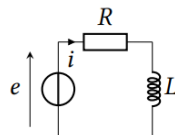


Figure 5 – Schéma électrique équivalent à la machine asynchrone.

On en déduit la f.é.m. induite par le champ extérieur par la loi de Faraday,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = SB\dot{\theta} \sin \theta \quad \text{soit} \quad e = SB\Omega \sin(\Omega t).$$

• **Équation électrique** : d'après la loi des mailles,

$$e = Ri + L \frac{di}{dt} \quad \text{soit} \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{SB}{L} \Omega \sin(\Omega t).$$

[4] L'équation différentielle décrit un circuit en forçage harmonique de pulsation Ω . La pulsation du courant dans la bobine en régime permanent est donc Ω .

Passer l'équation différentielle en représentation complexe pose une difficulté à cause du terme de droite. En représentation complexe $\cos \Omega t \mapsto e^{j\Omega t}$, donc

$$\sin \Omega t = \cos \left(\Omega t - \frac{\pi}{2} \right) \mapsto e^{j(\Omega t - \pi/2)} = -j e^{j\Omega t}.$$

Plus astucieux, on peut aussi noter que ce terme de droite s'écrit

$$\frac{E_{ind}}{L} = -\frac{j\Omega}{L} \Phi = \frac{j\Omega SB}{L}$$

L'équation différentielle devient

$$j\Omega \underline{I} e^{j\Omega t} + \frac{R}{L} \underline{I} e^{j\Omega t} = -j\Omega \frac{SB}{L} e^{j\Omega t}$$

ce qui donne

$$\frac{jL\Omega + R}{L} \underline{I} = -j\Omega \frac{SB}{L}$$

soit

$$\underline{I} = -\frac{j\Omega SB}{R + jL\Omega} = \frac{-j\Omega SB (R - jL\Omega)}{R^2 + L^2\Omega^2} = -\frac{\Omega SB}{R^2 + L^2\Omega^2} (jR + L\Omega)$$

et enfin

$$\underline{I} e^{j\Omega t} = -\frac{\Omega SB}{R^2 + L^2\Omega^2} (L\Omega - jR) (\cos \Omega t + j \sin \Omega t).$$

On peut alors en déduire $i(t) = \text{Re} [\underline{I} e^{j\Omega t}]$ soit

$$i(t) = -\frac{\Omega SB}{R^2 + L^2\Omega^2} (L\Omega \cos \Omega t - R \sin \Omega t).$$

[5] Le moment magnétique de la spire est égal à $\vec{m}(t) = i(t) S \vec{n}(t)$, et le couple magnétique auquel la spire est soumise vaut

$$\vec{\Gamma}(t) = \vec{m}(t) \wedge \vec{B} = \|\vec{m}\| \|\vec{B}\| \sin \theta(t) \vec{e}_x \quad \text{d'où} \quad \vec{\Gamma} = i(t) S B \sin \Omega t \vec{e}_x$$

d'où

$$\Gamma = i(t) S B \sin \Omega t \quad \text{soit} \quad \Gamma = -\frac{\Omega (SB)^2}{R^2 + L^2\Omega^2} (L\Omega \cos \Omega t - R \sin \Omega t) \sin \Omega t.$$

En moyenne, $\langle \sin^2 \Omega t \rangle = 1/2$ et $\langle \sin \Omega t \cos \Omega t \rangle = 0$, d'où

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{R\Omega (SB)^2}{2(R^2 + L^2\Omega^2)}$$

[6] En régime permanent, le couple moteur moyen $\langle \Gamma \rangle$ doit compenser le couple résistant. Le point de fonctionnement du moteur asynchrone correspond donc à la (aux) vitesse(s) de rotation ω telle(s) que $\langle \Gamma \rangle = \Gamma_r$. Les deux cas sont représentés figure 6 : le(s) point(s) de fonctionnement sont situés aux intersections des courbes. Dans le premier cas, un seul point de fonctionnement est possible, et la charge est entraînée à une vitesse de rotation ω légèrement inférieure à ω' . Dans le second cas, deux points de fonctionnement sont envisageables. Celui à plus basse vitesse de rotation est instable : si le couple résistant augmente par exemple sous l'effet d'une perturbation, alors d'après la loi du moment cinétique la vitesse de rotation du moteur diminue ... mais dans ce cas le couple moteur moyen diminue aussi. Le moteur ne peut donc plus entraîner la charge et décroche. Au contraire, pour le point de fonctionnement à plus haute vitesse de rotation, le couple moteur augmente si ω diminue, ce qui permet de compenser la perturbation.

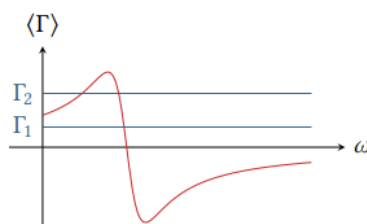


Figure 6 – Points de fonctionnement du moteur asynchrone. Les points de fonctionnement sont les points d'intersection des droites bleues représentant le couple résistant et de la courbe rouge représentant le couple moteur moyen.

