

CONCOURS NATIONAL D'ADMISSION DANS LES GRANDES ECOLES D'INGENIEURS

(Concours national DEUG)

Epreuve commune aux 3 options (Mathématiques, Physique, Chimie)

MECANIQUE - PARTIE I

Durée : 2 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Un cylindre de rayon R et d'axe $\vec{Oz}$ est fixé sur le plan horizontal xOy . On attache à la base du cylindre en un point A de sa périphérie un fil inextensible de longueur totale ℓ_0 . L'autre extrémité du fil est attachée à un point matériel M de masse m , qui peut glisser sans frottement sur le plan xOy (figure 1).

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ est supposé galiléen et rapporté au repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, l'axe $\vec{Oz}$ étant dirigé suivant la verticale ascendante. On suppose le champ de pesanteur $\vec{g} = -g \vec{z}$ uniforme.

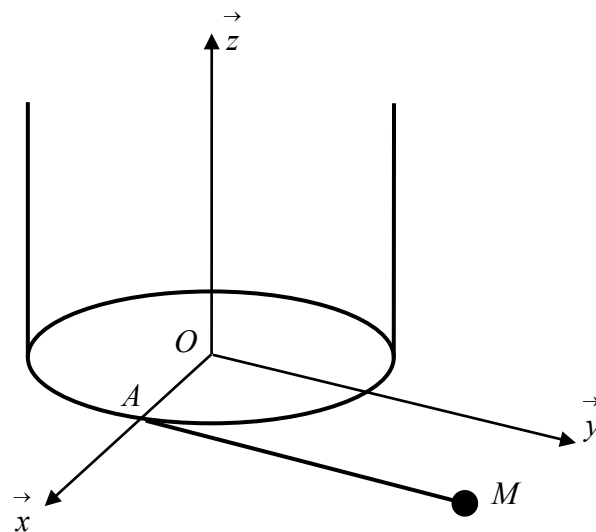


Figure 1

A l'instant initial $t = 0$, le fil AM est parallèle à $O\vec{y}$ et on communique au point M une vitesse $\vec{v}_0$ horizontale et orthogonale au fil (figure 2).

Le fil s'enroule alors autour du cylindre et on suppose qu'il reste tendu au cours du mouvement.

On note $\ell = HM$ la longueur de fil non enroulé à l'instant t , l'arc de cercle AH étant la portion de fil enroulé au même instant (figure 3).

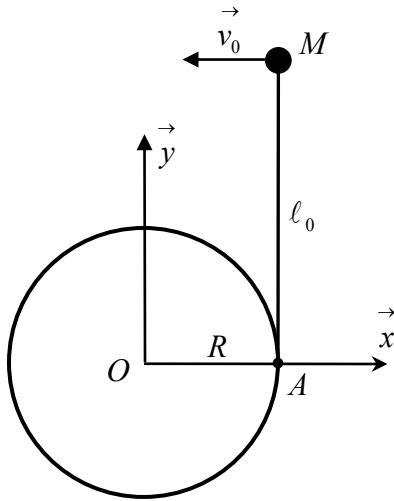


Figure 2 : à $t = 0$

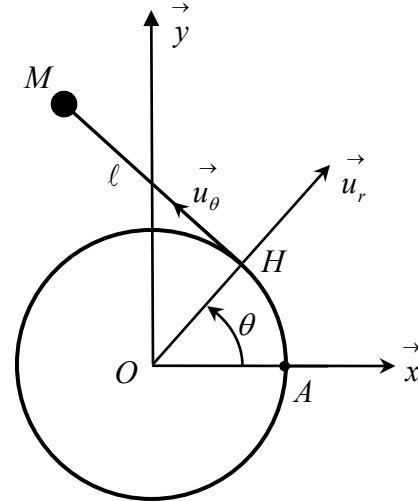


Figure 3 : à $t > 0$

- 1.1 Déterminer la relation entre ℓ , ℓ_0 , R et θ . En déduire une relation entre R , $\dot{\theta}$ et $\dot{\ell}$.
- 1.2 Exprimer le vecteur position $\vec{OM}$ dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.
- 1.3 En déduire l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ du point M à l'instant t dans cette même base, en fonction de $\dot{\theta}$ et ℓ .
- 1.4 Réaliser le bilan des forces extérieures appliquées au point M .
- 1.5 Déterminer le travail W_{ext} des forces extérieures appliquées au point M .
- 1.6 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, montrer que la norme du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ du point M reste constante au cours du mouvement.
- 1.7 Déterminer ℓ en fonction de ℓ_0 , R , v_0 et t .
- 1.8 Déterminer l'instant final t_f et l'angle θ_f correspondant, pour lequel le fil est entièrement enroulé autour du cylindre.
- 1.9 Déduire de la question 1.6 l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ du point M à l'instant t dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ en fonction de $\dot{\theta}$ et ℓ .

1.10 En déduire l'expression de la norme T de la tension $\vec{T}$ exercée par le fil sur le point M au cours du mouvement. On la mettra sous la forme $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{t}{t_f}}}$ où on exprimera T_0 en fonction de m , v_0 et ℓ_0 et t_f en fonction de ℓ_0 , R et v_0 .

1.11 Que vaut T lorsque t se rapproche de t_f ? Conclure.

Exercice 2

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tel que l'axe $O\vec{z}$ soit vertical ascendant.

Aux extrémités d'une tige A_1A_2 de masse négligeable et de longueur $2d$, on fixe deux sphères, assimilées à deux masses m ponctuelles. Le système S , formé des deux sphères et de la tige, est suspendu au point O , milieu de la tige, à un fil de torsion de raideur k (figure 4).

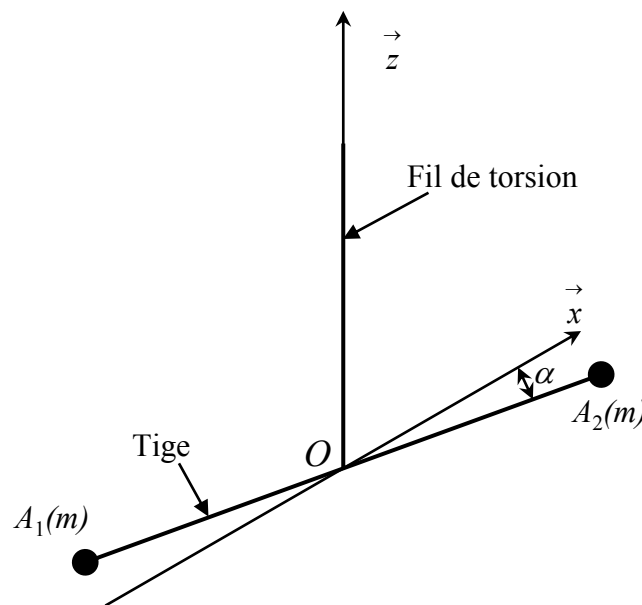


Figure 4

On tourne la tige d'un angle α faible. Le système se met à osciller sans frottement à la période T autour de l'axe $O\vec{z}$.

On note $I = 2md^2$ le moment d'inertie du système S par rapport à l'axe $O\vec{z}$.

2.1 En appliquant le théorème du moment dynamique au système S au point O , établir l'équation différentielle du mouvement.

2.2 En déduire la raideur k du fil de torsion en fonction de m , d et T .

Le système est maintenant au repos. Aux points M_1 et M_2 , distants respectivement d'une distance r de A_1 et A_2 , on place deux masses M ($M \gg m$), voir figure 5. Sous l'effet des interactions de gravitation entre les masses m et M , la tige tourne d'un angle θ très faible mais mesurable.

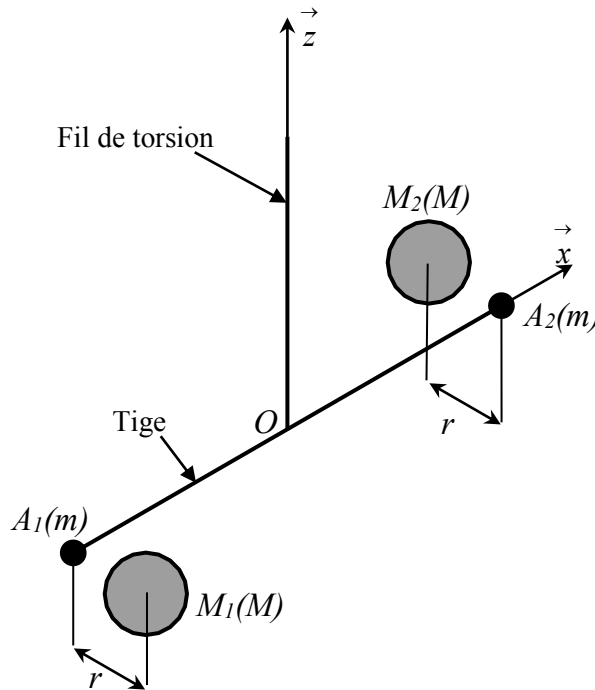


Figure 5

La rotation étant très faible, on considère que la distance r reste constante.

On note G la constante de gravitation universelle.

On néglige l'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur le système.

2.3 Exprimer le couple $\vec{C}_g$ exercé sur le système S au point O par les interactions de gravitation en fonction de m , M , d , r et G .

2.4 En appliquant le théorème du moment dynamique au système S au point O , exprimer la constante de gravitation universelle G en fonction de m , M , d , r et T .

L'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur le système n'est plus négligée et on considère que le point O se situe au niveau de la surface terrestre.

On note $\vec{g} = -g \vec{z}$ l'accélération de la pesanteur à la surface terrestre, M_T la masse de la Terre et R_T le rayon de la Terre.

2.5 Exprimer la masse M_T de la Terre en fonction de m , M , d , r , R_T , k et g .

Fin de l'énoncé