Séquence 2

Déterminer une loi entrée-sortie géométrique

Objectif de la séquence

L'objectif de ce cours est d'apprendre à représenter un assemblage mécanique en vue de décrire les relations existantes entre les différents paramètres géométriques du mécanisme.

Table des matières

Page

1 Représenter un mécanisme **1**

2 Fermeture géométrique **6**

Objet d'étude *Compresseur d'air pour respirateur*

Le compresseur d'air permet au respirateur de disposer d'air sous pression en absence d'installation murale de l'hôpital, par exemple en cas de panne ou de transport du patient. Il s'agit ici d'un compresseur d'air sans lubrification (pour éviter que l'huile passe dans l'air que respire le patient), à deux pistons et à un seul étage.

→ Comment décrire le mécanisme du compresseur à air ?

→ Comment connaître le débit d'air que peut fournir le compresseur, sachant que le moteur tourne à 1000 tours/min ? Le cahier des charges exige un débit pouvant atteindre 54 L/min. Est-il respecté ?

→ Les variations de débit d'air sont-elles suffisamment faibles en sortie du compresseur (inférieures à 10 % d'après le cahier des charges) ?

1 Représenter un mécanisme

À savoir

Un **mécanisme** est un ensemble de **solides** reliés entre eux par des **liaisons**.

Un **solide** (ou **classe d'équivalence cinématique**) est un ensemble de pièces assemblées de telle sorte qu'elles sont immobiles les unes par rapport aux autres. Elles peuvent êtres vissées, soudées, collées...

Une **liaison** est une contrainte imposée au mouvement entre deux solides résultant du contact entre les deux solides.

Le compresseur d'air étudié est composé

- d'un bâti, fixe par rapport au sol, composé principalement du carter du système
- d'un vilebrequin, qui est mis en rotation par un moteur
- de deux pistons qui font entrer et sortir l'air des chambres situées au-dessus d'eux
- de deux bielles, transmettant la rotation du vilebrequin à chacun des pistons

La rotation continue du vilebrequin entraîne la mise en mouvement des bielles qui permettent aux pistons d'avoir un mouvement de translation alternative. Deux clapets anti-retour installés dans une chambre fermée par l'extrémité de chaque piston gèrent l'admission et le refoulement de l'air (*cf.* figure 1).

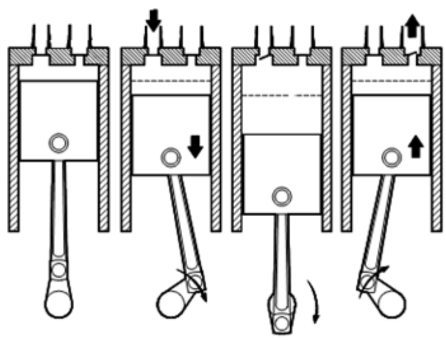


FIGURE 1 – *Principe de fonctionnement d'un compresseur à piston.*

1.1 Graphe des liaisons

Pour comprendre comment sont reliés les solides entre eux, on utilise le graphe des liaisons.

À savoir

Un **graphe des liaisons** (ou **graphe de structure**) représente la structure d'un mécanisme. Chaque solide est représenté une seule fois par un ovale. Le bâti, solide de référence supposé fixe par rapport à l'extérieur est représenté avec le symbole. Les liaisons sont représentées par des traits entre les solides.

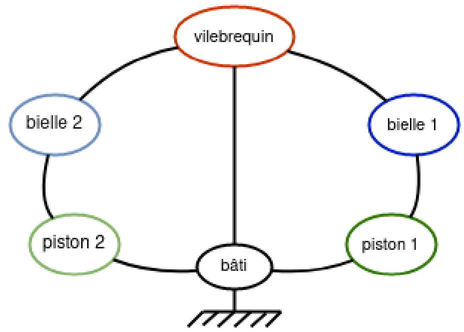


FIGURE 2 – *Graphe de structure du compresseur à deux pistons.*

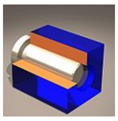
Le bâti est en liaison avec le vilebrequin mais aussi avec les deux pistons. Chacun des pistons est également en liaison avec une bielle et les deux bielles sont en liaison avec le vilebrequin commun.

À savoir

Une liaison autorisant seulement **une rotation** de l'un des solides par rapport à l'autre est une **liaison pivot**. Elle se caractérise par l'**axe** (la droite) qui est fixe par rapport aux deux solides.

Quelques précisions supplémentaires

Pour réaliser une liaison pivot, on fait coïncider deux surfaces cylindriques et on impose un arrêt axial.



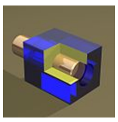
Entre le bâti et le vilebrequin, il existe une liaison pivot car elle n'autorise qu'une seule rotation. Il en est de même entre le vilebrequin et chacune des bielles et entre les bielles et les pistons.

À savoir

Une liaison autorisant **une rotation et une translation de même direction** de l'un des soldies par rapport à l'autre est une **liaison pivot-glissant**. Elle se caractérise par l'**axe** (la droite) qui est toujours commune aux deux solides.

Quelques précisions supplémentaires

Pour réaliser une liaison pivot-glissant, on fait coïncider deux surfaces cylindriques.



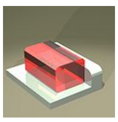
Entre chacun des pistons et le bâti, il y a une surface de contact cylindrique. La liaison existant entre un piston et le bâti est donc une liaison pivot-glissant. Au vu de l'architecture globale du mécanisme, seule la translation peut se produire mais ceci ne change pas la nature de la liaison.

À savoir

Une liaison autorisant seulement **une translation** de l'un des soldies par rapport à l'autre est une **liaison glissière**. Elle se caractérise par la **direction** de la translation autorisée.

Quelques précisions supplémentaires

Pour réaliser une liaison glissière, on fait coïncider deux plans d'une part et deux autres plans d'autre part.



Si la liaison entre chaque piston et le bâti n'avait autorisé qu'une translation (par exemple si les pistons n'avaient pas été cylindriques mais parallélépipédiques), la liaison entre les pistons et le bâti aurait été une liaison glissière.

Le graphe de structure de la figure 2 peut être complété avec la nature des liaisons pour obtenir le graphe des liaisons figure 3.

Donnons-nous maintenant un outil permettant de décrire convenablement les caractéristiques géométriques des liaisons, ici les axes des liaisons pivot et pivot-glissant. Pour ce faire, il faut avoir un outil représentant la géométrie du mécanisme.

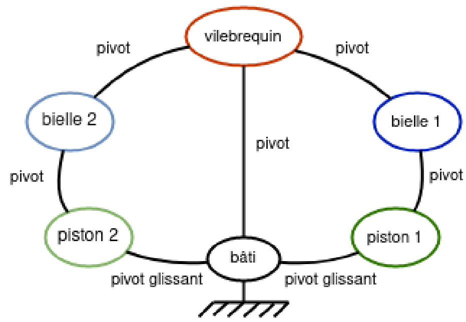


FIGURE 3 – *Graphe des liaisons du compresseur à deux pistons.*

1.2 Schéma cinématique

À savoir

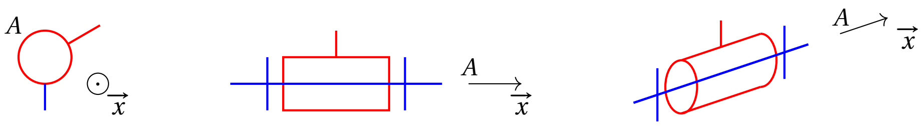
Un **schéma cinématique** représente la structure et la géométrie d'un mécanisme. Les **liaisons** sont représentées par des **symboles normalisées** et leurs **caractéristiques géométriques** sont respectées. Les solides sont des traits qui relient les liaisons entre elles.

Le bâti est représenté par le symbole .

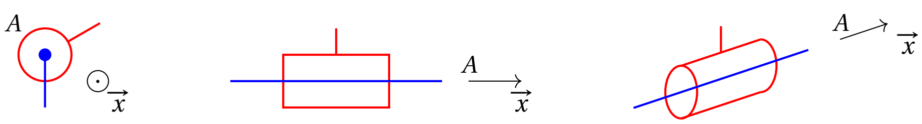
À savoir

Représentation normalisée de quelques liaisons dans un schéma cinématique.

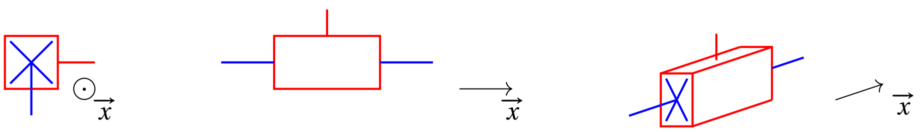
Pivot d'axe $A\vec{x}$



Pivot-glissant d'axe $A\vec{x}$



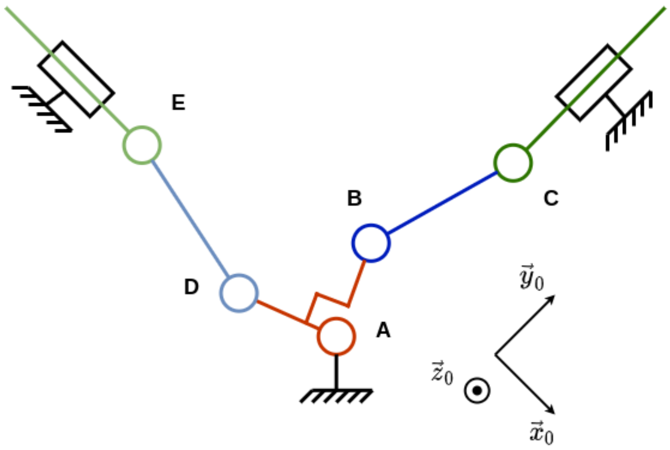
Glissière de direction $\vec{x}$



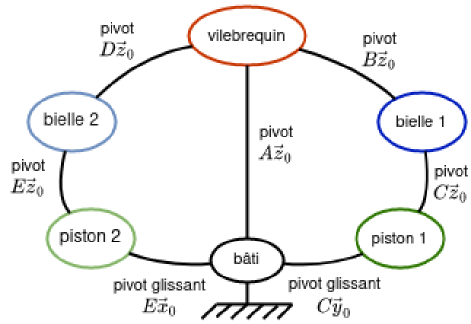
La structure du mécanisme représenté dans le graphe des liaisons est également visible sur le schéma cinématique. Sur ce dernier, on observe également que les liaisons pivot sont toutes d'axes parallèles, que les deux liaisons pivot-glissant entre les pistons et le bâti sont d'axes orthogonaux et concourants.

Le schéma cinématique permet aussi de définir des points et des repères utiles à la description de la géométrie du mécanisme.

La lecture du schéma cinématique figure 4a permet de compléter le graphe des liaisons et d'y inclure les caractéristiques géométriques du mécanisme.



(a) Schéma cinématique du compresseur à deux pistons.



(b) Graphe des liaisons avec paramétrage du compresseur à deux pistons.

FIGURE *4*

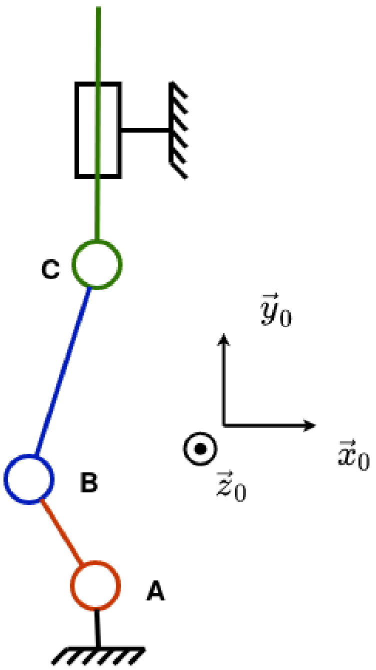
À savoir

Pour représenter un vecteur orthogonal au plan du dessin, on dessine

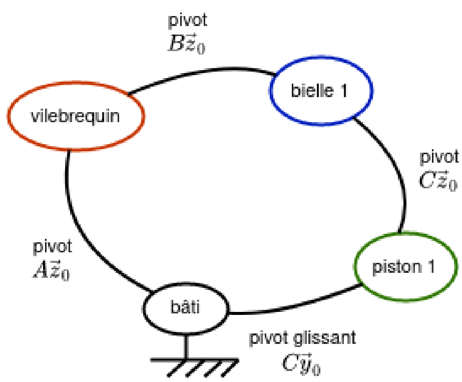
- ⊙ si le vecteur est sortant
- ⊗ si le vecteur est entrant

Pour retenir ces représentations, on peut visualiser une flèche : ⟶

Les deux pistons étant identiques, intéressons-nous par la suite à un seul piston. Une réflexion sera menée après l'étude pour pouvoir étendre les résultats obtenus à deux pistons et pouvoir ainsi répondre aux questions posées : quel débit d'air fournit le compresseur et est-il suffisamment régulier ?



(a) Schéma cinématique d'un seul piston du compresseur.



(b) Graphe des liaisons partiel du compresseur.

1.3 Notion de paramétrage

Si on suppose les solides indéformables, alors il suffit de connaître la position d'un repère (c'est-à-dire un point et une base) fixe par rapport au solide pour connaître la position de l'ensemble du solide.

À savoir

Paramétrer un mécanisme consiste à associer à chaque **solide** un **repère** fixe par rapport à celui-ci.

Remarque

Paramétrer un mécanisme permet de passer d'une description textuelle ou visuelle à une description mathématique du problème à traiter.

Complétons la description précédente par un paramétrage :

- le point A est fixe par rapport au bâti tout comme la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- les points A et B sont fixes par rapport au vilebrequin. On se donne un vecteur $\vec{x}_1$ de même direction et sens que le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- les points B et C sont fixes par rapport à la bielle. On se donne un vecteur $\vec{x}_2$ de même direction et sens que le vecteur $\overrightarrow{BC}$.
- le point C et la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ sont fixes par rapport au piston.

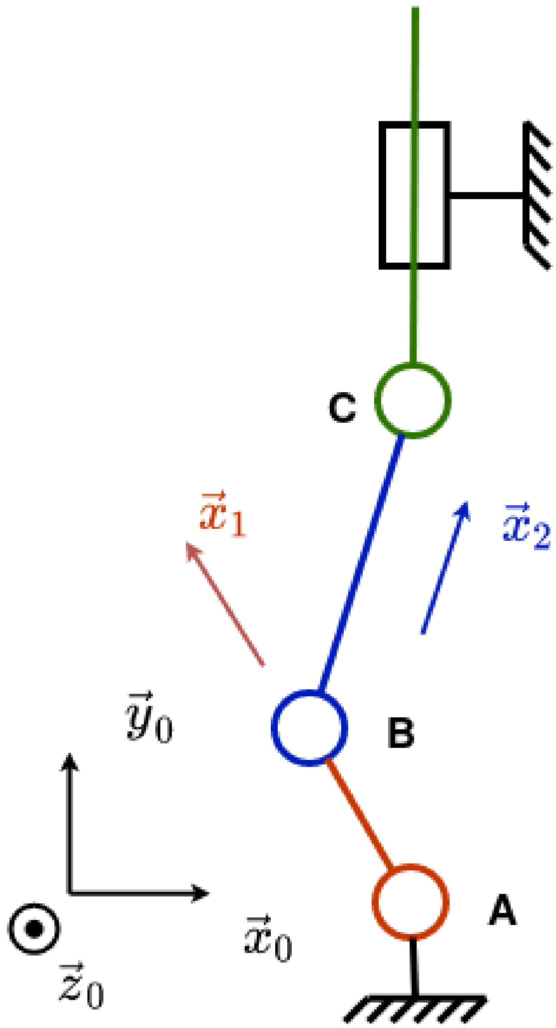


FIGURE 6 – *Schéma cinématique paramétré du compresseur avec un seul piston.*

2 Fermeture géométrique

Le déplacement du piston est relié à la variation de volume dans la chambre du compresseur et donc au débit d'air délivré. Nous établirons cette relation à la fin du cours. Nous cherchons maintenant à déterminer la relation entre la rotation du vilebrequin et le déplacement du piston.

Suite aux considérations précedentes, on se donne le paramétrage suivant :

- $\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{x}_1$, avec $a = 22$ mm
- $\overrightarrow{BC} = b\,\overrightarrow{x}_2$, avec $b = 98$ mm
- $\overrightarrow{AC} = \lambda(t)\,\overrightarrow{y}_0$, avec λ une longueur variable
- $\alpha(t) = \left(\overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{x}_1\right) = \left(\overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{y}_1\right)$ l'angle positionnant le vilebrequin par rapport au bâti
- $\beta(t) = \left(\overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{x}_2\right) = \left(\overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{y}_2\right)$ l'angle positionnant la bielle par rapport au bâti

On cherche ici à exprimer la longueur $\lambda(t)$ en fonction de l'angle $\alpha(t)$.

Remarque

Par la suite, dans un souci de clarté, on ne notera pas la dépendance au temps des paramètres. Ainsi, on se contentera de λ plutôt que $\lambda(t)$. Pour éviter des confusions, on choisi habituellement des noms de paramètres permettant de distinguer les grandeurs dépendantes du temps (λ, η... pour les longueurs et θ, α, β pour les angles) et les grandeurs constantes (a, b... pour les longueurs et δ, ϕ, ψ... pour les angles). Ces règles ne sont pas absolues, mais il est préférable de garder une cohérence dans le choix des noms des grandeurs.

2.1 Écrire une fermeture géométrique

À savoir

Une **fermeture géométrique** est une **relation de Chasles** exploitant des vecteurs liés à différents solides faisant ressortir une relation entre les paramètres géométriques d'un mécanisme.

On écrit ici :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$$

soit

$$a\,\overrightarrow{x}_1 + b\,\overrightarrow{x}_2 - \lambda\,\overrightarrow{y}_0 = \overrightarrow{0}$$

Remarque

La première relation est triviale mais elle a un intérêt à partir du moment où les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont exprimés indépendemment les uns des autres, comme dans la deuxième relation.

2.2 Résoudre une fermeture géométrique

L'écriture d'une fermeture géométrique conduit à une équation vectorielle de laquelle il faut maintenant extraire la relation voulue, ici, λ en fonction de α. Projetons sur une base, par exemple, la base $\left(\overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{z}_0\right)$.

$$\begin{array}{l} (\text{suivant } \overrightarrow{x}_0) \\ (\text{suivant } \overrightarrow{y}_0) \\ (\text{suivant } \overrightarrow{z}_0) \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} a\,\overrightarrow{x}_1\cdot\overrightarrow{x}_0 + b\,\overrightarrow{x}_2\cdot\overrightarrow{x}_0 - \lambda\,\overrightarrow{y}_0\cdot\overrightarrow{x}_0 & = 0 \\ a\,\overrightarrow{x}_1\cdot\overrightarrow{y}_0 + b\,\overrightarrow{x}_2\cdot\overrightarrow{y}_0 - \lambda\,\overrightarrow{y}_0\cdot\overrightarrow{y}_0 & = 0 \\ a\,\overrightarrow{x}_1\cdot\overrightarrow{z}_0 + b\,\overrightarrow{x}_2\cdot\overrightarrow{z}_0 - \lambda\,\overrightarrow{y}_0\cdot\overrightarrow{z}_0 & = 0 \end{array} \right.$$

soit,

$$\left\{ \begin{array}{rl} a\cos(\alpha) + b\cos(\beta) & = 0 \\ a\sin(\alpha) + b\sin(\beta) - \lambda & = 0 \\ 0 & = 0 \end{array} \right.$$

Remarque

La troisième équation n'apporte aucune information car tous les vecteurs projetés sont dans un plan orthogonal à $\overrightarrow{z}_0$. Dans ce cas, il est inutile d'écrire cette équation et on peut se contenter de projeter sur la base du plan $\left(\overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{y}_0\right)$.

Ce système d'équations fait intervenir trois grandeurs variables (c'est-à-dire dépendantes du temps) : α, β et λ. Nous cherchons donc à éliminer β du système d'équations.

2.2.1 Éliminer une grandeur angulaire

Isolons d'abord les termes en β.

$$\begin{cases} b\cos(\beta) &= -a\cos(\alpha) \\ b\sin(\beta) &= -a\sin(\alpha) + \lambda \end{cases}$$

En élevant ces équations au carré et en les sommant, on élimine β. En effet, on a

$$\begin{cases} (b\cos(\beta))^2 &= (-a\cos(\alpha))^2 &= a^2\cos^2(\alpha) \\ (b\sin(\beta))^2 &= (-a\sin(\alpha)+\lambda)^2 \end{cases}$$

donc

$$b^2 = a^2\cos^2(\alpha) + (-a\sin(\alpha)+\lambda)^2 = a^2 - 2a\lambda\sin(\alpha) + \lambda^2$$

On obtient ainsi une équation reliant la position du piston λ à la position angulaire du vilebrequin α, que l'on peut expliciter :

$$\lambda = a\sin(\alpha) + \sqrt{b^2 - a^2\cos^2(\alpha)}$$

Pour aller plus loin

En toute rigueur, il existe deux solutions à cette équation et les deux correspondent à deux possibilités théoriques pour le mécanisme. En effet, le modèle utilisé ne tient pas compte de la forme des pièces. Dans ce cas, pour une même valeur de α, il est tout à fait possible d'avoir deux positions du point C en accord avec le schéma cinématique du compresseur.

Méthode à conaître

Pour eliminer une grandeur angulaire d'une fermeture géométrique :

1) on projette sur une base
2) on isole les termes de la grandeurs à éliminer
3) on élève au carré
4) on somme

Quelques précisions supplémentaires

On ne développe jamais une expression sans raison : la factorisation est toujours plus difficile (identités remarquables etc.) et peut développer une expression sans objectif peut donc entraîner une perte de temps lors de la refactorisation.

À savoir

La relation entre la grandeur géométrique d'entrée et celle de sortie est appelée **loi d'entrée-sortie géométrique**.

2.2.2 Éliminer une grandeur longueur

Pour déterminer les efforts que doit founir le moteur, nous verrons en cours de dynamique en deuxième année qu'il est nécessaire de connaître β en fonction de α. Il faut alors éliminer la grandeur variable λ de la fermeture géométrique

$$a\overrightarrow{x}_1 + b\overrightarrow{x}_2 - \lambda\overrightarrow{y}_0 = \overrightarrow{0}$$

Pour éliminer une grandeur longueur, on projette sur un vecteur pertinent. Ici, on peut projeter l'équation vectorielle sur $\overrightarrow{x}_0$ car $\overrightarrow{x}_0 \cdot \overrightarrow{y}_0 = 0$. Ainsi, on obtient :

$$a\overrightarrow{x}_1 \cdot \overrightarrow{x}_0 + b\overrightarrow{x}_2 \cdot \overrightarrow{x}_0 - \lambda\overrightarrow{y}_0 \cdot \overrightarrow{x}_0 = \overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{x}_0$$

D'où

$$a\cos(\alpha) + b\cos(\beta) = 0$$

Méthode à conaître

Pour eliminer une grandeur longueur d'une fermeture géométrique, on projette sur un vecteur orthogonal à celui portant la grandeur à éliminer.

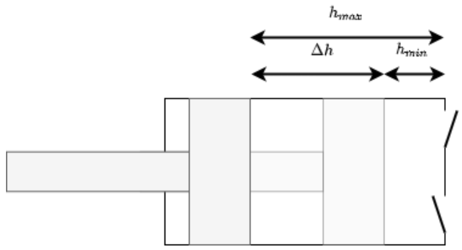
Complément

Déterminer la relation entre le déplacement du piston et le débit

Débit moyen

Quelques précisions supplémentaires

Le volume parcouru par un piston est appelé la **cylindrée**. S'il existe plusieurs pistons, la cylindrée correspond à la somme des cylindrées de chaque piston.
La distance parcourue par un piston est appelé la **course**.



Notons S la section du piston, qui vaut 3 cm^2, et $h(t)$ la profondeur du piston dans la chambre. La cylindrée d'un piston vaut

$$C = S \times \Delta h$$

où $\Delta h = h_{\max} - h_{\min}$ est la course du piston.

Le débit moyen Q d'un piston vaut

$$Q = C \times \frac{\mathrm{d}\,\alpha}{\mathrm{d}\,t}$$

Attention !

Il faut toujours faire attention aux unités. La cylindrée C s'exprime naturellement en m^3, ou encore plus précisément en m^3/tour. Il faut donc exprimer $\frac{\mathrm{d}\,\alpha}{\mathrm{d}\,t}$ en tours par seconde pour obtenir un débit en unités du système international : m^3/s.

✍ Conclure quant à l'exigence de débit moyen.

Débit instantané

Conservons les notations : S la section du piston et $h(t)$ la profondeur du piston dans la chambre. Le volume de la chambre à un instant t est donc $S \times h(t)$. Pendant une durée $\mathrm{d}t$, la variation de volume dans la chambre correspond à l'air délivré par le compresseur, c'est-à-dire au débit d'air instantané $q(t)$ multiplié par l'espace de temps $\mathrm{d}t$, donc

$$q(t)\,\mathrm{d}t = S\,h(t) - S\,h(t+\mathrm{d}t)$$

lorsque h est décroissant, c'est-à-dire pendant la phase de refoulement. Pendant la phase d'admission (h croissant), le débit sortant est nul.

Pendant la phase de refoulement, on a alors

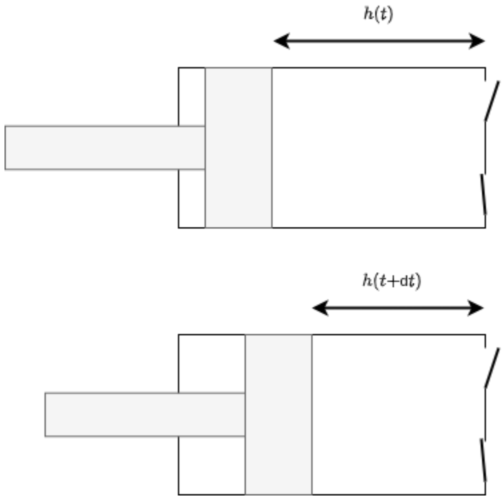
$$q(t) = -S\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t)$$

Dans notre cas, on peut affirmer que la somme $\lambda(t) + h(t)$ est constante, donc

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}(t)$$

et alors

$$q(t) = +S\,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}(t)$$



Par ailleurs, la loi d'entrée-sortie géométrique

$$b^2 = a^2\cos^2(\alpha) + (-a\sin(\alpha) + \lambda)^2$$

fournit, en dérivant par rapport au temps,

$$0 = -2a^2\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\cos(\alpha)\sin(\alpha) + 2\,(-a\sin(\alpha)+\lambda)\left(-a\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\cos(\alpha) + \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\right)$$

soit

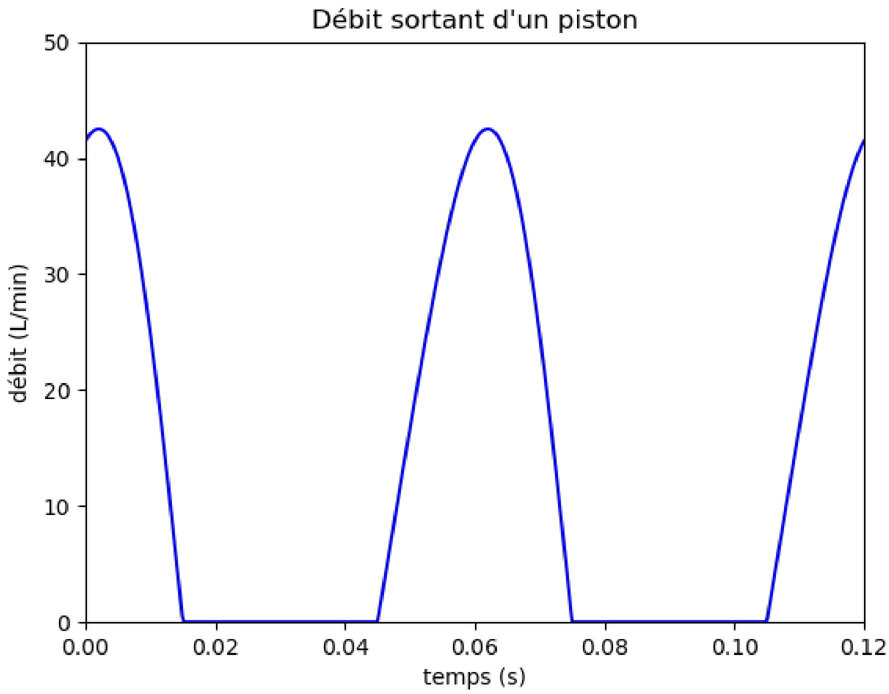
$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = a\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\cos(\alpha)\left(1 + \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \cos^2(\alpha)}}\right)$$

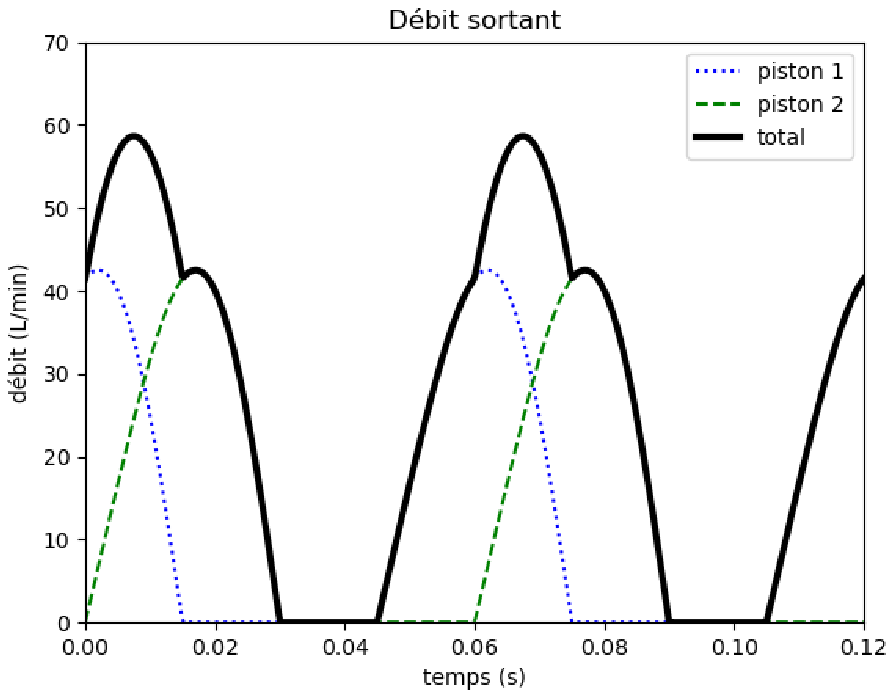
et finalement, pendant la phase d'admission, qui correspond à $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$,

$$q(t) = +Sa\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\cos(\alpha)\left(1 + \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \cos^2(\alpha)}}\right)$$

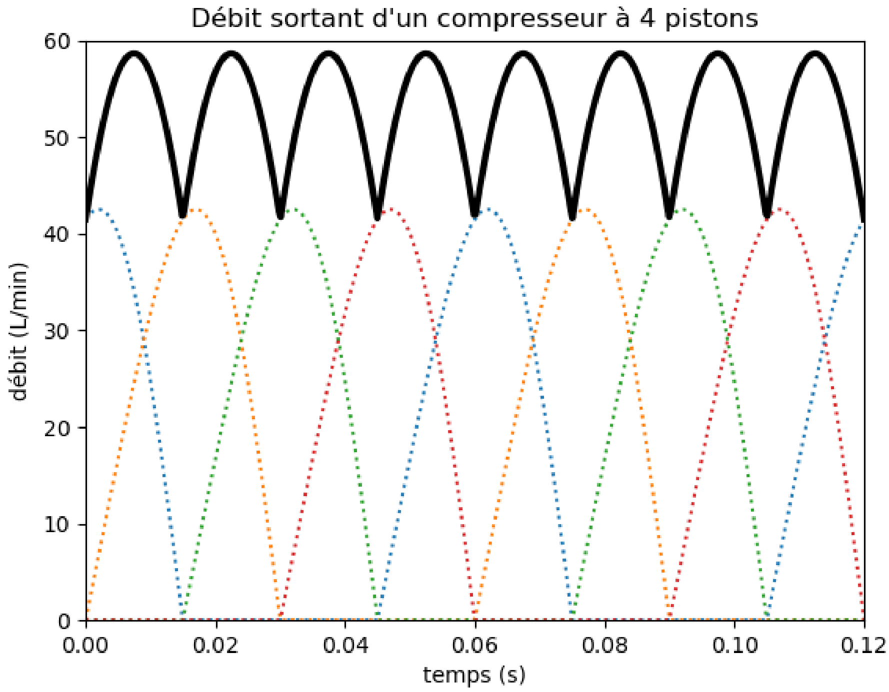
et $q(t) = 0$ pendant la phase d'admission.

Cette étude est faite sur un seul piston du compresseur. Si on y ajoute le deuxième, qui est décalé d'un quart de tour par rapport au premier, on obtient le débit instantané suivant :





✍ Conclure quant à l'exigence de régularité du débit.



✍ Que dire d'un compresseur à 4 pistons ?