

**Séquence 3*****Déterminer la position, la vitesse et l'accélération d'un point*****Mise en bouche****(entraînement de cours – à faire après le cours et à vérifier régulièrement)****Exercice 1 : Définitions et méthodes de cours**

- Donner la définition de la position, de la vitesse et de l'accélération d'un point par rapport à un repère.
- Énoncer les propriétés de base du produit vectoriel.
- Calculer le produit vectoriel entre deux vecteurs définis par des figures planes.
- Calculer la vitesse ou l'accélération d'un point par rapport à un référentiel à partir de sa position par dérivation vectorielle.
- Définir la trajectoire d'un point par rapport à un référentiel.

# Entrée

(pour revoir les bases – pour vérifier qu'on connaît le cours)

## Exercice 1 : Imprimante 3D

Les imprimantes 3D sont des systèmes permettant de réaliser en trois dimensions un objet conçu par ordinateur. Il est possible d'imprimer en matière plastique (le plus courant) mais aussi en alliages métalliques. L'utilité majeure est le prototypage rapide permettant de matérialiser un design avant sa validation et sa production en grande série (dont la préparation est coûteuse) ou encore la production de pièces uniques au design complexe ne pouvant pas être produites facilement par d'autres moyens. Les pièces ainsi obtenues ont généralement des propriétés, notamment en termes de résistance mécanique, inférieures à leurs équivalents traditionnels (réalisés par exemple par usinage).

Les imprimantes 3D à matière plastique fonctionnent par ajout de matière. Elles se composent essentiellement d'un plateau, sur lequel repose la pièce en production et d'une tête d'impression qui dépose le plastique sur la pièce en production. Le modèle ici étudié est tel que le plateau est en mouvement par rapport au bâti et la tête d'impression est montée sur une poutre horizontale. La position de la tête par rapport à la poutre et celle de la poutre par rapport au bâti changent au cours de l'impression.



FIGURE 1 – Imprimante 3D cartésienne (image à gauche et schéma cinématique à droite).

On note :

- Le point  $A$ , fixe par rapport au plateau est positionné par  $\overrightarrow{OA} = \lambda(t) \vec{y}$  ;
- Le point  $P$  correspondant à la position de la buse de dépôt plastique, fixe par rapport au plateau est positionné par  $\overrightarrow{OP} = \eta(t) \vec{x} + \mu(t) \vec{z}$  ;

**Question 1** Tracez le graphe des liaisons de l'imprimante.

**Question 2** Reporter le paramétrage sur le schéma cinématique.

**Question 3** Noter sur le graphe des liaisons le degré de liberté de chaque liaison.

**Question 4** Déterminer la nature ouverte ou fermée de la chaîne de solides puis sa mobilité.

**Question 5** Exprimer la position de  $P$  par rapport au bâti.

Au cours de l'impression d'une couche de plastique, la hauteur de  $P$  (suivant  $\vec{z}$ ) reste constante, donc  $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{z}$  est constant.

**Question 6** Déduisez ce que ceci implique sur les paramètres pilotés de l'imprimante :  $\lambda$ ,  $\eta$  et  $\mu$ .

On admet par la suite que cette contrainte est respectée.

On souhaite déposer du plastique sur un segment de droite de direction  $\vec{x}$  : les points de coordonnées  $(x, y, z)$  par rapport au plateau ( $\vec{AP} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$ ) avec  $x \in \{5; 10\}$  cm,  $y = 0$ ,  $z = h$ . Cette dépose doit se faire à vitesse constante  $\vec{V}^{\text{souhaitée}}(P/\text{plateau}) = V_0\vec{x}$  avec  $V_0 = 1$  cm/s.

**Question 7** Exprimer  $\vec{V}(P/\text{plateau})$  en fonction de  $\lambda$ ,  $\eta$  et  $\mu$ .

**Question 8** En écrivant l'égalité entre la vitesse exprimée ci-dessus et la vitesse souhaitée, déduire l'expression de  $\lambda$ ,  $\eta$  et  $\mu$ .

**Question 9** Vérifier la cohérence de ce résultat vis-à-vis du problème. Le plateau est-il en mouvement par rapport au bâti?

**Question 10** Quelle est la trajectoire de  $P$  par rapport au plateau? Et par rapport au bâti?

On s'intéresse à présent au tracé d'un segment de direction  $\vec{y}$  : les points de coordonnées  $(x, y, z)$  par rapport au plateau avec  $y \in \{5; 10\}$  cm,  $x = 0$ ,  $z = h$ . Cette dépose doit se faire à vitesse constante  $\vec{V}(P/\text{plateau})^{\text{souhaitée}} = V_0\vec{y}$  avec  $V_0 = 1$  cm/s.

**Question 11** En reprenant l'expression de la vitesse  $\vec{V}(P/\text{plateau})$  et en écrivant l'égalité avec la vitesse souhaitée, exprimer  $\lambda$ ,  $\eta$  et  $\mu$ .

**Question 12** Exprimer la position de  $P$  par rapport au bâti.

**Question 13** Vérifier la cohérence de ce résultat. Quel est alors le mouvement de la tête d'impression par rapport au bâti? Et celle du plateau?

**Question 14** Quelle est la trajectoire de  $P$  par rapport au plateau? par rapport au bâti?

# Plat

## (exercices de TD – à préparer et à corriger pendant la séance)

### Exercice 2 : Centrifugeuse humaine

Les pilotes de chasse subissent lors de leurs missions des accélérations bien supérieures à celle subie du fait du seul champ de gravité terrestre. Un pilote en virage serré à grande vitesse ressentira jusqu'à 12g ( $g$  : l'accélération de la pesanteur) contre 5g pour un pilote de formule 1 (relevé dans le virage de l'Eau Rouge à Spa), et 1g pour toute personne sur Terre au niveau de la mer. Une personne normale s'évanouit entre 4 et 6g. Avec l'augmentation de l'accélération, les premiers effets ressentis sont visuels : perte de la vision des couleurs, suivi par la vision en tunnel (vision périphérique perdue), puis la perte complète de la vision tandis que la conscience demeure. Pour de plus grandes accélérations, la perte de conscience subite est due à un manque d'oxygénation du cerveau lorsque les effets d'inertie empêchent le sang de l'irriguer.

Il apparaît également que le corps humain aura une résistance différente à une même accélération selon sa direction. En effet, il résistera mieux à une direction transversale (axe avant-arrière) qu'à une accélération longitudinale (axe de la tête aux pieds), cette dernière étant la plus critique par manque ou excès d'irrigation du cerveau.

Afin de familiariser et de tester les pilotes à ces effets, les centres d'entraînement ont mis au point des systèmes expérimentaux au sol capables de les soumettre à de telles accélérations : les centrifugeuses.

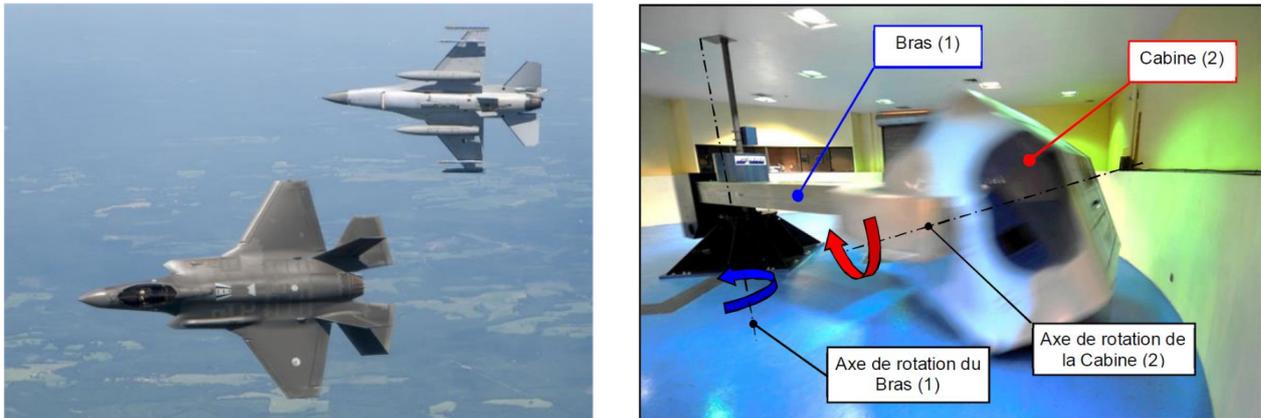


FIGURE 1 – Avions de chasse en vol (à gauche) et centrifugeuse humaine (à droite).

La centrifugeuse étudiée est principalement constituée d'un bras d'entraînement 1 et d'une cabine 2 pour accueillir la personne subissant le test. Le bras 1 est en rotation par rapport au sol 0 autour d'un axe vertical. La cabine 2 est en rotation par rapport au bras 1 autour d'un axe horizontal situé à l'extrémité du bras.

On donne le schéma cinématique ci-contre de cette centrifugeuse.

- $\vec{OA} = a \vec{x}_1$  avec  $a = 3$  m
- $\vec{AG} = b \vec{x}_2$  avec  $b = 1$  m

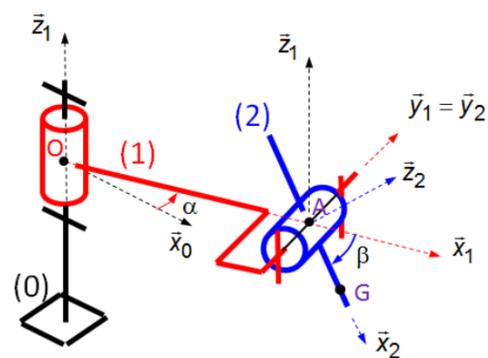


FIGURE 2 – Schéma cinématique de la centrifugeuse humaine.

On note  $G$  le centre de gravité de la personne subissant le test, considérée comme fixe dans la cabine 2. La position angulaire commandée de cette cabine 2 par rapport au bras 1 est fixe par rapport à chaque test.

Le cahier des charges impose que la vitesse de  $G$  par rapport au sol ne dépasse pas  $V_{\max} = 70$  km/h (pour des raisons de sécurité en cas de faille mécanique). Le cahier des charges impose également que l'accélération de  $G$  par rapport au sol ne dépasse pas  $\Gamma_{\max} = 9g$  pour des raisons de santé du pilote,  $g = 9,81$  m·s<sup>-2</sup> étant l'accélération de la pesanteur.

**Question 1** Réaliser un graphe des liaisons du mécanisme.

**Question 2** Exprimer la vitesse et l'accélération de  $G$  par rapport au bâti.

On s'intéresse au fonctionnement dans le cas où  $\dot{\alpha} = 0,2 \text{ rad/s}$  et  $\beta$  est constant et vaut  $60^\circ$ .

**Question 3** Simplifier les expressions de la vitesse et de l'accélération de  $G$  par rapport au bâti dans ces conditions d'utilisation. On ne cherchera pas à introduire des valeurs numériques mais uniquement à supprimer les termes nuls.

**Question 4** De quels paramètres dépendent la vitesse et l'accélération de  $G$ ?

On s'intéresse à présent au dimensionnement du moteur et en particulier à la vitesse de rotation maximale qu'il peut avoir tout en respectant les contraintes de sécurité.

**Question 5** Quelle configuration géométrique (valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ ) conduisent à la plus grande norme de la vitesse pour  $\dot{\alpha}$  donné, en imposant  $\dot{\beta} = 0$ ? de l'accélération?

**Question 6** En se plaçant dans cette configuration, déterminer la vitesse de rotation maximale du bras permettant de vérifier la contrainte en vitesse maximale.

**Question 7** En se plaçant dans cette configuration, déterminer la vitesse de rotation maximale du bras permettant de vérifier la contrainte en accélération maximale.

**Question 8** Conclure sur la valeur maximale de vitesse de rotation qui doit être autorisée pour le bras.

En conditions de vol, une trop grande accélération est évidemment un danger vital pour le pilote.

**Question\* 9** Déterminer le rayon de la trajectoire circulaire la plus critique d'un avion de chasse volant à 2000 km/h.

# Dessert

(pour aller plus loin)

## Exercice 3 : Centrifugeuse de laboratoire



FIGURE 1 – Centrifugeuse d'analyses médicales à l'arrêt (à gauche) et en rotation (à droite).

Une centrifugeuse de laboratoire permet de séparer différents composants d'un liquide en fonction de leur densité. Dans le domaine médical par exemple, cet appareil permet de séparer le sang extrait d'un patient en trois phases distinctes : le plasma, les globules blancs et les globules rouges. Il est alors possible d'effectuer des analyses sur chacune de ces phases.

Le schéma cinématique de la centrifugeuse est fourni figure 4. Le rotor (1) est en rotation par rapport au bâti autour de l'axe  $O\vec{y}_0$ . Cette rotation est pilotée par un moteur. Le support et les éprouvettes (2), rendus solidaires entre eux par un système de fixation, sont en rotation par rapport au rotor (1) autour de l'axe  $A\vec{z}_1$ . Cette liaison n'est pas motorisée mais une étude dynamique permet de prouver qu'en régime permanent l'angle  $\alpha$  est tel que

$$g \tan(\alpha) = |\overrightarrow{OG} \cdot \vec{x}_1| \|\vec{\Omega}(1/0)\|^2$$

où  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$  est l'accélération de la pesanteur. Notons qu'il existe différents supports (2) espacés uniformément autour du rotor (1). On ne s'intéressera qu'à l'un d'entre eux ; les conclusions seront les mêmes pour les autres supports.

Les dimensions des pièces ont déjà été fixées à l'exception du diamètre interne du carter, que l'on notera  $D$ . L'objectif est de déterminer si le moteur choisi (cf. figure 3) permet de valider ou non le cahier des charges (cf. figure 2).

- $R = 50 \text{ mm}$
- $h_G = 22 \text{ mm}$
- $d = 21 \text{ mm}$
- $h = 38 \text{ mm}$

Un extrait du cahier des charges est donné en figure et un schéma cinématique de la centrifugeuse est fourni figure 4.

Id	Exigence	Critère	Niveau	Flexibilité
1	Accélération centrifugation	$\ \vec{\Gamma}(M/0)\ , M \in \{B, C\}$	5 g	$\pm 10\%$
2	Accélération centrifugation uniforme	$ \ \vec{\Gamma}(B/0)\  - \ \vec{\Gamma}(C/0)\  $	$0 \text{ ms}^{-2}$	$\pm 5\%$ de $\ \vec{\Gamma}(G/0)\ $
3	Non-contact éprouvettes-carter	$D - \overrightarrow{OC} \cdot \vec{x}_1$	$> 0,5 \text{ cm}$	—
4	Faible encombrement	$D - \overrightarrow{OC} \cdot \vec{x}_1$	$< 1,5 \text{ cm}$	—
5	Phase accélération	durée	$< 1 \text{ s}$	0,5 s

FIGURE 2 – Extrait du cahier des charges de la centrifugeuse.

**Question 1** Déterminez et calculez la durée de la phase d'accélération de la centrifugeuse avant d'atteindre sa vitesse de rotation nominale. Le cahier des charges est-il respecté ?

**Question 2** Établissez le graphe de structure du mécanisme.

Caractéristique	Valeur
vitesse de rotation nominale	240 tr/min
Accélération max	21 rad s <sup>-2</sup>

FIGURE 3 – Extrait de la documentation technique du moteur.

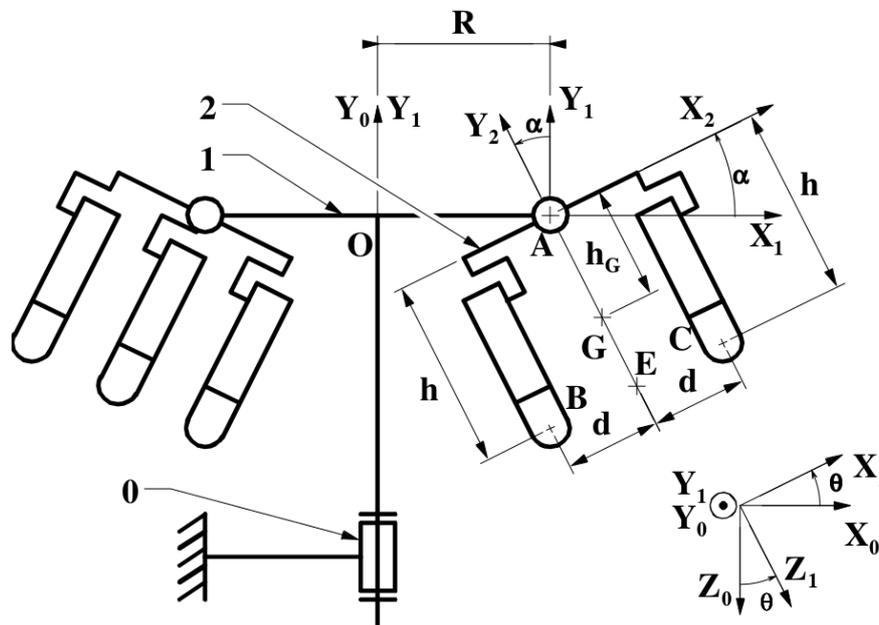


FIGURE 4 – Schéma cinématique de la centrifugeuse.

- Question 3** Exprimez l'accélération des points B et C par rapport au bâti de la centrifugeuse.
- Question 4** Traduisez l'hypothèse de régime permanent.
- Question 5** Simplifiez l'expression de ces accélérations en prenant en compte l'hypothèse de régime permanent.
- Question 6** Exprimez la norme de l'accélération par rapport au bâti des points B et C en fonction des différents paramètres et de leurs dérivées.
- Question 7** Même question sans faire l'hypothèse de régime permanent.
- Question 8** Déterminez la position angulaire du support par rapport au rotor. Vous pourrez utiliser un outil numérique.
- Question 9** Calculez la norme de l'accélération des points B et C par rapport au bâti.
- Question 10** Concluez quant au respect du cahier des charges.
- Question 11** Quel(s) paramètre(s) peut-on modifier pour diminuer l'écart d'accélération entre les éprouvettes ?
- Question 12** Déterminez le diamètre interne du carter pour que le cahier des charges soit respecté (exigences 3 et 4).