Séquence 4

Décrire et prévoir le comportement temporel d'un système continu

Mise en bouche

1) Définissez l'invariance d'un système continu.
2) Transformez les équations différentielles suivantes dans le domaine de Laplace, écrivez la fonction de transfert associée à chacune d'elles et déterminez son ordre et sa classe :
3) soit f une fonction de transformée de Laplace F. Donner l'expression de la transformée de Laplace de la dérivée et d'une primitive de f : $\frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,t}$ et $\int_0^t f(t)\mathrm{d}t$
4) Définissez les conditions de Heaviside.
5) Donnez la transformée de Laplace de $3\delta(t)$.
6) Donnez la transformée de Laplace de $5u(t-3)$.
7) Donnez la transformée de Laplace de $2tu(t)$.
8) Énoncez le théorème de la valeur finale.
9) Énoncez le théorème de la valeur initiale.

Pour ceux qui aiment démarrer le repas avec un peu de piment...

1) Donnez la transformée de Laplace de $t^2u(t)$.
2) Retrouvez la transformée de Laplace de $\cos(t)u(t)$ à partir de celle de $\sin(t)u(t)$.

Entrée

Exercice 1 : Transformée de Laplace

Le comportement de trois systèmes a été modélisé et a conduit à l'écriture de ces trois équations différentielles de comportement :

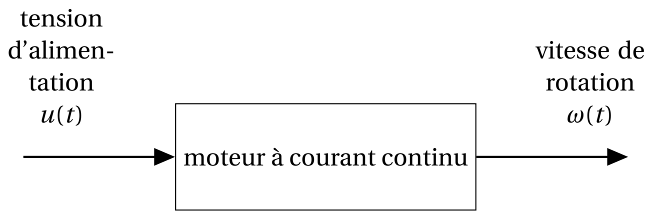
1) $3\frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,t}(t)+f(t)=2h(t)$, entrée h, sortie f.
2) $2\frac{\mathrm{d}^3\,u}{\mathrm{d}\,t^3}(t)+5\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,t}(t)+u(t)-7\frac{\mathrm{d}^2\,v}{\mathrm{d}\,t^2}(t)-2v(t)=0$, entrée v, sortie u
3) $\frac{\mathrm{d}^2\,a}{\mathrm{d}\,t^2}(t)+\frac{\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,t}(t)=2\frac{\mathrm{d}\,b}{\mathrm{d}\,t}(t)+b(t)$, entrée b, sortie a

Question 1 Passer les équations différentielles dans le domaine de Laplace et en déduire la fonction de transfert de chaque système.

Question 2 Donner l'ordre et la classe de chacun des systèmes.

Plat unique

Exercice 1 : Réponse d'un moteur à courant continu



On se donne le modèle de comportement suivant pour un moteur à courant continu :

$$K_e K_c \omega(t) + RJ\frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,t}(t) = K_c u(t)$$

où

- $K_e = 0,1$ V/rad/s est la constante de force électromotrice :
- $K_c = 0,1$ N· m/A est la constante de couple
- $R = 0,1\ \Omega$ est la résistance interne du moteur
- $J = 0,5$ mH est l'inductance de la bobine du moteur

Question 1 Écrire l'équation de comportement dans le domaine de Laplace.

Question 2 Écrire la fonction de transfert du moteur à courant continu.

On soumet le système à un échelon de tension d'amplitude U_0.

Question 3 Écrire la forme de cet échelon dans le domaine temporel puis dans le domaine de Laplace.

Question 4 Écrire l'expression de la vitesse de rotation du moteur dans le domaine de Laplace.

Question 5 Prouver que celle-ci peut s'écrire sous la forme :

$$\Omega(p) = \frac{a}{1+\tau p} + \frac{b}{p}$$

avec a et b deux constantes qu'on déterminera.

Question 6 En appliquant le théorème de la valeur finale, déterminer la réponse à l'infini du moteur soumis à un échelon de tension de 24 V.

Question* 7 En appliquant le théorème de la valeur initiale, montrer qu'à l'instant 0, la vitesse de rotation du moteur est nulle.

Question* 8 En appliquant le théorème de la valeur initiale, montrer qu'à l'instant 0, la pente de la vitesse de rotation du moteur est égale à $\frac{U_0}{\tau}$.

Question* 9 Déduire de l'expression de $\Omega(p)$ celle de la vitesse de rotation dans le domaine temporel $\omega(t)$. Tracer $\omega(t)$. Ajouter la tangente à l'origine de $\omega(t)$ sur le tracé.