

Séquence 5

Modéliser cinématiquement un ensemble mécanique**Objectif de la séquence**

La méthode de calcul de la vitesse et l'accélération d'un point par rapport à un solide a été vue précédemment. Les points étaient alors définis à partir de leur position, d'une façon purement géométrique. Dans ce cours nous identifierons les limites de la définition géométrique des points. Nous nous donnerons ensuite des outils adaptés à l'étude de la cinématique des solides et notamment à la description des mouvements autorisés par les liaisons normalisées.

Table des matières**Page**

1 Torseurs cinématiques	1
2 Modélisation des liaisons et torseurs cinématiques associés	6
3 Liaisons équivalentes	10

1 Torseurs cinématiques**1.1 Limite de la définition géométrique des points**

FIGURE 1 – Trajectoire d'un point de la roue avant de la moto par rapport au sol et étude de la vitesse du point de contact.

L'observation de la trajectoire d'un point de la roue avant de la moto montre que la vitesse de celui-ci est nulle au moment où il est en contact avec le sol¹. Or, le point de contact, situé toujours à la verticale du centre de la roue avance à la même vitesse que la moto : sa vitesse par rapport au sol est donc non nulle. On peut également s'intéresser à la vitesse du point du sol qui est en contact avec la roue à ce même instant : sa vitesse par rapport au sol est forcément nulle, puisque le point en question est fixe par rapport au sol par définition.

1.2 Notion de point appartenant à un solide

La définition d'un point par sa position dans l'espace est donc insuffisante pour décrire la vitesse des points matériels (point de la roue ou du sol) qui sont à un instant donné coïncidents avec des points géométriques particuliers (point de contact).

**À savoir**

On distingue les **points géométriques**, définis uniquement par leur position dans l'espace, des **points appartenant à un solide** (ou **fixes par rapport à un solide** ou **matériellement/naturellement liés à un solide**) dont le mouvement est directement lié à celui du solide.

On note habituellement cette appartenance avec le signe \in .

1. Sa direction est de plus en plus proche de la verticale lorsque l'instant du contact approche mais sa norme est de plus en plus petite jusqu'à ce qu'elle s'annule.

Si on note A le centre de la roue de rayon R , M le point de contact entre la roue et le sol et \vec{z}_0 la verticale ascendante, alors on distinguera

- M , le point géométrique défini par $\overrightarrow{AM} = -R \vec{z}_0$;
- $M \in \text{roue}$, le point appartenant à la roue et coïncidant avec le point géométrique de contact entre la roue et le sol, M , à un instant donné;
- $M \in \text{sol}$, le point appartenant au sol et coïncidant avec le point géométrique de contact entre la roue et le sol, M , à un instant donné;

Bien que ces trois points aient à un instant donné la même position dans l'espace, ils n'ont *a priori* pas la même vitesse (même à l'instant où ils sont coïncidents dans l'espace) et leur trajectoire par rapport au sol est différente.

1.3 Notion de champ scalaire et vectoriel

À savoir

On appelle **champ scalaire** une application associant à chaque point du plan ou de l'espace une valeur scalaire (ici, un réel).

La carte des reliefs est une représentation d'un champ scalaire : l'altitude. À chaque point du plan est associée l'altitude en ce point. La carte des prévisions de température en France diffusée quotidiennement est également un exemple de champ scalaire : à chaque point du plan est associée la valeur de la température en ce point. On pourrait également définir le champ des températures à différentes altitudes; on aurait alors un champ scalaire défini dans l'espace.

À savoir

On définit un **champ vectoriel** comme une application du plan ou de l'espace qui associe à chaque point un vecteur.

La carte de la vitesse de l'air est un exemple de champ vectoriel en deux dimensions.



FIGURE 2 – Champ scalaire d'altitude (à gauche) et de température (au centre) et champ vectoriel de vitesse du vent (à droite).

Un champ vectoriel qui nous intéresse particulièrement est le champ des vitesses d'un solide par rapport à un autre. Déterminons ses caractéristiques.

1.4 Champ vectoriel des vitesses d'un solide indéformable

On s'intéresse à un solide \mathcal{S} supposé indéformable et à deux points A et B fixes par rapport à ce solide. Ces points sont parfois notés $A_{\epsilon\mathcal{S}}$ et $B_{\epsilon\mathcal{S}}$ pour expliciter leur nature matérielle.

L'indéformabilité se traduit par

$$\|\overrightarrow{A_{\epsilon\mathcal{S}}B_{\epsilon\mathcal{S}}}\| = \text{cte}$$

Or, $\|\overrightarrow{A_{\epsilon\mathcal{S}}B_{\epsilon\mathcal{S}}}\|^2 = \overrightarrow{A_{\epsilon\mathcal{S}}B_{\epsilon\mathcal{S}}} \cdot \overrightarrow{A_{\epsilon\mathcal{S}}B_{\epsilon\mathcal{S}}}$ par définition. La condition d'indéformabilité implique donc, en dérivant² l'expression précédente par rapport au temps et par rapport à une base \mathcal{B}_0 quelconque, par

$$\overrightarrow{A_{\epsilon\mathcal{S}}B_{\epsilon\mathcal{S}}} \cdot \left. \frac{d\overrightarrow{A_{\epsilon\mathcal{S}}B_{\epsilon\mathcal{S}}}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} + \left. \frac{d\overrightarrow{A_{\epsilon\mathcal{S}}B_{\epsilon\mathcal{S}}}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} \cdot \overrightarrow{A_{\epsilon\mathcal{S}}B_{\epsilon\mathcal{S}}} = 0$$

Par symétrie du produit scalaire on déduit

$$\overrightarrow{A_{\epsilon\mathcal{S}}B_{\epsilon\mathcal{S}}} \cdot \left. \frac{d\overrightarrow{A_{\epsilon\mathcal{S}}B_{\epsilon\mathcal{S}}}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = 0$$

Soit O l'origine d'un repère $\mathcal{R}_0 = (O, \mathcal{B}_0)$, alors

$$\left. \frac{d\overrightarrow{A_{\epsilon\mathcal{S}}B_{\epsilon\mathcal{S}}}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = \left. \frac{d\overrightarrow{OB_{\epsilon\mathcal{S}}}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} - \left. \frac{d\overrightarrow{OA_{\epsilon\mathcal{S}}}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0}$$

Ces grandeurs sont les vitesses par rapport à \mathcal{R}_0 des points matériels $A_{\epsilon\mathcal{S}}$ et $B_{\epsilon\mathcal{S}}$, que l'on note

$$\left. \frac{d\overrightarrow{OB_{\epsilon\mathcal{S}}}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = \vec{V}(B \in \mathcal{S} / \mathcal{R}_0) \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\overrightarrow{OA_{\epsilon\mathcal{S}}}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = \vec{V}(A \in \mathcal{S} / \mathcal{R}_0)$$

On déduit finalement que, pour A et B appartenant à \mathcal{S} indéformable

$$\overrightarrow{A_{\epsilon\mathcal{S}}B_{\epsilon\mathcal{S}}} \cdot \left(\vec{V}(B \in \mathcal{S} / \mathcal{R}_0) - \vec{V}(A \in \mathcal{S} / \mathcal{R}_0) \right) = 0$$

Le vecteur \overrightarrow{AB} est par nature le même à un instant donné que $\overrightarrow{A_{\epsilon\mathcal{S}}B_{\epsilon\mathcal{S}}}$, donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \left(\vec{V}(B \in \mathcal{S} / \mathcal{R}_0) - \vec{V}(A \in \mathcal{S} / \mathcal{R}_0) \right) = 0$$

ou encore

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}(B \in \mathcal{S} / \mathcal{R}_0) = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}(A \in \mathcal{S} / \mathcal{R}_0)$$



Pour aller plus loin

Le champ vectoriel des vitesses d'un solide indéformable est dit **équiprojectif** : la projection de ce champ sur un vecteur liant deux points est la même en ces deux points.



Remarque

Ceci se traduit naturellement dans des cas particuliers. Par exemple, si la vitesse de A est nulle, alors la vitesse de B est orthogonale à (AB) pour assurer l'indéformabilité du solide. Par ailleurs, si les deux vitesses sont de direction (AB) , elles sont forcément égales comme pour un train avançant en ligne droite.

2. La dérivée du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ vaut $\frac{d}{dt}(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_B} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_B}$ en dérivant les vecteurs \vec{u} et \vec{v} en supposant une même base \mathcal{B} fixe.

1.5 Torseur cinématique

La relation $\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{V}(B \in \mathcal{S} | \mathcal{R}_0) - \vec{V}(A \in \mathcal{S} | \mathcal{R}_0)) = 0$ implique l'existence d'un vecteur, le vecteur taux de rotation de \mathcal{S} par rapport à \mathcal{B}_0 , noté $\vec{\Omega}(\mathcal{S} | \mathcal{B}_0)$, permettant d'exprimer la vitesse d'un point matériel en fonction de la vitesse d'un autre point appartenant au même solide :



À savoir

Formule de Varignon (ou formule de changement de point)

$$\vec{V}(B \in \mathcal{S} | \mathcal{R}_0) = \vec{V}(A \in \mathcal{S} | \mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\mathcal{S} | \mathcal{B}_0) \wedge \overrightarrow{AB}$$



Remarque

Pour décrire le **champ des vitesses** des points d'un solide indéformable par rapport à un référentiel, il suffit alors de donner la **vitesse en un point quelconque**, la **position du point** et le **vecteur taux de rotation**.



À savoir

L'ensemble du champ de vecteurs vitesse d'un solide indéformable \mathcal{S} par rapport à un repère \mathcal{R}_0 est appelé **torseur cinématique** du solide \mathcal{S} par rapport au repère 0 et se note $\{\mathcal{V}_{\mathcal{S} | \mathcal{R}_0}\}$.



À savoir

Pour caractériser un torseur cinématique, on indique entre accolades : **en haut le vecteur taux de rotation** et **en bas le vecteur vitesse en un point**. À l'extérieur des accolades et en indice, on précise **le point choisi** pour exprimer la vitesse.

$$\{\mathcal{V}_{\mathcal{S} | \mathcal{R}_0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(\mathcal{S} | \mathcal{B}_0) \\ \vec{V}(M \in \mathcal{S} | \mathcal{R}_0) \end{array} \right\}_M$$

Il est également possible de noter un torseur à partir des composantes des deux vecteurs qui le composent exprimées dans une certaine base. Par exemple, si on se donne une base $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et si $\vec{\Omega}(\mathcal{S} | \mathcal{B}_0) = \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z}$ et $\vec{V}(M \in \mathcal{S} | \mathcal{R}_0) = V_{Mx} \vec{x} + V_{My} \vec{y} + V_{Mz} \vec{z}$, alors on peut noter

$$\{\mathcal{V}_{\mathcal{S} | \mathcal{R}_0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(\mathcal{S} | \mathcal{B}_0) \\ \vec{V}(M \in \mathcal{S} | \mathcal{R}_0) \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{cc} \omega_x & V_{Mx} \\ \omega_y & V_{My} \\ \omega_z & V_{Mz} \end{array} \right\}_{M, \mathcal{B}}$$

Le **vecteur taux de rotation** s'écrit sur la **colonne de gauche**. La **vitesse** du point choisi (ici M) s'écrit sur la **colonne droite**. Il faut également préciser la **base d'expression** des vecteurs du torseur.

 **Attention !**

Un même torseur cinématique a une infinité d'écritures possibles puisqu'il est possible d'écrire la vitesse en n'importe quel point : le vecteur taux de rotation sera toujours le même (on dira qu'il s'agit d'un **invariant** du torseur, en particulier de son **invariant vectoriel**) mais le point d'expression de la vitesse, et donc celle-ci, est arbitraire.

 **Pour aller plus loin**

Il existe une autre grandeur qui est constante quel que soit le point d'expression du torseur et qui constitue une autre invariant, dit **invariant scalaire** :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{B}_0) \cdot \vec{V}(M \in \mathcal{S}/\mathcal{R}_0) = \text{cte}$$

En effet la valeur de ce scalaire est indépendante du choix du point M comme on peut le prouver en appliquant la formule de Varignon.

(preuve à faire en exercice pour les plus motivés)

 **Attention !**

Le **torseur cinématique** d'un solide par rapport à un autre fournit **toute l'information** sur le mouvement d'un solide par rapport à l'autre : connaître le torseur cinématique entre deux solides est équivalent à **connaître la vitesse de chacun des points** de l'un des solides par rapport à l'autre.

 **Pour aller bien plus loin ☕**
Remarques sur l'accélération

Il est également possible de définir le champ des accélérations des points d'un solide par rapport à un autre. En revanche, **le champ des accélérations n'est pas équiprojectif** et ne peut donc pas s'écrire sous la forme d'un torseur. La relation liant l'accélération des points d'un solide est

$$\vec{\Gamma}(B \in \mathcal{S}/\mathcal{R}_0) = \vec{\Gamma}(A \in \mathcal{S}/\mathcal{R}_0) + \left. \frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{B}_0)}{dt} \right|_0 \wedge \vec{AB} + \vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{B}_0) \wedge \left(\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{B}_0) \wedge \vec{AB} \right)$$

2 Modélisation des liaisons et torseurs cinématiques associés

2.1 Modélisation des liaisons



À savoir

Une **liaison mécanique** est le résultat d'un **contact** entre deux solides qui conduit à une **contrainte de mouvement** de l'un par rapport à l'autre.

Par exemple, lorsque deux surfaces cylindriques (l'une intérieure et l'autre extérieure) appartenant à deux solides sont en contact, les seuls mouvements possibles de l'un par rapport à l'autre sont une rotation autour de l'axe des cylindres et une translation de direction celle de l'axe. Cette liaison est appelée pivot-glissant et est donc caractérisée par un axe. Le diamètre des cylindres importe peu : les mouvements possibles entre les solides ne dépendent que de la position de l'axe. Si on se donne un repère $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tel que $(A\vec{x})$ est l'axe de la liaison, on pourra dire que la liaison autorise la translation de direction \vec{x} , souvent abrégée T_x et la rotation autour de \vec{x} , souvent abrégée R_x .



Méthode à connaître

L'analyse des **surfaces en contact** entre des solides ou des **contraintes de mouvement** entre eux permet de déterminer la nature de la **liaison** et ses caractéristiques.

Le tableau 1 (en fin de polycopié) regroupe les liaisons normalisées à connaître (le dessin 3D est donné à titre indicatif).

2.2 Torseurs cinématiques associés aux liaisons

La présence d'une liaison entre deux solides peut se traduire par une contrainte sur la forme que peut avoir le champ des vecteurs vitesse de l'un des solides par rapport à l'autre, c'est-à-dire, le torseur cinématique de l'un par rapport à l'autre. Par souci de simplicité, on dit qu'il s'agit du **torseur cinématique de la liaison**.

Intéressons-nous à la forme du torseur cinématiques d'un solide (2) par rapport à un solide (1).

2.2.1 Liaison libre



À savoir

En l'absence de liaison, aussi appelé **liaison libre**, le torseur cinématique de (2) par rapport à (1) $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$ est quelconque. On peut écrire que sa forme générale, dans une base \mathcal{B} quelconque et exprimé en un point M quelconque est

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_x \quad V_{Mx} \\ \omega_y \quad V_{My} \\ \omega_z \quad V_{Mz} \end{array} \right\}_{M, \mathcal{B}}$$

2.2.2 Liaison encastrement



À savoir

Si les deux solides sont fixes l'un par rapport à l'autre, on dit qu'il y a une **liaison encastrement** et le torseur cinématique de (2) par rapport à (1) est nul (toutes les vitesses de (2) par rapport à (1) sont nulles) :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \end{array} \right\}_{M, \mathcal{B}}$$

L'expression du torseur nul est indépendant du point d'expression et est noté simplement $\{0\}$.

2.2.3 Autres liaisons

La présence d'une liaison pivot d'axe $O\vec{x}$ impliquera que seule la rotation d'axe $O\vec{x}$ sera autorisée. Autrement dit, en écrivant le torseur en A et l'exprimant dans une base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, tous les mouvements élémentaires autres que R_x seront empêchés et donc la composante correspondante du torseur nulle : $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$.

Cette expression traduit que la liaison pivot entre (1) et (2) autorise la rotation autour de $O\vec{x}$ mais empêche les autres mouvements.

Remarque

Évidemment, les deux solides peuvent rester immobiles l'un par rapport à l'autre et donc avoir $\omega_x = 0$. Cette approche permet d'exprimer la forme **possible** du torseur cinématique de la liaison et non l'expression exacte. La présence d'une liaison pivot entre une porte et un mur n'impose pas la vitesse de fermeture de celle-ci.

Pour aller bien plus loin ☕

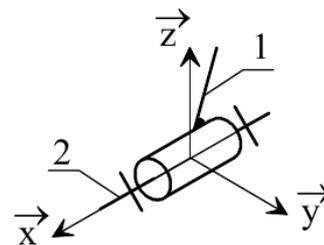
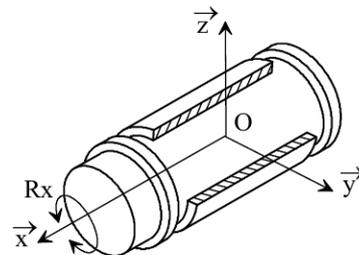
L'ensemble des torseurs (muni des opérations somme et produit externe) est un espace vectoriel de dimension 6 : il y a au plus six mouvements élémentaires possibles (trois rotations et trois translations) qui constituent une base de cet espace. Un torseur donné se caractérise par sa projection dans chacun des éléments de cette base, donc par l'amplitude de chacun de ces mouvements élémentaires (vitesse de translation suivant \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} et taux de rotation suivant \vec{x} , \vec{y} et \vec{z}).

La présence d'une liaison revient à restreindre la dimension de cet espace vectoriel en imposant un certain nombre de projections dans cette base des torseurs comme étant nulles.

Revenons à l'expression du torseur cinématique d'une liaison pivot d'axe ($O\vec{x}$) entre un solide (1) et un solide (2) :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

La forme³ de ce torseur cinématique donnée ci-dessus n'est valable que pour un point de l'axe.



En un point n'appartenant pas à l'axe, l'expression du même torseur sera différente. Par exemple, si on se donne un point A à la surface de l'arbre de la figure 3 (haut) tel que $\vec{OA} = a\vec{y}$, alors $\vec{V}(A \in 2/1) = \vec{V}(O \in 2/1) + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{OA} = \vec{0} + \omega_x \vec{x} \wedge a\vec{y} = a\omega_x \vec{z}$. Ainsi, le torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$ peut également s'écrire

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x \vec{x} \\ a\omega_x \vec{z} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a\omega_x \end{Bmatrix}_{A,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

FIGURE 3 – Assemblage autorisant uniquement la rotation de l'arbre (2) par rapport à l'alésage (1) autour de l'axe de l'arbre (en haut) et modélisation de l'assemblage sous forme de schéma cinématique comportant une liaison pivot (en bas).

3. Composantes nulles du torseur

À savoir

On préfère toujours exprimer les torseurs cinématiques sous leur forme la plus compacte, en choisissant un point pertinent. Sous leur forme la plus compacte, on peut identifier les mouvements autorisés par la liaison : chaque composante de la vitesse de rotation (à gauche) traduit l'autorisation d'une rotation autour d'un axe et chaque composante de la vitesse (à droite) traduit l'autorisation d'une translation suivant une direction.

2.3 Mouvements plans

Lorsque la vitesse de tous les points d'un solide par rapport à un autre appartiennent à un même plan (l'une des composantes est toujours nulle), alors on peut affirmer que le vecteur taux de rotation est porté par le vecteur normal à ce plan. Dans ce cas, le mouvement est qualifié de **plan**. On précise alors le vecteur normal au plan.



Pour aller plus loin

La réciproque n'est pas vraie : que le vecteur taux de rotation soit porté par un vecteur unitaire particulier n'a aucune implication directe sur la direction des vitesses, comme dans le cas du vol d'un Frisbee ou d'un ballon de rugby.

À savoir

Sous l'hypothèse de mouvement plan, certaines composantes des torseurs cinématiques sont forcément nulles. Prenons par exemple un mouvement plan de normale \vec{z} . La composante suivant \vec{z} des vitesses est forcément nulle. De plus, les vitesses de rotation autour de \vec{x} et de \vec{y} sont également nulles car elles sont à l'origine de vitesses portées par \vec{z} .

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{array} \right\}_{M,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \rightsquigarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}_{M,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

On se place dans le cadre des mouvements plans lorsque le mouvement est effectivement plan du fait des liaisons existantes dans le mécanisme (que des liaisons pivots d'axes parallèles par exemple) ou lorsqu'on ne s'intéresse qu'à une partie du mouvement possible, par exemple parce que les mouvements hors plan sont autorisés

mais improbables ou sans impact sur le fonctionnement du système.

 **Remarque**

Sous l'hypothèse de problème plan, plusieurs liaisons peuvent être identiques. Par exemple, dans un problème plan de normale \vec{x} , une liaison pivot d'axe porté par \vec{x} se comporte comme une liaison pivot glissant de même axe ou encore comme une liaison rotule de centre appartenant à l'axe.

3 Liaisons équivalentes

Il n'existe pas toujours des solutions technologiques simples pour réaliser les liaisons voulues par le concepteur. Dans ce cas, on est amené à réaliser plusieurs liaisons entre les deux mêmes solides ou encore à introduire des pièces intermédiaires au niveau de la liaison. L'objectif de cette partie est d'être capable de déterminer la liaison cinématiquement équivalente à un ensemble de liaisons entre deux solides.

3.1 Liaisons en série



À savoir

Lorsqu'entre deux solides (0) et (n), il existe n liaisons en série, alors le torseur cinématique de (n) par rapport à (0) $\{\mathcal{V}_{n/0}^{\text{éq}}\}$ s'écrit

$$\{\mathcal{V}_{n/0}^{\text{éq}}\} = \{\mathcal{V}_{n/n-1}\} + \{\mathcal{V}_{n-1/n-2}\} + \dots + \{\mathcal{V}_{2/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/0}\}$$

où les $\{\mathcal{V}_{i/j}\}$ sont les torseurs cinématiques de chacune des liaisons. La liaison équivalente regroupe ainsi les degrés de liberté des différentes liaisons.



Remarque

La notation « éq » dans $\{\mathcal{V}_{n/0}^{\text{éq}}\}$ permet de distinguer le torseur cinématique de la liaison équivalente du torseur cinématique d'une liaison qui existerait entre les solides (n) et (0) ou encore de la définition même du torseur cinématique de (n) par rapport à (0).



Attention !

La somme des torseurs ne peut s'écrire que si tous les torseurs sont exprimés en un même point.

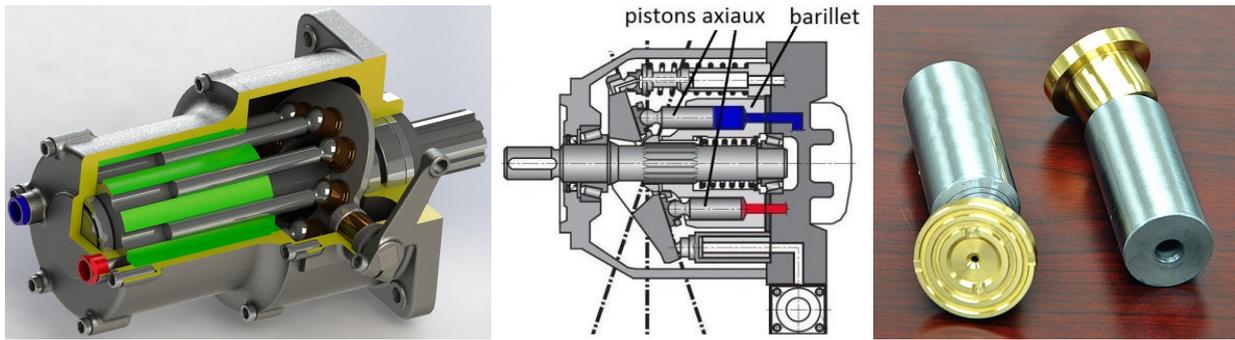
Liaison équivalente à une sphérique et un appui-plan en série

FIGURE 4 – Pompe hydraulique à pistons axiaux (ou à barillet) : modèle 3D à gauche et plan d'assemblage en coupe au milieu. À droite, deux pistons avec leur patin.

3.2 Liaisons en parallèle

À savoir

Lorsque deux solides (1) et (0) ont n liaisons entre eux, alors le torseur cinématique de la liaison doit traduire l'ensemble des contraintes cinématiques imposées par chacune des liaisons. Le torseur cinématique équivalent de (1) par rapport à (0) $\{\mathcal{V}_{1/0}^{\text{éq}}\}$ doit donc respecter les égalités

$$\{\mathcal{V}_{1/0}^{\text{éq}}\} = \{\mathcal{V}_{1/0}^{l_1}\} = \{\mathcal{V}_{1/0}^{l_2}\} = \dots = \{\mathcal{V}_{1/0}^{l_n}\}$$

où les $\{\mathcal{V}_{1/0}^{l_i}\}$ sont les torseurs cinématiques de chacune des liaisons.

Remarque

La notation « éq » dans $\{\mathcal{V}_{1/0}^{\text{éq}}\}$ permet de distinguer le torseur cinématique de la liaison équivalente du torseur cinématique des n liaisons qui existent entre les solides (1) et (0) ou encore de la définition même du torseur cinématique de (1) par rapport à (0).

Attention !

L'égalité des torseurs ne peut s'écrire que si tous les torseurs sont exprimés en un même point.

Liaison équivalente à deux pivots-glissants en parallèle

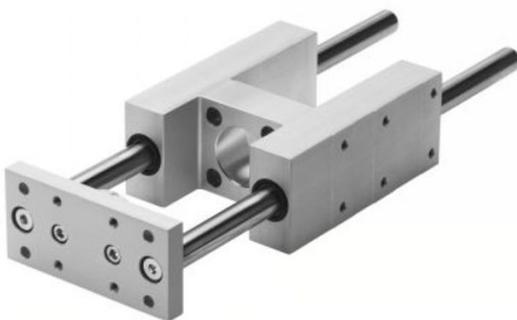


FIGURE 5 – Système de guidage en translation par double tige.

Nom	Degré de mobilité	Dessin	Schéma 3D	Schéma 2D	Torseur cinématique $\{V_{2/1}\}$	Position point A
Pivot d'axe ($O\vec{x}$)	1 mobilité (R_x)				$\left\{ \begin{array}{c} \omega_x \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$	$A \in \text{axe } (O\vec{x})$
Glissière de direction \vec{x}	1 mobilité (T_x)				$\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V_x \vec{x} \end{array} \right\}_A$	A quelconque
Pivot-glissant d'axe ($O\vec{x}$)	2 mobilités (R_x, T_x)				$\left\{ \begin{array}{c} \omega_x \vec{x} \\ V_x \vec{x} \end{array} \right\}_A$	$A \in \text{axe } (O\vec{x})$
Hélicoïdale d'axe ($O\vec{x}$)	1 mobilité (R_x et T_x couplés)				$\left\{ \begin{array}{c} \omega_x \vec{x} \\ V_x \vec{x} \end{array} \right\}_A$ avec $V_x = \frac{p}{2\pi} \omega_x$	$A \in \text{axe } (O\vec{x})$
Rotule à doigt, centre O, normale au plan de rainurage \vec{y} , direction du doigt \vec{x}	2 mobilités (R_x, R_y)				$\left\{ \begin{array}{c} \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$	$A = \text{centre } O$
Rotule (ou sphérique) de centre O	3 mobilités (R_x, R_y, R_z)				$\left\{ \begin{array}{c} \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$	$A = \text{centre } O$
Appui-plan de normale \vec{z}	3 mobilités (T_x, T_y, R_z)				$\left\{ \begin{array}{c} \omega_z \vec{z} \\ V_x \vec{x} + V_y \vec{y} \end{array} \right\}_A$	A quelconque
Linéaire rectiligne (cylindre-plan) d'axe ($O\vec{x}$), normale \vec{z}	4 mobilités (T_x, T_y, R_x, R_z)				$\left\{ \begin{array}{c} \omega_x \vec{x} + \omega_z \vec{z} \\ V_x \vec{x} + V_y \vec{y} \end{array} \right\}_A$	$A \in \text{axe } (O\vec{x})$
Linéaire annulaire (sphère-cylindre) de centre O, d'axe ($O\vec{x}$)	4 mobilités (T_x, R_x, R_y, R_z)				$\left\{ \begin{array}{c} \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \\ V_x \vec{x} \end{array} \right\}_A$	$A = \text{centre } O$
Ponctuelle (sphère-plan) de centre O, normale \vec{z}	5 mobilités (T_x, T_y, R_x, R_y, R_z)				$\left\{ \begin{array}{c} \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \\ V_x \vec{x} + V_y \vec{y} \end{array} \right\}_A$	$A = \text{centre } O$

TABLEAU 1 – Tableau des liaisons normalisées et de leur torseur cinématique.