

**Séquence 7.1*****PFS : Équilibre des systèmes matériels*****Mise en bouche**

- 1) Donner la définition d'un effort ou action mécanique.
- 2) Donner les caractéristiques d'un torseur d'action mécanique et indiquer les unités des différentes grandeurs.
- 3) Donner la relation de Varignon pour les torseurs d'action mécanique.
- 4) Définir un torseur couple et un torseur glisseur.
- 5) Donner la définition d'une liaison parfaite.
- 6) Donner le torseur d'action mécanique associé aux liaisons parfaites normalisées du tableau.
- 7) Définir l'équilibre d'un système.
- 8) Énoncer le principe fondamental de la statique et préciser le nom des deux théorèmes vectoriels qui le composent.
- 9) Caractériser les torseurs d'action mécanique dans le cas d'un problème plan.
- 10) Énoncer le théorème de la résultante statique.
- 11) Énoncer le théorème du moment statique.
- 12) Donner la forme du torseur d'action mécanique d'un moteur.
- 13) Donner la forme du torseur d'action mécanique d'un vérin.

# Plat

## Exercice 1 : Brouette

On s'intéresse à l'effort nécessaire pour maintenir une brouette en équilibre sur un plan horizontal. La brouette sera supposée immobile.

On suppose que le contact entre la roue et le sol est ponctuel et se fait sans frottements au point  $I$  situé sous le centre de la roue  $C$ . La roue est de rayon  $R$ . Le poids de l'ensemble des éléments de la brouette sont supposés négligeables devant celui de la charge. On suppose que celle-ci est de masse  $m$  et de centre de masse  $G$ . L'utilisateur exerce un effort de type glisseur au point  $M$  dont on ne connaît pas a priori la direction de la résultante.

On note  $\vec{z}$  la verticale ascendante et  $\vec{x}$  le vecteur horizontal contenu dans le plan du dessin et orienté vers la gauche. Le vecteur  $\vec{y}$  est donc normal au plan du dessin. On ne fait pas l'hypothèse de problème plan.

On note :

- $\vec{IC} = R\vec{z}$
- $\vec{CG} = -a\vec{x} + (h_G - R)\vec{z}$
- $\vec{CM} = -L\vec{x} + (H - R)\vec{z}$

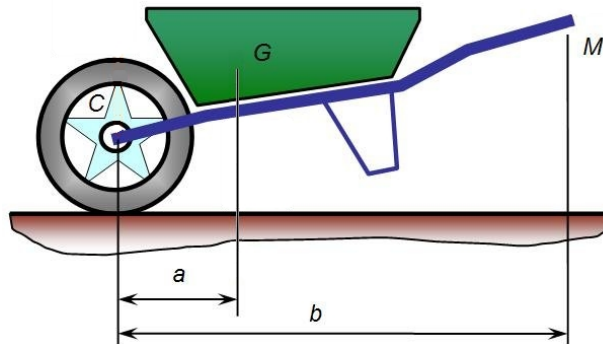


FIGURE 1 – Brouette.

**Question 1** Réaliser un graphe de structure faisant apparaître le châssis, le pied, la benne et la charge (un même ensemble indéformable), la roue et le sol. Compléter avec l'action mécanique de la pesanteur.

**Question 2** Exprimer le torseur d'action mécanique de la pesanteur sur la charge.

**Question 3** Donner la forme, dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , des autres torseurs d'action mécanique du problème : effort de l'utilisateur sur la poignée, effort du sol sur la roue (contact ponctuel), effort de liaison roue-châssis.

**Question 4** On suppose que la brouette est à l'équilibre. Écrire le principe fondamental de la statique appliqué à l'ensemble {châssis, benne, charge, pied, roue}.

**Question 5** Expliciter le théorème de la résultante statique.

**Question 6** Expliciter le théorème du moment statique au point  $C$ .

**Question 7** Déterminer l'expression de l'effort que doit exercer l'utilisateur pour maintenir la brouette à l'équilibre. Quelle équation scalaire a-t-il fallu utiliser ?

**Question 8** Déterminer toutes les actions mécaniques inconnues.

**Question 9** Afin de réduire l'effort exercé par l'utilisateur, a-t-on intérêt à avoir la roue plus proche ou plus éloignée de la charge (paramètre géométrique  $a$ ) ? Et les poignées (paramètre géométrique  $L$ ) ?

## Exercice 2 : Brouette (la suite... plus épicée)

On suppose à présent que la brouette est placée sur un plan incliné par rapport à l'horizontale d'un angle  $\alpha$ . On suppose alors que la normale au plan de contact est un vecteur  $\vec{z}_i$  non vertical tel que  $\alpha = (\vec{z}, \vec{z}_i) = (\vec{x}, \vec{x}_i)$ . On admet que le paramétrage précédent reste valable et donc que la brouette garde son inclinaison par rapport à la verticale et non par rapport au sol. On peut donc imaginer que la brouette vient d'entrer en contact avec une rampe mais l'utilisateur est encore sur du plat.

**Question 1** Réaliser un schéma dans cette nouvelle situation. Déterminer la position du point  $I$  de contact entre la roue et le sol.

**Question 2** Exprimer les mêmes actions mécaniques que précédemment et en déduire l'effort à réaliser par l'utilisateur pour maintenir la brouette en équilibre.

**Question 3** Qu'en est-il si la brouette garde son inclinaison par rapport au sol plutôt que par rapport à la verticale? Dans ce cas, l'utilisateur monte une rampe avec la brouette.

### Exercice 3 : Bride de fixation

Le dispositif de bridage ci-dessous permet d'immobiliser la pièce (4) par rapport au bâti (1). Il est composé de :

- la vis (2) à tête bombée, qui exerce un effort de 3 kN sur la pièce (3) en A ;
- le renvoi (3), qui est lié au bâti (1) par une liaison pivot d'axe passant par C ;
- le ressort de rappel, dont l'effort est supposé négligeable par rapport aux autres actions mécaniques du problème (son rôle est de faire basculer le renvoi (3) pour libérer la pièce bridée (4)).

Afin d'immobiliser la pièce (4), l'utilisateur dévisse d'abord la vis (2). Le ressort relève alors le renvoi (3). L'utilisateur place alors la pièce à brider sous le renvoi puis visse à nouveau. Dès que le renvoi entre en contact avec la pièce, l'action de visser a tendance à exercer un effort sans entraîner de mouvement de l'ensemble. Il est alors au repos.

L'appui en B est supposé ponctuel et sans frottements. Les dimensions sur le schéma sont en millimètres. On pourra leur donner un nom pour la résolution et ne remplacer par les valeurs numériques qu'à la fin.

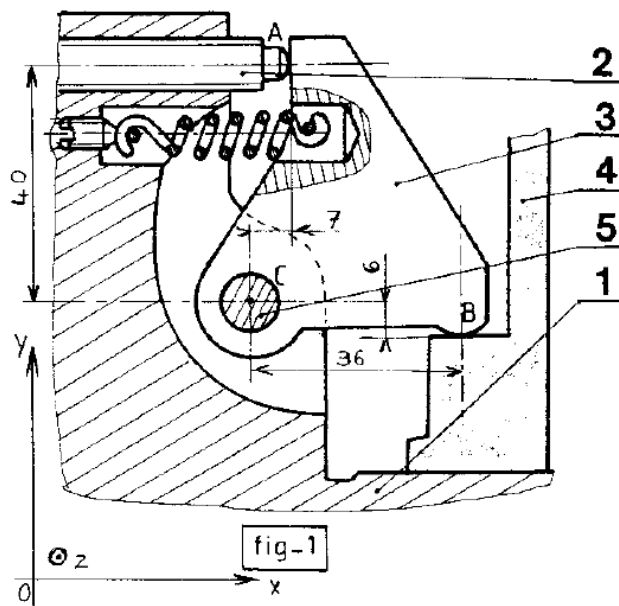


FIGURE 1 – Bride de fixation.

**Question 1** Établir un graphe de structure du mécanisme. On fera apparaître l'action du ressort mais on ne tiendra pas en compte par la suite.

**Question 2** Réaliser un schéma cinématique du mécanisme.

**Question 3** Écrire la forme des torseurs d'action mécanique associés à chaque effort. On les exprimera dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

**Question 4** Appliquer le principe fondamental de la statique au renvoi (3).

**Question 5** Déterminer l'effort de bridage exercé par le renvoi (3) sur la pièce (4).

**Question 6** Déterminer maintenant les efforts de liaisons entre le bâti et le renvoi.

**Question 7** Quelle équation a été utile pour déterminer chaque inconnue ?

## Exercice 4 : Échelle E.P.A.S.

L'échelle E.P.A.S., dont la cinématique a déjà été étudiée, comporte plusieurs actionneurs : un premier moteur entre le châssis {0} et la tourelle {1}, un deuxième entre l'échelle {3} et la plate-forme {6}, un vérin {4}-{5} ({4} est le corps du vérin et {5} la tige) et un ensemble motoréducteur et pignons-chaîne qu'on assimilera à un vérin entre le berceau {2} et l'échelle {3}.

On s'intéresse au dimensionnement des actionneurs de l'échelle E.P.A.S. dans le cas où celle-ci est au repos. En pratique, son évolution est suffisamment lente pour pouvoir considérer que les grandeurs dynamiques sont négligeables face aux efforts nécessaires au maintien à l'équilibre. Pour ce faire, on déterminera le couple ou l'effort à fournir par chacun d'entre eux.

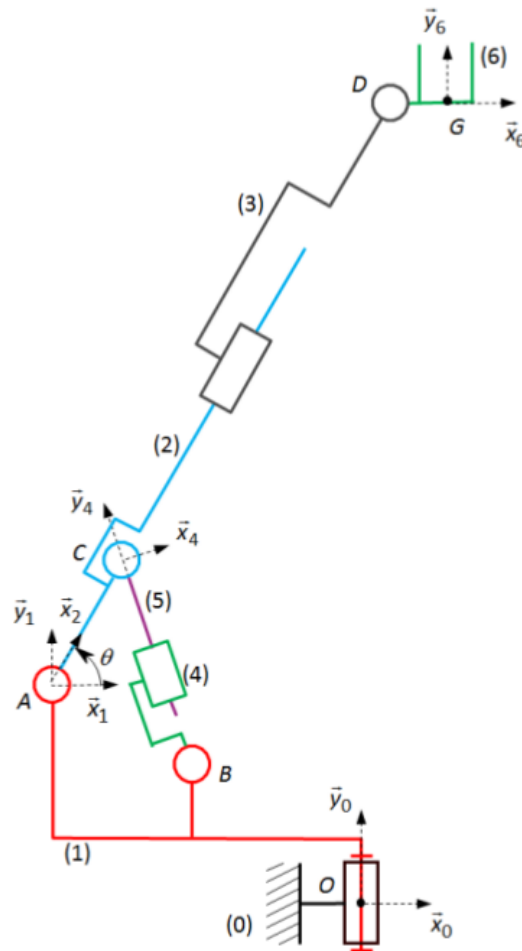


FIGURE 1 – Échelle E.P.A.S. montée sur un camion de pompiers.

On fournit le paramétrage suivant :

- $\vec{OA} = -a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1$
- $\vec{AB} = c\vec{x}_1 - e\vec{y}_0$
- $\vec{BC} = \mu(t)\vec{y}_4$
- $\vec{CD} = \lambda(t)\vec{x}_2$  avec  $\lambda \in \{0, 8\}$  m.
- $\vec{AC} = c\vec{x}_2$  avec  $c = 2$  m
- $\vec{DG} = d\vec{x}_6$  avec  $d = 1,5$  m
- $c = 2$  m,  $d = 1,5$  m,  $e = 1$  m
- $\alpha(t) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$
- $\theta(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) \in [0; \pi]$  rad
- $\beta(t) = (\vec{x}_2, \vec{x}_6) = (\vec{y}_2, \vec{y}_6) = -\theta(t)$
- $\gamma(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_4) = (\vec{y}_1, \vec{y}_4)$

On note par ailleurs les actions mécaniques dues aux actionneurs comme suit :

- $\{\mathcal{T}_{0-1}\}$  de couple  $C_{01}$
- $\{\mathcal{T}_{3-6}\}$  de couple  $C_{36}$
- $\{\mathcal{T}_{4-5}\}$  de résultante  $F_{45}$  et de moment nul en C
- $\{\mathcal{T}_{2-3}\}$  de résultante  $F_{23}$  et de moment nul en D

On suppose que la plate-forme est toujours horizontale. On suppose par ailleurs que les liaisons sont parfaites et les solides de masse négligeable à l'exception de la plate-forme (et la charge), qui subit l'action de la pesanteur. La masse maximale autorisée sur la plate-forme est de  $M_{max} = 270$  kg. Son centre de masse est située en  $G$ .

### Préambule

**Question 1** Réalisez un graphe de liaisons du mécanisme.

**Question 2** Indiquez sur le graphe des liaisons les différentes actions mécaniques (sauf celles dues aux liaisons).

### Détermination de $C_{36}$

**Question 3** Explicitez une démarche (isolement, théorème et projection) permettant de déterminer le couple  $C_{36}$ . (Indication : une équation scalaire suffit)

**Question 4** Appliquez cette démarche. Quelle est la valeur numérique de  $C_{36}$  si la plate-forme est vide (masse nulle)? Si elle atteint son chargement maximal?

### Détermination de $C_{01}$

**Question 5** Explicitez une démarche (isolement, théorème et projection) permettant de déterminer le couple  $C_{01}$ . (Indication : une équation scalaire suffit)

**Question 6** Appliquez cette démarche. Quelle est la valeur numérique de  $C_{01}$  si la plate-forme est vide (masse nulle)? Si elle atteint son chargement maximal?

### Détermination de $F_{23}$

**Question 7** Explicitez une démarche (isolement, théorème et projection) permettant de déterminer la force  $F_{23}$ . (Indication : une équation scalaire suffit)

**Question 8** Appliquez cette démarche. La valeur de  $F_{23}$  dépend-elle de la position de la plate-forme par rapport au châssis?

**Question 9** Quelle est la valeur numérique maximale de  $F_{23}$  (dans la pire configuration)? Et sa valeur minimale en charge? Et à vide?

### Détermination de $F_{45}$

**Question\* 10** Explicitez une démarche (isolement, théorème et projection) permettant de déterminer la force  $F_{45}$ . (Indication : une équation scalaire **ne suffit pas**)

**Question 11** Appliquez cette démarche.

**Question 12** La valeur de  $F_{45}$  dépend-elle de la position de la plate-forme par rapport au châssis?

**Question 13** Quelle est la valeur numérique maximale de  $F_{45}$  (dans la pire configuration)? Et sa valeur minimale en charge? Et à vide?

# Dessert

## Exercice 1 : Gouvernail de bateau

On s'intéresse d'une part à l'effort à appliquer par l'utilisateur pour maintenir à l'équilibre le gouvernail et d'autre part au dimensionnement des liaisons entre le gouvernail et le bateau.

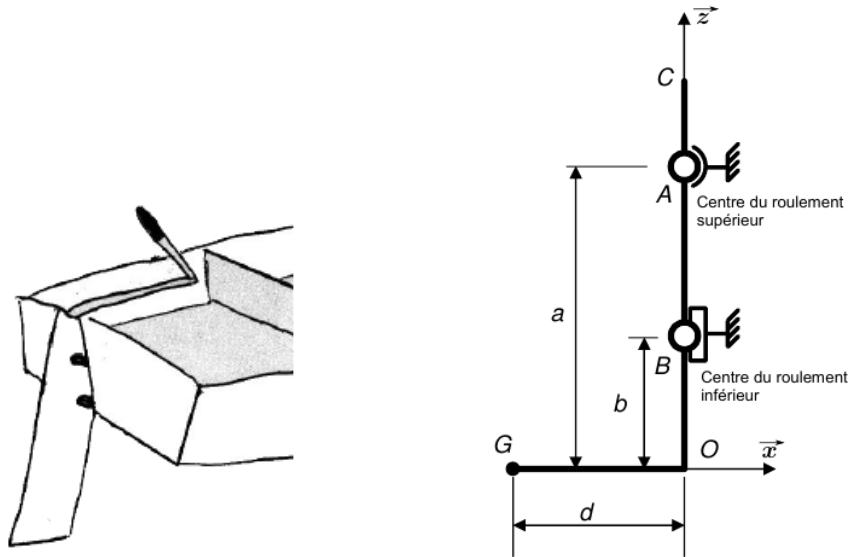


FIGURE 1 – Gouvernail de bateau de schéma cinématique.

On suppose que le gouvernail est soumis aux actions mécaniques suivantes :

- l'action des deux liaisons, supposées parfaites;
- l'action de la pesanteur :  $\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow \text{gouv}}\} = \left\{ \begin{array}{c} -P\vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$  où  $P$  est le poids
- l'action de l'eau sur le gouvernail :  $\{\mathcal{T}_{\text{eau} \rightarrow \text{gouv}}\} = \left\{ \begin{array}{c} F\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$
- l'action de l'utilisateur sur le gouvernail, qui est équivalente à un couple :  $\{\mathcal{T}_{\text{utilisateur} \rightarrow \text{gouv}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C\vec{z} \end{array} \right\}_G$

**Question 1** Écrire le torseur d'action mécanique associé à chacune des deux liaisons. Vous les exprimerez sous forme de composantes dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

**Question 2** Effectuer un graphe de liaisons. Indiquer sur le graphe l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 3** Écrire le théorème de la résultante statique appliqué au gouvernail.

**Question 4** Écrire le théorème du moment statique au point  $O$  appliqué au gouvernail.

**Question 5** Projeter les équations vectorielles obtenues aux deux questions précédentes sur la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

**Question 6** Quelle(s) équation(s) permet(tent) de déterminer le couple appliqué par l'utilisateur connaissant les autres actions mécaniques s'exerçant sur le gouvernail?

**Question 7** Déterminer le couple  $C$ .

**Question 8** Déterminer l'ensemble des composantes dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  des actions mécaniques dues aux liaisons entre le gouvernail et le bateau.

## Exercice 2 : Passerelle suspendue de salle de spectacles

De nombreuses salles de spectacles sont conçues pour pouvoir accueillir différents types de spectacles. Pour permettre cette versatilité, ces salles sont équipées de passerelles suspendues sur lesquelles peuvent être installés des projecteurs, des éléments du décor, des rideaux etc.

On s'intéresse au dimensionnement en effort des accroches des suspentes au plafond.

Dans un souci de simplification, on décide de modéliser la passerelle comme étant un mécanisme plan et on ne conserve que des suspentes. Sa longueur est de  $L = 4$  m et sa masse vaut  $M = 200$  kg. La passerelle est censée pouvoir supporter de plus la charge d'un technicien (masse maximale  $m = 150$  kg) qui peut être localisée en un point quelconque de la passerelle. Les suspentes, de  $l = 2$  m de long, sont appelées A et B, comme leur point d'attache respectif à la passerelle. On modélise les liaisons entre les suspentes et le plafond ou la passerelle par des liaisons sphériques.

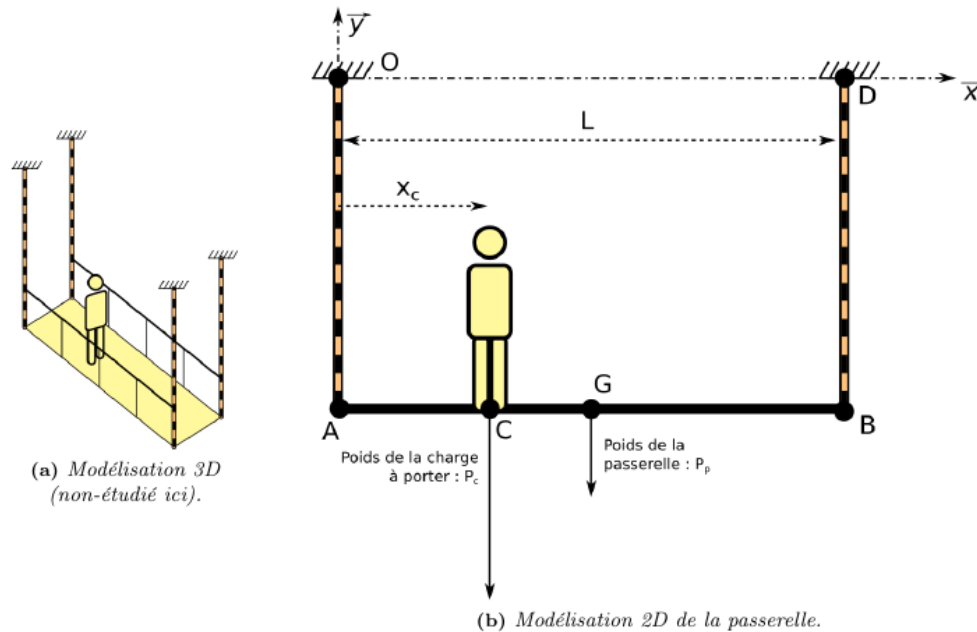


FIGURE 1 – Passerelle suspendue de salle de spectacles (modélisation 3D et 2D).

**Question 1** Donner la forme des torseurs d'action mécanique de chacune des liaisons. Simplifier leur expression dans le cas du problème plan étudié.

**Question 2** Déterminez la résultante de l'effort mécanique exercé par chacune des accroches des suspentes sur la passerelle en fonction de la position du technicien.

**Question 3** Déterminez donc l'effort minimal que doit pouvoir supporter chaque accroche. Lors du choix de l'accroche, on utilisera un coefficient de sécurité de 1,3. Quelle est alors la valeur minimale de la charge maximale admissible par une accroche adaptée à la passerelle étudiée?