Séquence 6

Cinématique d'une voiture dans un virage

On s'intéresse au rayon minimal de courbure de la trajectoire du centre géométrique d'une voiture ayant quatre roues orientables, représentée en figure 1. La notation associée à une seule roue est précisée par souci de clarté. On notera $A_{\text{av,g}}$, $A_{\text{av,d}}$, $A_{\text{ar,g}}$ et $A_{\text{ar,d}}$ les centres respectifs des roues avant gauche, avant droite, arrière gauche et arrière droite. On note de même les différentes fusées (f) et roues (r).

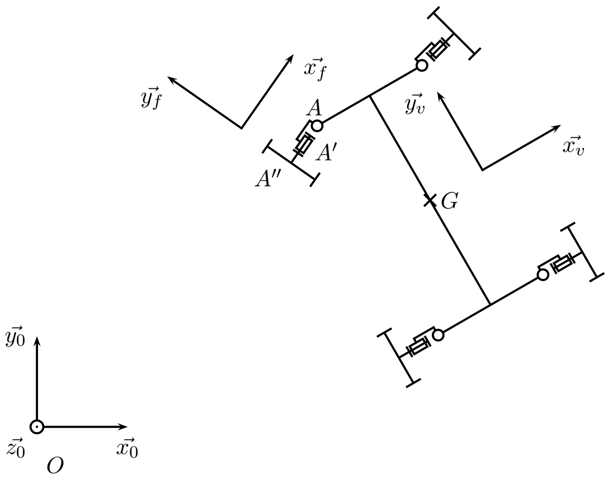

FIGURE *1 – Schéma cinématique d'une voiture à quatre roues motrices.*

Hypothèses :

- G est le centre géométrique du rectangle formé par les centres A'' des quatre roues.
- Les points A, A' et A'' de chaque roue sont confondus.
- O appartient à l'axe instantané de rotation du mouvement de la voiture (v) par rapport au sol (s).
- Le contact entre les roues et le sol est supposé ponctuel.
- Les roues roulent sans glisser sur le sol.

Notations :

- $\overrightarrow{OG} = X\,\overrightarrow{x}_v + Y\,\overrightarrow{y}_v$
- $\overrightarrow{GA_{\text{av,d}}} = a\,\overrightarrow{x}_v + b\,\overrightarrow{y}_v$
- $\overrightarrow{GA_{\text{av,g}}} = -a\,\overrightarrow{x}_v + b\,\overrightarrow{y}_v$
- $\overrightarrow{GA_{\text{ar,d}}} = a\,\overrightarrow{x}_v - b\,\overrightarrow{y}_v$
- $\overrightarrow{GA_{\text{ar,g}}} = -a\,\overrightarrow{x}_v - b\,\overrightarrow{y}_v$
- $\widehat{\left(\overrightarrow{x}_v; \overrightarrow{x}_{f_i}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{y}_v; \overrightarrow{y}_{f_i}\right)} = \alpha_i$ avec $i \in \{(\text{av},\text{d}); (\text{av},\text{g}); (\text{ar},\text{d}); (\text{ar},\text{g})\}$
- $\overrightarrow{A_i I_i} = -r\,\overrightarrow{z}_0$ où I_i sont les points de contact des différentes roues avec le sol.
- $\{\mathcal{V}_{v/s}\} = \left\{ \begin{array}{c} \Omega\,\overrightarrow{z}_0 \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O$
- $\left\{\mathcal{V}_{f_i/v}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{\forall\,\text{point}}$
- $\left\{\mathcal{V}_{r_i/f_i}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_i\,\overrightarrow{x}_{f_i} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{A_i}$

Question : Déterminer la relation entre les vitesses de rotation des roues avant et les paramètres du problème (Est-il possible de faire tourner les roues à la même vitesse tout en imposant un glissement nul des roues sur le sol ?).

Exprimer ω_{av_g} et ω_{av_d} en fonction de X, Y, Ω, a et b.

Corrigé :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}(I_i \in r_i/s) &= \overrightarrow{V}(A_i \in r_i/s) + \overrightarrow{\Omega}(r_i/s) \wedge \overrightarrow{A_i I_i} \\
&= \overrightarrow{V}(A_i \in r_i/f_i) + \overrightarrow{V}(A_i \in f_i/v) + \overrightarrow{V}(A_i \in v/s) + \overrightarrow{\Omega}(r_i/s) \wedge \overrightarrow{A_i I_i}
\end{aligned}$$

Or, par hypothèse, $\overrightarrow{V}(A_i \in r_i/f_i) = \overrightarrow{0}$ et $\left\{\mathcal{V}_{f_i/v}\right\} = \{0\}$, donc

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}(I_i \in r_i/s) &= \overrightarrow{V}(A_i \in v/s) + \overrightarrow{\Omega}(r_i/s) \wedge \overrightarrow{A_i I_i} \\
&= \overrightarrow{V}(O \in v/s) + \overrightarrow{\Omega}(v/s) \wedge \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{\Omega}(r_i/s) \wedge \overrightarrow{A_i I_i} \\
&= \overrightarrow{\Omega}(v/s) \wedge \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{\Omega}(r_i/s) \wedge \overrightarrow{A_i I_i}
\end{aligned}$$

Alors, comme $\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA_i}$ et en posant ϵ_i^x et ϵ_i^y tels que $\forall i, \quad \overrightarrow{GA_i} = \epsilon_i^x a \overrightarrow{x}_v + \epsilon_i^y b \overrightarrow{y}_v$, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}(I_i \in r_i/s) &= \Omega \overrightarrow{z}_0 \wedge \left((X+\epsilon_i^x a)\overrightarrow{x}_v + (Y+\epsilon_i^y b)\overrightarrow{y}_v\right) + \omega_i \overrightarrow{x}_{f_i} \wedge (-r\overrightarrow{z}_0) \\
&= \Omega\left(-(Y+\epsilon_i^y b)\overrightarrow{x}_v + (X+\epsilon_i^x a)\overrightarrow{y}_v\right) + \omega_i r \overrightarrow{y}_{f_i}
\end{aligned}$$

La condition de non glissement des roues par rapport au sol aux points de contact se traduit par

$$\forall i, \quad \overrightarrow{V}(I_i \in r_i/s) = \overrightarrow{0}$$

En remplaçant par l'expression trouvée ci-dessus et en projetant sur $\overrightarrow{x}_v$ et $\overrightarrow{y}_v$, on obtient les deux équations scalaires suivantes pour chaque roue i :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
-\Omega(Y+\epsilon_i^y b) - \omega_i r \sin(\alpha_i) &=& 0 \\
\Omega(X+\epsilon_i^x a) + \omega_i r \cos(\alpha_i) &=& 0
\end{array}\right.$$

soit le système

$$\left\{\begin{array}{rcl}
-\Omega(Y+b) - \omega_{av_g} r \sin(\alpha_{av_g}) &=& 0 \\
\Omega(X-a) + \omega_{av_g} r \cos(\alpha_{av_g}) &=& 0 \\
-\Omega(Y+b) - \omega_{av_d} r \sin(\alpha_{av_d}) &=& 0 \\
\Omega(X+a) + \omega_{av_d} r \cos(\alpha_{av_d}) &=& 0 \\
-\Omega(Y-b) &=& 0 \\
\Omega(X-a) + \omega_{ar_g} r &=& 0 \\
-\Omega(Y-b) &=& 0 \\
\Omega(X+a) + \omega_{ar_d} r &=& 0
\end{array}\right.$$

On déduit que $Y = b$ si on veut qu'il existe une solution au problème.

Par ailleurs,

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\omega_{av_g} &=& -\frac{\Omega}{r}(X-a)\dfrac{1}{\cos(\alpha_{av,g})} \\
\omega_{av_d} &=& -\frac{\Omega}{r}(X+a)\dfrac{1}{\cos(\alpha_{av,d})}
\end{array}\right.$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\omega_{av_g} &=& -\frac{\Omega}{r}(X-a)\sqrt{1+\tan^2(\alpha_{av,g})} \\
\omega_{av_d} &=& -\frac{\Omega}{r}(X+a)\sqrt{1+\tan^2(\alpha_{av,d})}
\end{array}\right.$$

si $\cos(\alpha_{av,d})$, $\cos(\alpha_{av,g})$, $\sin(\alpha_{av,d})$ et $\sin(\alpha_{av,g})$ sont tous positifs, ce qui est le cas si le virage est à gauche, donc avec $X > 0$. Supposons ici de plus que $X > a$. Le cas où $0 < X < a$ est peu intéressant dans le contexte donné.

Or, du système d'équations initial on déduit

$$\left\{\begin{array}{rcccl}
\tan(\alpha_{av_g}) &=& \dfrac{Y+b}{X-a} &=& \dfrac{2b}{X-a} \\
\tan(\alpha_{av_d}) &=& \dfrac{Y+b}{X+a} &=& \dfrac{2b}{X+a}
\end{array}\right.$$

et alors

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\omega_{av_g} &=& -\frac{\Omega}{r}(X-a)\sqrt{1+\left(\frac{2b}{X-a}\right)^2} \\
\omega_{av_d} &=& -\frac{\Omega}{r}(X+a)\sqrt{1+\left(\frac{2b}{X+a}\right)^2}
\end{array}\right.$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\omega_{av_g} &=& -\frac{\Omega}{r}\sqrt{(X-a)^2+(2b)^2} \\
\omega_{av_d} &=& -\frac{\Omega}{r}\sqrt{(X+a)^2+(2b)^2}
\end{array}\right.$$

Il en résulte que $\omega_{av_g} \neq \omega_{av_g}$.

Si l'on veut éviter le glissement des roues par rapport au sol au cours d'un virage, il faut autoriser que les roues tournent à des vitesses différentes. Ce rôle est habituellement rempli par un mécanisme appelé différentiel.