

Séquence 7.1-2***PFS : Équilibre des systèmes matériels*****Mise en bouche**

- 1) Donner la définition d'un effort ou action mécanique.
- 2) Donner les caractéristiques d'un torseur d'action mécanique et indiquer les unités des différentes grandeurs.
- 3) Donner la relation de Varignon pour les torseurs d'action mécanique.
- 4) Définir un torseur couple et un torseur glisseur.
- 5) Donner la définition d'une liaison parfaite.
- 6) Donner le torseur d'action mécanique associé aux liaisons parfaites normalisées du tableau.
- 7) Définir l'équilibre d'un système.
- 8) Énoncer le principe fondamental de la statique et préciser le nom des deux théorèmes vectoriels qui le composent.
- 9) Caractériser les torseurs d'action mécanique dans le cas d'un problème plan.
- 10) Énoncer le théorème de la résultante statique.
- 11) Énoncer le théorème du moment statique.
- 12) Donner la forme du torseur d'action mécanique d'un moteur.
- 13) Donner la forme du torseur d'action mécanique d'un vérin.

Entrée

Exercice 1 : Passerelle suspendue de salle de spectacles

De nombreuses salles de spectacles sont conçues pour pouvoir accueillir différents types de spectacles. Pour permettre cette versatilité, ces salles sont équipées de passerelles suspendues sur lesquelles peuvent être installés des projecteurs, des éléments du décor, des rideaux etc.

On s'intéresse au dimensionnement en effort des accroches des suspentes au plafond.

Dans un souci de simplification, on décide de modéliser la passerelle (3) comme étant accroché uniquement à deux suspentes, supposées indéformables. Sa longueur est de $\|\overrightarrow{AB}\| = L = 4$ m et sa masse vaut $M = 200$ kg. Son centre de masse G est tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{L}{2} \overrightarrow{x}$. La passerelle est censée pouvoir supporter de plus la charge d'un technicien (masse maximale $m = 150$ kg) qui peut être localisée en un point C quelconque de la passerelle. On notera par ailleurs $\overrightarrow{AC} = x_C \overrightarrow{x}$. Les suspentes, de $l = 2$ m de long, sont appelées 1 (entre O et A) et 2 (entre D et B). Elles sont supposées de masse négligeable. On modélise les liaisons entre les suspentes et le plafond ou la passerelle par des liaisons sphériques.

On notera :

$$\bullet \{ \mathcal{T}_{0 \rightarrow 1} \} = \begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & 0 \end{Bmatrix}_{O, (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})}$$

$$\bullet \{ \mathcal{T}_{1 \rightarrow 3} \} = \begin{Bmatrix} X_{13} & 0 \\ Y_{13} & 0 \\ Z_{13} & 0 \end{Bmatrix}_{A, (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})}$$

$$\bullet \{ \mathcal{T}_{0 \rightarrow 2} \} = \begin{Bmatrix} X_{02} & 0 \\ Y_{02} & 0 \\ Z_{02} & 0 \end{Bmatrix}_{D, (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})}$$

$$\bullet \{ \mathcal{T}_{2 \rightarrow 3} \} = \begin{Bmatrix} X_{23} & 0 \\ Y_{23} & 0 \\ Z_{23} & 0 \end{Bmatrix}_{B, (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})}$$

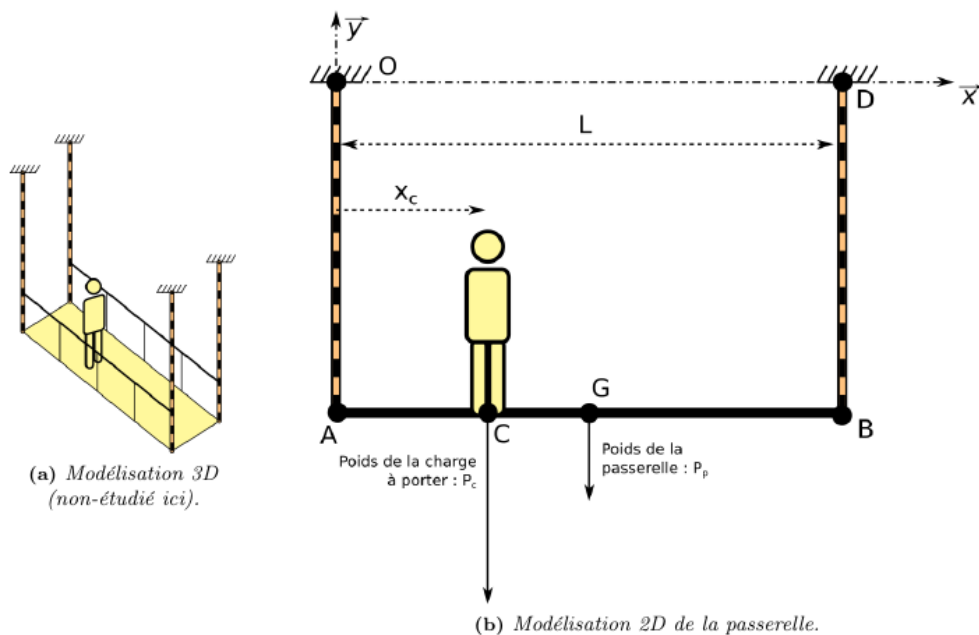


FIGURE 1 – Passerelle suspendue de salle de spectacles (modélisation 3D et 2D).

Question 1 Faire un graphe de structure du problème faisant apparaître la passerelle (qui inclus le technicien) et les deux suspentes. Y indiquer les actions mécaniques de la pesanteur.

Question 2 Donner la forme des torseurs d'action mécanique de la pesanteur sur la passerelle puis sur le technicien.

Question 3 Appliquer le théorème de la résultante statique à la passerelle en projection sur \overrightarrow{y} .

Question 4 Appliquer le théorème du moment statique en A à la passerelle en projection sur \overrightarrow{z} .

Question 5 En déduire Y_{13} et Y_{23} en fonction de x_C . En déduire la valeur maximale de ces efforts.

On souhaite à présent essayer deux autres démarches permettant a priori d'obtenir le même résultat.

Question* 6 Appliquer le théorème du moment statique en B à la passerelle en projection sur \vec{z} .

Question* 7 À partir des équilibres issus du théorème de la résultante statique et du théorème du moment statique en B, déterminer Y_{13} et Y_{23} .

Question* 8 Faire de même en appliquant le théorème du moment statique en G et le théorème de la résultante statique.

On souhaite à présent prouver que seules les composantes Y_{ij} sont non nulles (dont les X_{ij} sont nuls).

Question* 9 Isoler la suspente 1 et appliquer le principe fondamental de la statique en O.

Question* 10 En déduire X_{13} et Z_{13} .

Question* 11 En déduire ensuite X_{01} et Z_{01} .

Question 12 Généraliser le résultat aux autres liaisons.

On souhaite conclure sur les efforts d'accroche des suspentes au plafond.

Question 13 Isoler la suspente 1 et déterminer l'équation scalaire utile pour déterminer Y_{01} . À défaut, écrire l'ensemble du PFS en O projeté dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Plat

Exercice 1 : Skypod, système automatisé de préparation de commande

Inspiré de CCINP MP 2024

Le système Skypod est une solution d'aide à la préparation de commande dans des zones de stockage de grande capacité dont une spécificité majeure est de pouvoir évoluer en trois dimensions. Nous nous intéressons ici en particulier à sa capacité à monter et descendre au niveau des racks de stockage qui sont équipés de chaînes tendues sur lesquelles s'appuie le robot pour monter.

Le Skypod est effectivement équipé de quatre pignons motorisés qui engrènent sur quatre chaînes tendues verticales.

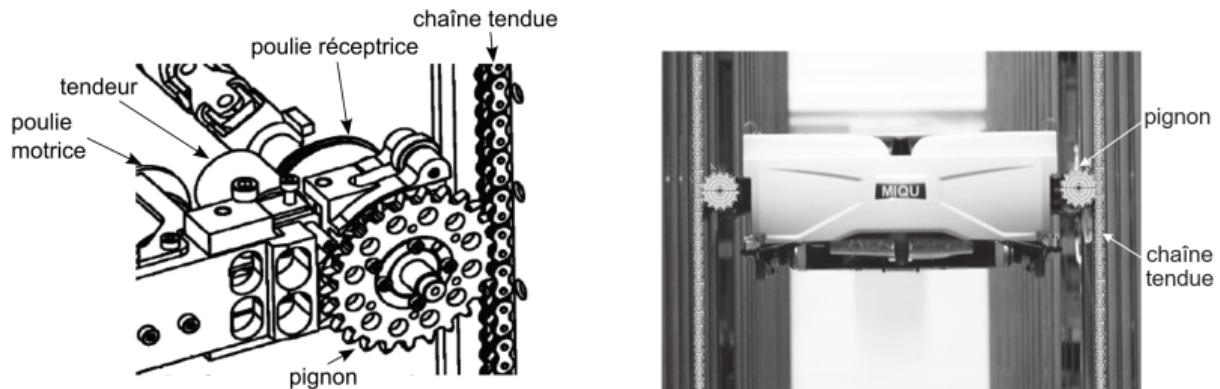


FIGURE 1 – Détail de l'engrènement d'un pignon sur la chaîne (à gauche). Vue du robot en montée (avec pignons et chaînes redessinés).

Par souci de simplicité, on modélise le système comme étant plan, de telle sorte que l'on ne s'intéresse qu'à deux ensembles pignons-chaîne.

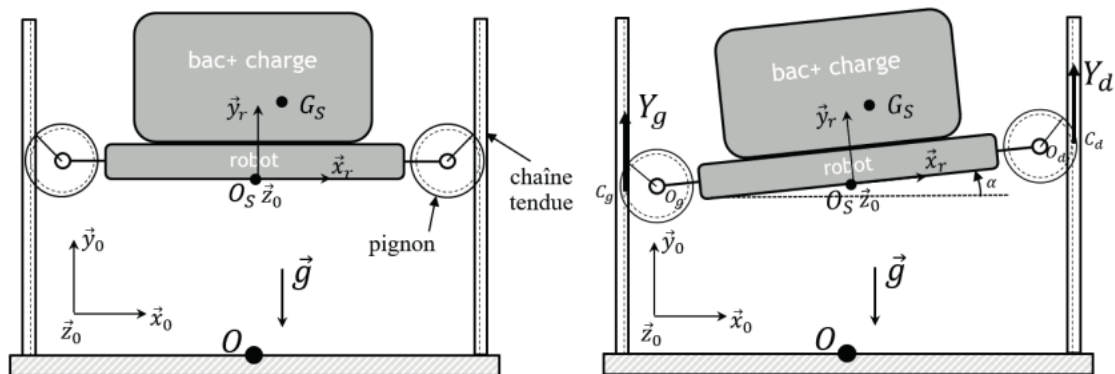


FIGURE 2 – Schématisation du problème simplifié plan.

Le système est donc composé

- du bâti (0), incluant le rack et les chaînes tendues supposées rigides, doté du repère $\mathcal{R}_0 = (O, \mathcal{B}_0)$;
- du robot (1) incluant le bac de charge de centre de masse G_S et de masse m_S ;
- les pignons (g) et (d), en liaison pivot motorisée avec le robot (1) et en prise avec les chaînes fixes par rapport au bâti (0).

On fournit de plus le paramétrage suivant :

- $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_r) = (\vec{y}_0, \vec{y}_r)$. α est supposé suffisamment petit pour que le contact entre les pignons et les chaînes soit maintenu.

- $\overrightarrow{OO_S} = h \vec{y}_0$
- $\overrightarrow{O_S G_S} = x_{G_S} \vec{x}_r + y_{G_S} \vec{y}_r$
- $\overrightarrow{O_S O_d} = \frac{L}{2} \vec{x}_r$
- $\overrightarrow{O_S O_g} = -\frac{L}{2} \vec{x}_r$
- $\overrightarrow{O_d C_d} = R \vec{x}_0$
- $\overrightarrow{O_g C_g} = -R \vec{x}_0$

On modélise les actions mécaniques autres que celles dues aux liaisons parfaites comme suit :

- $\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_S g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_S}$
- $\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow d}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{pd} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{\text{point}}$
- $\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow g}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{pg} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{\text{point}}$
- $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow d}\} = \left\{ \begin{array}{c} X_d \vec{x}_0 + Y_d \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{C_d}$
- $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow g}\} = \left\{ \begin{array}{c} X_g \vec{x}_0 + Y_g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{C_g}$

Question 1 Proposer un graphe de structure du système. On y fera apparaître, en plus des liaisons, les actions mécaniques non issues des liaisons parfaites (pesanteur, couples moteurs, actions pignon-chaîne).

Supposons dans un premier temps que $X_g = X_d = 0$.

Question 2 Écrire le Théorème de la Résultante Statique à $\{1, g, d\}$ en projection sur \vec{y}_0 et en déduire une relation entre Y_d, Y_g, g et m_S .

Question 3 Écrire le Théorème du Moment Statique à $\{1, g, d\}$ en O_S en projection sur \vec{z}_0 et en déduire une relation entre $Y_d, Y_g, L, R, g, m_S, \alpha, x_{G_S}$ et y_{G_S} .

Question 4 Déduire des deux équations précédentes l'expression de Y_d et Y_g en fonction de $L, R, g, m_S, \alpha, x_{G_S}$ et y_{G_S} .

Question 5 Simplifier le résultat pour le cas particulier où α vaut 0 puis pour le cas où, en plus, $x_{G_S} = 0$.

Question 6 Prouver que $|X_g| = |X_d|$.

On notera par la suite $X = |X_g| = |X_d|$. On admet par ailleurs qu'en raison de la tension des chaînes $X_d < 0$ et $X_g > 0$.

Question* 7 Supposons à présent que X_g et X_d sont potentiellement non nuls. Exprimer à nouveau Y_d et Y_g en fonction de g, m_S, α, x_{G_S} et y_{G_S} .

On s'intéresse finalement au couple moteur à fournir au niveau de chaque pignon.

Question 8 Écrire le Théorème du Moment Statique à $\{g\}$ en O_g en projection sur \vec{z}_0 et en déduire une relation entre Y_g, C_{pg} .

Question 9 Conclure sur l'expression du couple à appliquer à chaque pignon pour maintenir l'équilibre du robot.

Exercice 2 : Droïde TH3 pour la livraison du « dernier kilomètre »

Inspiré de Centrale-Supélec PSI 2024



La société TwinswHeel propose des solutions de logistique urbaine pour transformer durablement les modes de livraison en centre-ville. Des petits véhicules électriques appelés droïdes transportent des charges de manière autonome et/ou supervisée afin d'assurer :

- le transport de marchandises pour les particuliers;
- le transport de matériels pour des travaux en zones piétonnes et centres historiques difficilement accessibles;
- la livraison de colis sur le dernier kilomètre.

Le robot mobile autonome étudié ici est de type unicycle (deux roues motrices latérales indépendantes). Il dispose en plus d'une roue folle, qui s'oriente librement, afin que le droïde ne bascule pas vers l'arrière lorsqu'il porte son chargement. Il est alimenté par l'intermédiaire de batteries positionnées en dessous de l'axe des roues motrices.

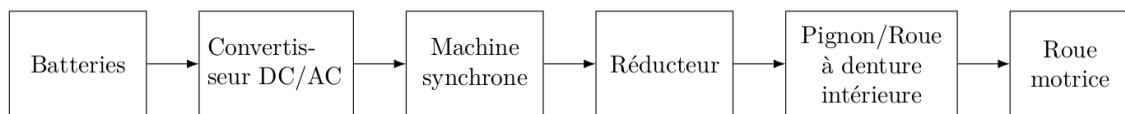


FIGURE 1 – Description de la chaîne de puissance des roues motrices.

Chaque roue motrice est mue grâce à une chaîne de puissance constituée :

- d'un convertisseur DC/AC alimenté par les batteries et délivrant une énergie électrique sous la forme d'un système de tensions alternatives triphasé;
- d'une machine synchrone à aimants permanents;
- d'un réducteur à engrenages de rapport de transmission $i = 5$;
- d'un dispositif pignon/roue dentée à denture intérieure;
- d'une roue motrice de diamètre extérieur $D = 740$ mm.

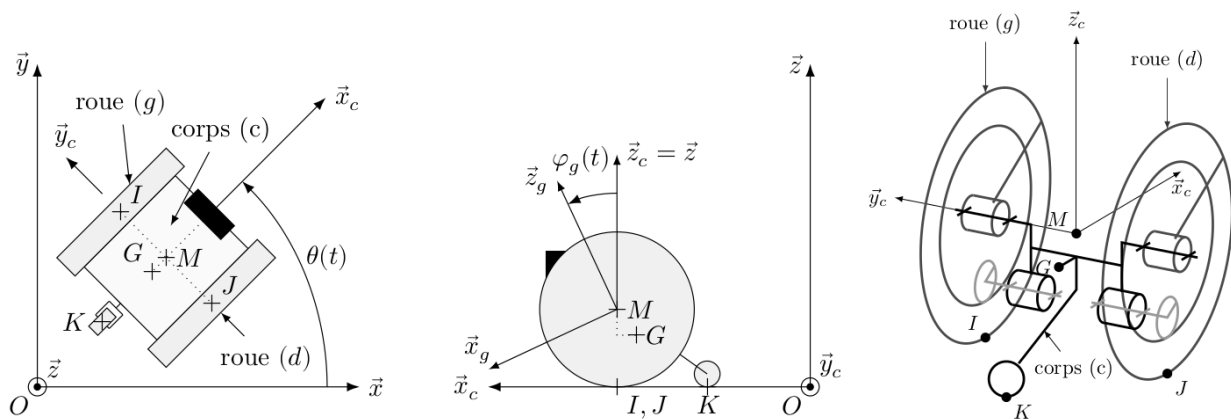


FIGURE 2 – Description de la chaîne de puissance des roues motrices.

Le pignon est solidaire de l'arbre de sortie du réducteur et a un diamètre primitif $d_1 = 125$ mm alors que celui de la roue dentée à denture intérieure, solidaire de la roue motrice, est $d_2 = 524$ mm.

Notations et paramétrage Le repère associé :

- au sol (0) est noté $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
- au corps (c) du droïde est noté $\mathcal{R}_c(M, \vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$;
- à la roue motrice gauche (g) est noté $\mathcal{R}_g(M, \vec{x}_g, \vec{y}_c, \vec{z}_g)$;
- à la roue motrice droite (d) est noté $\mathcal{R}_d(M, \vec{x}_d, \vec{y}_c, \vec{z}_d)$;

Le corps (c) regroupe le châssis du droïde, les motorisations, les batteries, l'électronique, la charge transportée et la roulette arrière qui peut être modélisée comme un contact ponctuel en K avec le sol :

- centre de gravité, noté G , tel que $\overrightarrow{GM} = a \overrightarrow{x}_c + h \overrightarrow{z}_c$;
- $\overrightarrow{MK} = -R \overrightarrow{z} - b \overrightarrow{x}_c$;
- masse m .

De plus

- M est un point de l'axe de rotation des roues tel que $\overrightarrow{MI} = l \overrightarrow{y}_c - R \overrightarrow{z}_c$ et $\overrightarrow{JM} = l \overrightarrow{y}_c + R \overrightarrow{z}_c$.

Hypothèse

- Le référentiel $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ est supposé être galiléen.
- Le droïde est supposé en mouvement suffisamment lent pour pouvoir être supposé immobile par rapport au référentiel $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$.
- le vecteur accélération de la pesanteur est noté $\overrightarrow{g} = -g \overrightarrow{z}$ avec $g \approx 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, le plan $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ est supposé être horizontal et $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{z}_c$;
- la roue arrière est supposée être toujours au contact du sol en K ;
- l'action mécanique du sol sur (c) en K est modélisée par un glisseur vertical : $\overrightarrow{R}_{0 \rightarrow c} = N_K \overrightarrow{z}$;
- les roues motrices (g) et (d) sont :
 - * en liaison pivot parfaite d'axe $(M, \overrightarrow{y}_c)$ avec le corps (c) du droïde;
 - * en liaison sphère-plan parfaite avec le sol (0), respectivement en I et J , de normale \overrightarrow{z} .

$$\text{Ainsi } \left\{ \mathcal{T}_{0 \rightarrow g} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ N_g & 0 \end{array} \right\}_{I, (\overrightarrow{x}_c, \overrightarrow{y}_c, \overrightarrow{z})} \quad \text{et } \left\{ \mathcal{T}_{0 \rightarrow d} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ N_d & 0 \end{array} \right\}_{J, (\overrightarrow{x}_c, \overrightarrow{y}_c, \overrightarrow{z})}$$

Notons que la dernière hypothèse ne permet pas de s'intéresser au couple moteur permettant de faire avancer le droïde.

Question 1 Représenter un graphe de structure mettant en évidence les solides (c), (g) et (d), les liaisons et les actions mécaniques qui agissent sur ou au sein du droïde.

Question 2 Appliquer le Théorème du Moment Statique à l'ensemble $\{c, g, d\}$ en M projeté sur \overrightarrow{y}_c . En déduire N_K .

Question 3 Appliquer le Théorème de la Résultante Statique à l'ensemble $\{c, g, d\}$ projeté sur \overrightarrow{z} . En déduire une relation entre N_d, N_g, N_K et les données du problème.

Question 4 Déterminer la démarche (théorème, isolement, point éventuel et projection) permettant d'obtenir l'équation suivante :

$$-lN_d + lN_g = 0$$

Question 5 Déterminer N_d, N_g .

Exercice 3 : Pince brucelles haptique

Inspiré de CCINP PSI 2024



La micro-manipulation désigne la manipulation d'objets de dimensions comprises entre quelques micromètres et quelques millimètres. Pour ceux assez grands pour être visibles à l'œil nu, mais trop petits pour être efficacement attrapés à la main, cela se fait actuellement bien souvent manuellement, avec des outils fins, tels que des pinces brucelles et requiert beaucoup d'expertise, de savoir-faire et de précision dans le geste. De nombreux domaines sont concernés par ces manipulations fines, complexes et rarement répétitives :

- la médecine (micro-chirurgie) ;
- l'artisanat (horlogerie, joaillerie) ;
- l'électronique (micro-circuits électroniques).

La pince brucelles est une pince fine à ressorts, ouverte au repos et adaptée pour saisir de très petits objets.

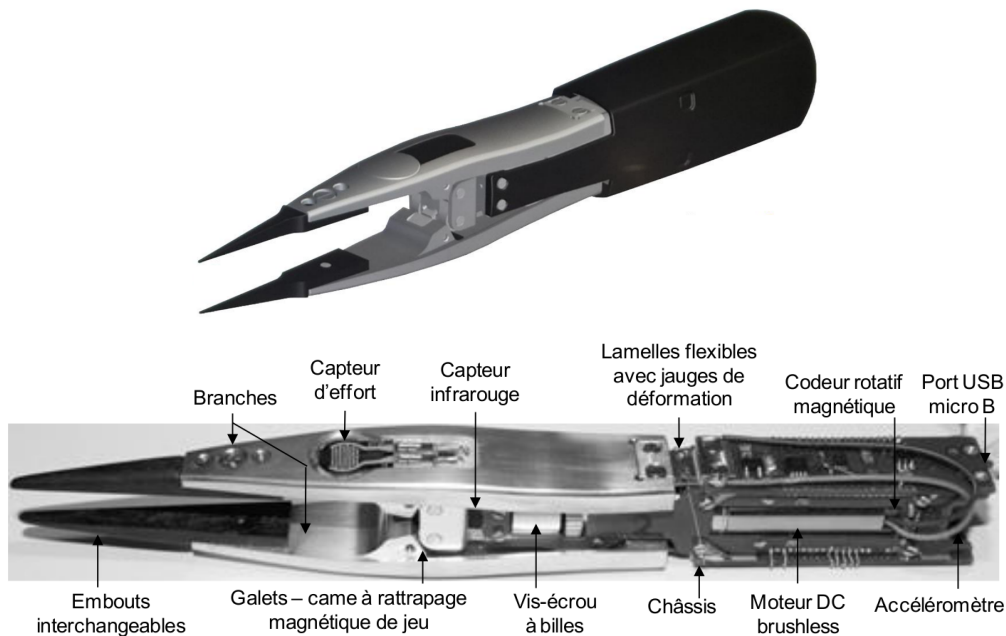


FIGURE 1 – Pince instrumentée.

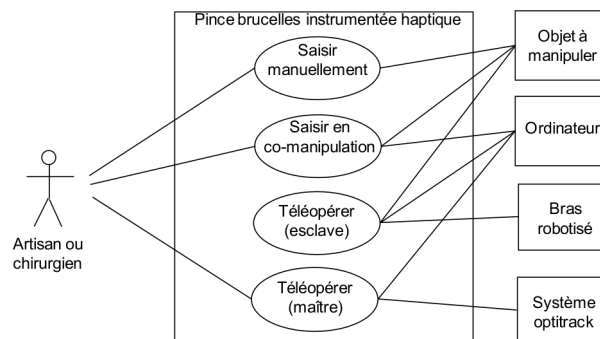


FIGURE 2 – Diagramme des cas d'utilisation.

Le système étudié dans ce sujet se rapproche d'une pince brucelles classique. La pince instrumentée est polyvalente car destinée à quatre cas d'utilisation essentiels :

- manuelle : l'opérateur actionne alors uniquement avec ses doigts la fermeture de la pince sur un objet ;

- collaborative : l'opérateur commande avec sa main la pince, qui l'assiste alors notamment dans le contrôle de la force de serrage ou le maintien d'un objet (co-manipulation) ;
- maître : l'opérateur se sert de la pince pour contrôler à distance une autre pince (téléopération) ;
- esclave : le contrôle à distance permet automatiquement de suivre les mouvements du maître et de l'opérateur, en particulier l'ouverture et la fermeture de la pince (téléopération) sur un objet.

Selon les cas d'utilisation, au plus trois actions mécaniques distinctes s'exercent sur les deux branches de la pince :

- F_u : force exercée par l'utilisateur sur la pince ;
- F_o : force exercée par l'objet saisi sur la pince ;
- C_m : couple exercé par le moteur sur la pince.

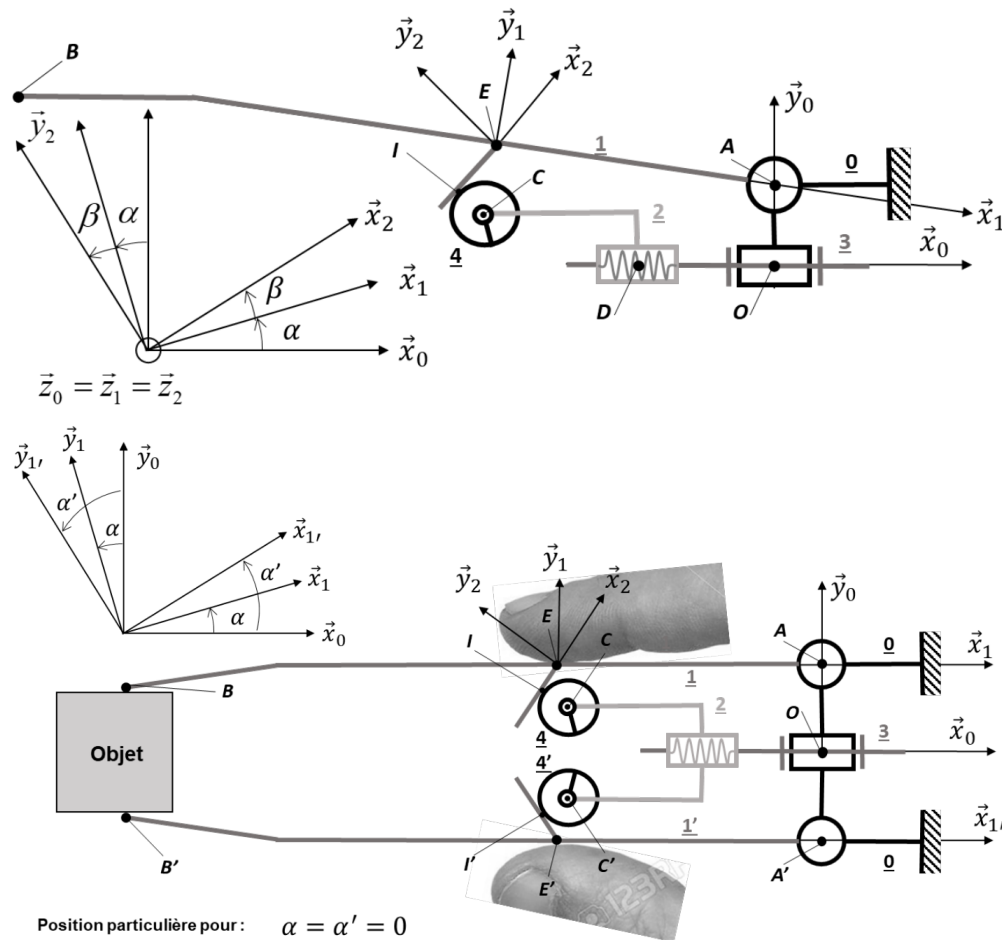


FIGURE 3 – Modèle de la demi-pince et de la pince complète.

On fournit le paramétrage suivant :

- $\alpha(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$
- $\vec{OD} = x_D(t) \vec{x}_0$
- $\vec{EI} = x_I(t) \vec{x}_2$ avec $x_I(t) < 0$
- $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = 60^\circ$
- $\vec{OA} = y_A \vec{y}_0$
- $\vec{AE} = x_E \vec{x}_1$ avec $x_E < 0$
- $\vec{CI} = R_g \vec{y}_2$
- $\vec{DC} = x_C \vec{x}_0 + y_C \vec{y}_0$ avec $x_C < 0$
- $\vec{AB} = x_B \vec{x}_1 + y_B \vec{y}_1$ avec $x_B < 0$ et $y_B < 0$
- $x_D = \frac{pas}{2\pi} \theta_3$ avec $\theta_3 = 0^\circ$ si $\alpha = 0^\circ$.

On s'intéresse au cas d'une utilisation maître-esclave. On souhaite déterminer le couple moteur C_m nécessaire au niveau de la pince maître pour reproduire l'effort de prise d'un objet par la pince esclave F_o . On se contentera dans l'étude de la saisie d'un objet de dimensions telles que α est suffisamment proche de 0 pour faire l'hypothèse $\alpha = 0^\circ$.

On notera :

- couple moteur s'exerçant de 0 sur 3 : $\{\mathcal{T}_{M_{0 \rightarrow 3}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{x}_0 \end{array} \right\}_O$
- effort de l'utilisateur sur 1 ou 1' : $\{\mathcal{T}_{u \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} -F_u \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_E$ ou $\{\mathcal{T}_{u \rightarrow 1'}\} = \left\{ \begin{array}{c} +F_u \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{E'}$
- effort de l'objet sur 1 ou 1' : $\{\mathcal{T}_{o \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} +F_o \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$ ou $\{\mathcal{T}_{o \rightarrow 1'}\} = \left\{ \begin{array}{c} -F_o \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{B'}$
- Le contact entre 4 et 1 (et entre 4' et 1') est modélisé par une liaison linéaire rectiligne.

Déterminons tout d'abord la relation entre l'effort de l'utilisateur F_u et celui de l'objet F_o pour une pince classique non instrumentée. On suppose donc dans un premier temps que le moteur n'exerce aucun couple : $C_m = 0$. On suppose que $\|\vec{R}_{4 \rightarrow 1}\| = \|\vec{R}_{4 \rightarrow 1'}\|$ par symétrie du problème.

Question 1 Prouver que $C_m = 0$ implique que $\vec{R}_{4 \rightarrow 1} = \vec{0}$.

Question 2 Exprimer F_u en fonction de F_o grâce à une équation scalaire issue de l'application d'un théorème que vous énoncerez avec soin.

On s'intéresse à présent à la pince maître pour laquelle il n'y a pas d'objet. On a donc $F_o = 0$. On cherche le couple moteur C_m permettant d'obtenir le même effort utilisateur qu'en présence de l'objet.

Question 3 Exprimer F_u en fonction de C_m grâce à une démarche que vous préciserez et énoncerez avec soin (théorème, isolement, point éventuel, projection).

Question 4 En déduire le couple moteur C_m à fournir dans la pince maître pour simuler la présence de l'objet de la pince esclave.

- $\{\mathcal{T}_{2-3}\}$ de résultante F_{23} et de moment nul en D

On suppose que la plate-forme est toujours horizontale. On suppose par ailleurs que les liaisons sont parfaites et les solides de masse négligeable à l'exception de la plate-forme (et la charge), qui subit l'action de la pesanteur. La masse maximale autorisée sur la plate-forme est de $M_{max} = 270$ kg. Son centre de masse est située en G .

Préambule

Question 1 Réalisez un graphe de liaisons du mécanisme.

Question 2 Indiquez sur le graphe des liaisons les différentes actions mécaniques (sauf celles dues aux liaisons).

Détermination de C_{36}

Question 3 Explicitez une démarche (isolement, théorème et projection) permettant de déterminer le couple C_{36} . (Indication : une équation scalaire suffit)

Question 4 Appliquez cette démarche. Quelle est la valeur numérique de C_{36} si la plate-forme est vide (masse nulle)? Si elle atteint son chargement maximal?

Détermination de C_{01}

Question 5 Explicitez une démarche (isolement, théorème et projection) permettant de déterminer le couple C_{01} . (Indication : une équation scalaire suffit)

Question 6 Appliquez cette démarche. Quelle est la valeur numérique de C_{01} si la plate-forme est vide (masse nulle)? Si elle atteint son chargement maximal?

Détermination de F_{23}

Question 7 Explicitez une démarche (isolement, théorème et projection) permettant de déterminer la force F_{23} . (Indication : une équation scalaire suffit)

Question 8 Appliquez cette démarche. La valeur de F_{23} dépend-elle de la position de la plate-forme par rapport au châssis?

Question 9 Quelle est la valeur numérique maximale de F_{23} (dans la pire configuration)? Et sa valeur minimale en charge? Et à vide?

Détermination de F_{45}

Question* 10 Explicitez une démarche (isolement, théorème et projection) permettant de déterminer la force F_{45} . (Indication : une équation scalaire **ne suffit pas**)

Question 11 Appliquez cette démarche.

Question 12 La valeur de F_{45} dépend-elle de la position de la plate-forme par rapport au châssis?

Question 13 Quelle est la valeur numérique maximale de F_{45} (dans la pire configuration)? Et sa valeur minimale en charge? Et à vide?