

Séquence 8

Déterminer l'effort global dû à des efforts locaux, avec ou sans frottements

**Objectif de la séquence**

Dans la séquence précédente, nous avons étudié comment traduire l'équilibre mécanique d'un système afin de déterminer les efforts exercés par les actionneurs ou les liaisons dans le cas de chargements connus simples. Nous nous intéressons ici à la caractérisation des actions mécaniques dues à des efforts locaux distribués sur une surface, un volume. Dans le cas d'actions de contact entre deux solides, nous étudierons un modèle de frottements.

**Table des matières**

Page

1 Déterminer le torseur statique dû à une action mécanique répartie . . . . . 2

2 Du contact ponctuel à la modélisation du frottement . . . . . 5

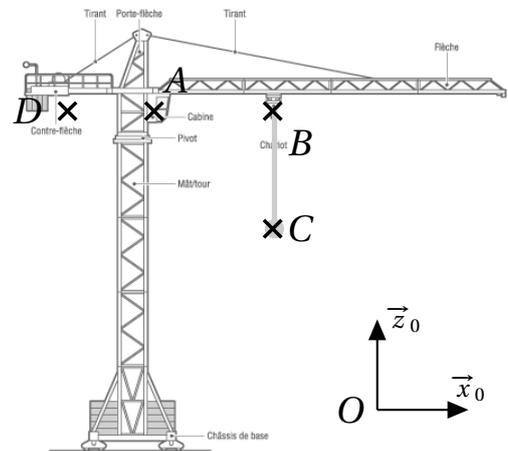


FIGURE 1 – Grue des anciens chantiers navals de Nantes et plan d'une grue similaire.

La tour de la grue est solidaire du sol. La liaison entre les deux est donc un encastrement. Afin de pouvoir étudier par la suite les actions mécaniques transmises par cette liaison, on décide de représenter la tour et le sol comme deux solides différents sur le graphe de structure. La flèche, la contre-flèche et le contre-poids sont mis en rotation par rapport à la tour par un actionneur exerçant un couple pur. Le chariot peut se déplacer sur la flèche grâce à un ensemble mécanique dont l'action mécanique peut être modélisée par une force en B. Le câble permettant de soulever la charge est supposé tendu en permanence et on décide alors de modéliser l'ensemble charge et câble par un solide indéformable en liaison rotule avec le chariot. Cette liaison n'est pas motorisée.

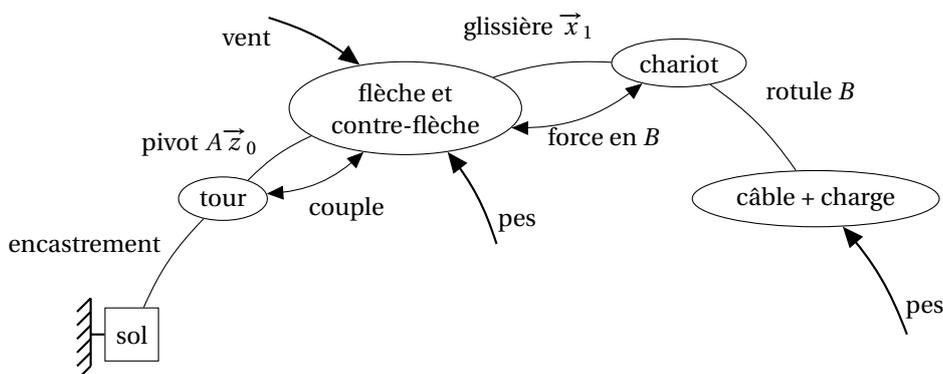


FIGURE 2 – Graphe de liaisons avec chargement extérieur et efforts des actionneurs.

Les torseurs d'action mécanique associés aux liaisons de la grue sont de la forme :

## 1 Déterminer le torseur statique dû à une action mécanique répartie

Les solides sont souvent soumis à d'autres actions mécaniques que celles dues aux liaisons. Certaines de ces actions mécaniques, comme l'action de la pesanteur sur un objet ou celle du vent sur la flèche d'une grue, ont pour origine l'application d'un **effort réparti** sur une ligne, une surface ou un volume.

### 1.1 Action volumique – cas de la pesanteur

#### À savoir

L'action gravitationnelle exercée par la Terre, appelée pesanteur, est couramment modélisée comme un glisseur s'appliquant à tout point matériel.

Autrement dit, à tout volume de matière élémentaire  $dV$  de masse volumique  $\rho$  situé autour d'un point  $M$ , on peut associer un glisseur élémentaire  $\{d\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow dV}\}$  caractérisé par

$$\left\{ d\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow \mathcal{S}}^{dV(M)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} d\vec{F}_{\text{pes} \rightarrow \mathcal{S}}^{dV(M)} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{c} \rho dV \vec{g} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$$

où  $\vec{g}$  est le vecteur accélération de la pesanteur.

#### Attention !

L'écriture du torseur d'action mécanique élémentaire avec un "d" traduit le fait que la norme des vecteurs qui le composent est infinitésimale, en raison du volume de matière  $dV$  qui est lui-même infinitésimal.

#### À savoir

L'action mécanique de la pesanteur sur un système matériel  $\mathcal{S}$ , occupant un volume  $V$  est donc la somme<sup>a</sup> des actions mécanique élémentaires. Ainsi

$$\left\{ \mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow \mathcal{S}} \right\} = \int_{M \in \mathcal{S}} \left\{ d\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow \mathcal{S}}^{dV(M)} \right\}$$

a. La somme sur l'infinité des points volumiques élémentaires correspond à l'intégrale.

Pour déterminer l'intégrale de ces torseurs élémentaires, il est nécessaire de les exprimer en un **même point**. Exprimons tous les torseurs élémentaires en un point  $A$ . Pour ce faire, calculons le moment en  $A$  du torseur élémentaire dû à l'action de la pesanteur en  $M$  :

$$d\vec{\mathcal{M}}_{\text{pes} \rightarrow \mathcal{S}}^{dV(M)}(A) = d\vec{\mathcal{M}}_{\text{pes} \rightarrow \mathcal{S}}^{dV(M)}(M) + d\vec{F}_{\text{pes} \rightarrow \mathcal{S}}^{dV(M)} \wedge \vec{MA} = \vec{0} + d\vec{F}_{\text{pes} \rightarrow \mathcal{S}}^{dV(M)} \wedge \vec{MA}$$

On en déduit que

$$\left\{ d\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow \mathcal{S}}^{dV(M)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} d\vec{F}_{\text{pes} \rightarrow \mathcal{S}}^{dV(M)} \\ d\vec{F}_{\text{pes} \rightarrow \mathcal{S}}^{dV(M)} \wedge \vec{MA} \end{array} \right\}_A$$

Le torseur d'action mécanique global s'exprime donc en  $A$  :

$$\left\{ \mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow \mathcal{S}} \right\} = \int_{M \in \mathcal{S}} \left\{ d\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow \mathcal{S}}^{dV(M)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{M \in \mathcal{S}} d\vec{F}_{\text{pes} \rightarrow \mathcal{S}}^{dV(M)} \\ \int_{M \in \mathcal{S}} d\vec{F}_{\text{pes} \rightarrow \mathcal{S}}^{dV(M)} \wedge \vec{MA} \end{array} \right\}_A$$

Ici,  $d\vec{F}_{\text{pes} \rightarrow \mathcal{S}}^{dV(M)} = \rho \vec{g} dV$ , donc en supposant  $\vec{g}$  uniforme, on a  $\vec{F}_{\text{pes} \rightarrow \mathcal{S}} = \int_{M \in \mathcal{S}} d\vec{F}_{\text{pes} \rightarrow \mathcal{S}}^{dV(M)} = \rho \vec{g} V$  ou encore  $\vec{F}_{\text{pes} \rightarrow \mathcal{S}} = m \vec{g}$ , avec  $m = \rho V$  la masse de  $\mathcal{S}$ .

Par ailleurs, il est possible de définir un point où l'expression du moment de l'action mécanique de la pesanteur est nul. Il s'agit du **centre de masse**<sup>1</sup> que l'on note souvent  $G_{\mathcal{S}}$ . Ce point est défini par  $\int_{M \in \mathcal{S}} \vec{MG}_{\mathcal{S}} dm = \int_{M \in \mathcal{S}} \rho \vec{MG}_{\mathcal{S}} dV = \vec{0}$ .



### À savoir

Le torseur d'action mécanique global de la pesanteur sur le solide  $\mathcal{S}$  s'écrit donc

$$\left\{ \mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow \mathcal{S}} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} m \vec{g} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_{\mathcal{S}}}$$

Les actions de la pesanteur sur la charge et sur la contre-flèche de la flèche s'écrivent :



### Pour aller plus loin

Il existe d'autres actions volumiques comme, par exemple, celles exercées par des charges électriques sur un matériau chargé. En fonction de l'expression de la force élémentaire, le torseur n'aura pas forcément la même expression finale.

## 1.2 Actions surfaciques de contact



### À savoir

Lorsque deux solides ou un solide et un fluide sont en contact, chacun exerce une action mécanique sur l'autre en tout point de contact, qui peut être modélisée par un glisseur. Notons le torseur d'action mécanique élémentaire autour d'un point  $M$  :

$$\left\{ d\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}^{dS(M)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} d\vec{R}_{1 \rightarrow 2}^M \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$$

En notant  $S$  la surface de contact,  $M$  un point courant de  $S$  et  $dS(M)$  la surface élémentaire autour de  $M$ , on peut exprimer le torseur global d'action mécanique dû à cette action surfacique :

$$\left\{ \mathcal{T}_{1 \rightarrow 2} \right\} = \int_{M \in S} \left\{ d\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}^{dS(M)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{M \in S} d\vec{R}_{1 \rightarrow 2}^M \\ \int_{M \in S} d\vec{R}_{1 \rightarrow 2}^M \wedge \vec{MA} \end{array} \right\}_A$$

1. En appliquant la relation de Chasles à cette définition avec un point quelconque, par exemple l'origine  $O$  d'un repère, on a  $\int_{M \in \mathcal{S}} (\vec{MO} + \vec{OG}_{\mathcal{S}}) dm = \vec{0}$  et donc  $m\vec{OG}_{\mathcal{S}} = \int_{M \in \mathcal{S}} \vec{OM} dm$ . Cette définition est à rapprocher de celle du barycentre  $G$  de deux masses ponctuelles  $m_A$  en  $A$  et  $m_B$  en  $B$  :  $\vec{OG} = \frac{1}{m_A + m_B} (m_A \vec{OA} + m_B \vec{OB})$

 **Remarque**

Remarquons que la dimension physique de  $d\vec{R}_{1 \rightarrow 2}^M$  est bien celle d'une force mais que sa norme est infiniment petite puisqu'il s'agit de la force exercée par un solide sur un autre sur une surface infiniment petite. On écrit habituellement  $d\vec{R}_{1 \rightarrow 2}^M$  sous la forme  $d\vec{R}_{1 \rightarrow 2}^M = p dS \vec{v}$  où  $p$  est homogène à une pression ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ),  $dS$  est une surface élémentaire et  $\vec{v}$  un vecteur unitaire.

Modélisons l'action du vent sur la flèche. On suppose que la flèche peut être modélisée comme un parallélépipède occupant les points de l'espace de coordonnées  $M$  tels que  $\vec{AM} = x\vec{x}_1 + y\vec{y}_1 + z\vec{z}_0$  et

$$(x, y, z) \in [-d; D] \times \left[-\frac{l}{2}; \frac{l}{2}\right] \times \left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right]$$

et dont la surface exposée au vent correspond aux points  $M$  tels que  $y = \frac{-l}{2}$ . On suppose par ailleurs que l'action du vent sur une surface élémentaire  $dS$  est orthogonale à cette surface, de sens entrant dans la matière, et de norme  $p dS$  avec  $p$  constante.

### 1.3 Actions linéiques de contact

#### ♥ À savoir

Lorsque l'on suppose que le lieu sur lequel s'exerce l'action mécanique est réduit à une ligne (l'une des dimensions de la surface est négligée devant l'autre), il est possible de définir une action mécanique linéique. On notant  $\mathcal{L}$  cette ligne, on a alors

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \int_{M \in \mathcal{L}} \{d\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}^{d\ell(M)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{M \in \mathcal{L}} d\vec{R}_{1 \rightarrow 2}^M \\ \int_{M \in \mathcal{L}} d\vec{R}_{1 \rightarrow 2}^M \wedge \vec{MA} \end{array} \right\}_A$$

avec  $d\vec{R}_{1 \rightarrow 2}^M$  de la forme  $d\vec{R}_{1 \rightarrow 2}^M = f_\ell d\ell \vec{v}$ ,  $f_\ell$  étant une force linéique ( $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ ) et  $d\ell$  une longueur élémentaire.

## 2 Du contact ponctuel à la modélisation du frottement

### 2.1 Modélisation du frottement sec - Résistance au glissement

Intéressons-nous au modèle de contact le plus simple entre deux solides : le contact ponctuel. Du point de vue des actions mécaniques, une liaison ponctuelle parfaite ne permet d'exercer qu'un effort de type glisseur suivant la normale au contact :

$$\{\mathcal{T}^{\text{ponctuelle}}\} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{array} \right\}_{A, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

en notant  $\vec{z}$  la normale au contact et  $A$  le centre de la liaison ponctuelle. Cependant, une modélisation plus fine d'un contact ponctuel entre deux solides montre qu'il peut exister une résistance au glissement, c'est à dire, une force qui s'oppose au glissement entre les deux solides en contact : la force de **frottement**. Ceci est dû à la forme réelle de la zone de contact et à l'état de surface des deux solides, c'est-à-dire à la présence d'irrégularités sur la zone de contact.

#### ♥ À savoir

Une modélisation simple de la force de frottement est donnée par Charles-Augustin **Coulomb** (fin XVIII<sup>e</sup>) :

- une force de frottement s'applique au point de contact ;
- sa direction est la même que celle du glissement potentiel<sup>a</sup> auquel elle s'oppose ;
- son sens est opposé à celui du glissement potentiel ;
- sa norme maximale est proportionnelle à la résultante de l'effort normal entre les deux solides ;
- sa norme est égale à sa norme maximale s'il y a glissement et inférieure ou égale à sa norme maximale s'il y a adhérence (vitesse de glissement nulle).

<sup>a</sup>. Bien que le glissement soit nul, il peut exister une force de frottement si en l'absence de celle-ci, un glissement pourrait apparaître. On dit alors qu'il s'agit d'un glissement **potentiel**.

Habituellement, dans l'énoncé des lois de Coulomb, on note  $\vec{N}$  la partie normale au plan de contact de la résultante de l'action mécanique de la liaison et  $\vec{T}$  la partie tangentielle (donc l'effort de frottement).

### ♥ À savoir

La loi de Coulomb peut se résumer par :

$$\begin{cases} \|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\| & \text{s'il n'y a pas de glissement} \\ \|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\| & \text{s'il y a glissement} \end{cases}$$

où  $f$  est appelé **coefficient de frottement** et dépend des deux matériaux en contact.  
Le coefficient de frottement est une grandeur sans dimension.

### ★ Quelques précisions supplémentaires

Le coefficient de frottement dépend également des états de surface de ceux-ci, de la présence éventuelle d'un fluide intermédiaire etc. Sa valeur est déterminée de façon empirique.

Ainsi, s'il existe une vitesse de glissement potentielle de direction et de sens  $+\vec{x}$ , le torseur d'action mécanique dû à une liaison ponctuelle de centre  $A$  et de normale  $\vec{z}$  est :

$$\text{en cas de glissement : } \left\{ \mathcal{T}^{\text{ponct.}+\text{frott.}} \right\} = \begin{Bmatrix} -fZ & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_A$$

$$\text{en cas de non-glissement : } \left\{ \mathcal{T}^{\text{ponct.}+\text{frott.}} \right\} = \begin{Bmatrix} -T & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_A \text{ avec } 0 \leq T \leq fZ$$

## 2.2 Cône de frottement

Il est possible de donner une représentation graphique des efforts de frottement.

Le vecteur lié représentant la force exercée par l'un des solides sur l'autre est donc compris dans un cône de sommet le point de contact et de demi-angle au sommet  $\varphi = \arctan(f)$  en cas d'adhérence. En cas de glissement, le vecteur est sur la surface du cône.



### Pour aller plus loin

## 2.3 Résistance au pivotement

La loi de Coulomb pour le glissement peut également s'appliquer localement. Ainsi, on peut prouver qu'il existe également une résistance au pivotement.

Il s'agit d'un moment au point de contact ayant :

- la même direction que le pivotement potentiel auquel il s'oppose (normale à la surface de contact) ;
- son sens est opposé à celui du pivotement potentiel ;
- sa norme maximale est proportionnelle à la résultante de l'effort normal entre les deux solides ;
- sa norme est égale à sa norme maximale s'il y a pivotement et inférieure ou égale à sa norme maximale s'il n'y a pas de pivotement.

Ainsi, en notant  $\vec{M}_p$  le moment de résistance au pivotement, on a :

$$\begin{cases} \|\vec{M}_p\| \leq \delta \|\vec{N}\| & \text{s'il n'y a pas de pivotement} \\ \|\vec{M}_p\| = \delta \|\vec{N}\| & \text{s'il y a pivotement} \end{cases}$$

où  $\delta$  est appelé **coefficient de résistance au pivotement** et est homogène à une longueur.



## Pour aller plus loin

### 2.4 Résistance au roulement

La déformation locale de la zone de contact en cas de roulement potentiel permet d'expliquer l'existence d'une résistance au roulement.

Il s'agit d'un moment au point de contact ayant :

- la même direction que le roulement potentiel auquel il s'oppose;
- son sens est opposé à celui du roulement potentiel;
- sa norme maximale est proportionnelle à la résultante de l'effort normal entre les deux solides;
- sa norme est égale à sa norme maximale s'il y a roulement et inférieure ou égale à sa norme maximale s'il n'y a pas de roulement.

Ainsi, en notant  $\vec{M}_r$  le moment de résistance au roulement, on a :

$$\begin{cases} \|\vec{M}_r\| \leq \eta \|\vec{N}\| & \text{s'il n'y a pas de roulement} \\ \|\vec{M}_r\| = \eta \|\vec{N}\| & \text{s'il y a roulement} \end{cases}$$

où  $\eta$  est appelé **coefficient de résistance au roulement** et est homogène à une longueur.



## Pour aller plus loin

### 2.5 Glissement et adhérence

Une modélisation un peu plus poussée des efforts de frottement entraîne la distinction entre

**le coefficient de frottement**, rapport entre les forces tangentielles et normales lorsqu'il y a glissement; et

**le coefficient d'adhérence**, rapport maximal entre les forces tangentielles et normales lorsqu'il y a adhérence, c'est-à-dire absence de glissement.

Ainsi :

$$\begin{cases} \|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\| & \text{s'il y a glissement} \\ \|\vec{T}\| \leq f_0 \|\vec{N}\| & \text{s'il y a adhérence} \end{cases}$$

où  $f$  est le coefficient de frottement et  $f_0$  le coefficient d'adhérence.

Le coefficient d'adhérence  $f_0$  est plus élevé que le coefficient de frottement  $f$ . Il est donc plus simple de maintenir un glissement que de le provoquer.