

## Séquence 9

## Prévoir les performances globales d'un système asservi à partir de sa réponse fréquentielle

### Objectif

La réponse temporelle des systèmes linéaires continus et invariants (SLCI) n'est pas toujours adaptée à une quantification précise de ses performances. En effet, nous avons vu que le temps de réponse à 5 % pouvait être fastidieux à déterminer expérimentalement. De plus, une petite variation des caractéristiques d'un système peut entraîner une grande variation du temps de réponse à 5 %. Par ailleurs, la stabilité n'a été décrite que de façon qualitative dans le cas d'un système instable et sa quantification dans le cas des systèmes stables ne s'est faite que par le dépassement.

Nous verrons ici une approche plus théorique, basée sur la réponse fréquentielle des SLCI, qui nous permettra de prédire et de quantifier la rapidité, la stabilité et la précision des SLCI et en particulier des systèmes asservis.

Intéressons-nous au fermenteur à levain étudié en TP afin de prédire ses performances en analysant sa réponse fréquentielle.

## 1 Réponse fréquentielle d'un SLCI et d'un système asservi

### 1.1 Réponse temporelle d'un SLCI à une entrée sinusoïdale

On rappelle que le comportement d'un SLCI peut être caractérisé par une équation différentielle de la forme

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n}(t) + \dots + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2}(t) + a_1 \frac{ds}{dt}(t) + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m}(t) + \dots + b_2 \frac{d^2 e}{dt^2}(t) + b_1 \frac{de}{dt}(t) + b_0 e(t)$$

Si un tel système est soumis à une entrée sinusoïdale de la forme

$$e(t) = E_0 \sin(\omega t)$$

alors on peut prouver que la solution est sinusoïdale de même pulsation que l'entrée :

$$s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

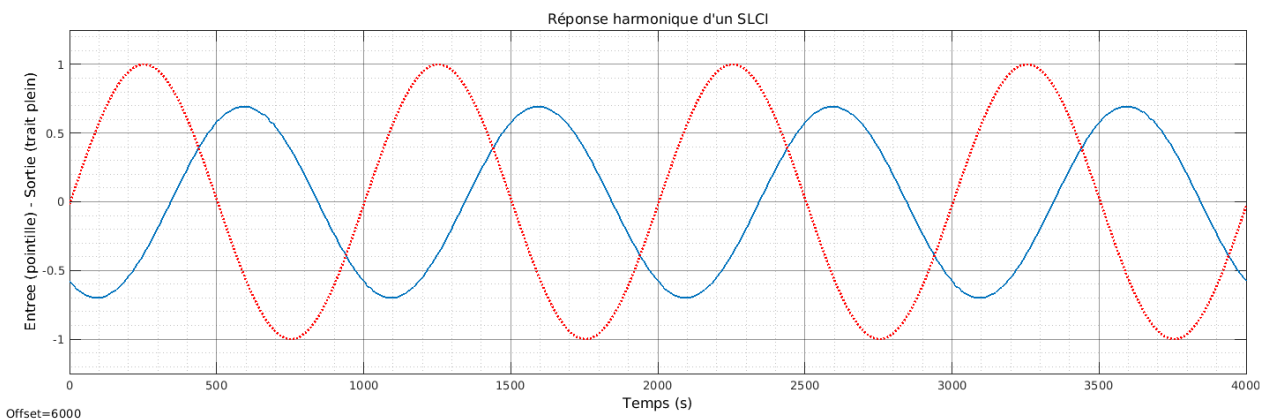


FIGURE 1 – Réponse harmonique d'un SLCI.

Ces deux signaux peuvent s'écrire comme la partie imaginaire des grandeurs complexes  $\underline{e}(t) = E_0 e^{j\omega t}$  et  $\underline{s}(t)$ , la solution de l'équation différentielle

$$a_n \frac{d^n \underline{s}}{dt^n}(t) + \dots + a_2 \frac{d^2 \underline{s}}{dt^2}(t) + a_1 \frac{d\underline{s}}{dt}(t) + a_0 \underline{s}(t) = b_m \frac{d^m \underline{e}}{dt^m}(t) + \dots + b_2 \frac{d^2 \underline{e}}{dt^2}(t) + b_1 \frac{d\underline{e}}{dt}(t) + b_0 \underline{e}(t)$$

qui est de la forme  $\underline{s}(t) = S_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ . Notons que la grandeur imaginaire notée  $i$  en mathématiques est ici notée  $j$  comme en physique (donc  $j^2 = -1$ ).

Comme  $\frac{d}{dt} e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t}$ , alors  $\frac{d\underline{e}}{dt}(t) = j\omega \underline{e}(t)$  et  $\frac{d\underline{s}}{dt}(t) = j\omega \underline{s}(t)$  et l'équation différentielle précédente peut s'écrire

$$(a_n(j\omega)^n + \dots + a_1(j\omega) + a_0)\underline{s}(t) = (b_m(j\omega)^m + \dots + b_1(j\omega) + b_0)\underline{e}(t)$$

ou encore

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1(j\omega) + a_0}$$

On reconnaît ici la forme de la fonction de transfert du système étudié appliquée en  $p = j\omega$ . Donc

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{S_0}{E_0} e^{j\varphi} = H(j\omega)$$

Pour connaître la réponse d'un SLCI à une excitation sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , il suffit donc de déterminer la valeur complexe de la fonction de transfert appliquée à  $j\omega$ . Plus particulièrement, on a

$$\frac{S_0}{E_0} = |H(j\omega)| \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(H(j\omega))$$



### À savoir

La réponse en régime sinusoïdale (également appelée **réponse harmonique**) est caractérisée par deux grandeurs qui dépendent de la pulsation d'excitation  $\omega$  :

- l'**amplification**  $|H(j\omega)|$  ou le **gain**, noté  $G_{dB}$  et exprimé en décibels (dB),  $G_{dB} = 20 \log_{10}(|H(j\omega)|)$
- la **phase**  $\arg(H(j\omega))$ .

## 1.2 Diagramme de Bode

Il est utile de représenter graphiquement la réponse harmonique d'un système. Une représentation temporelle serait fastidieuse, redondante et incomplète. En effet, il faudrait tracer la réponse temporelle du système à des entrées sinusoïdales de pulsations différentes. L'allure de ces tracés n'apporterait aucune information (on sait que la sortie est sinusoïdale de même pulsation que l'entrée). De plus, on ne pourrait tracer la réponse qu'à un nombre restreint de signaux harmoniques d'excitation.

Il est donc préférable de tracer directement les grandeurs caractérisant la réponse harmonique : l'amplification et la phase en fonction de la pulsation du signal d'excitation.



### À savoir

#### Diagramme de Bode

On représente graphiquement la réponse fréquentielle d'un SLCI grâce à son **diagramme de Bode**, ensemble de la courbe de **gain** et de la courbe de **phase** en fonction de la **pulsation**, en **échelle logarithmique**.



### Remarque

Il est d'usage de tracer ces deux diagrammes l'un au dessus de l'autre de telle sorte que l'axe des pulsations de l'un soit aligné avec celui de l'autre.



### Attention !

L'échelle des abscisses étant logarithmique, la pulsation nulle se trouve à l'infini vers la gauche du graphique. Arrêter un tracé au niveau de l'axe des ordonnées n'a aucun sens!

### 1.3 Analyser le diagramme de Bode d'un SLCI

Intéressons-nous au comportement du fermenteur à levain étudié en TP avec un correcteur proportionnel intégral de paramètres  $k_p = 1 \text{ W/}^\circ\text{C}$  et  $T_i = 500 \text{ s}$ .

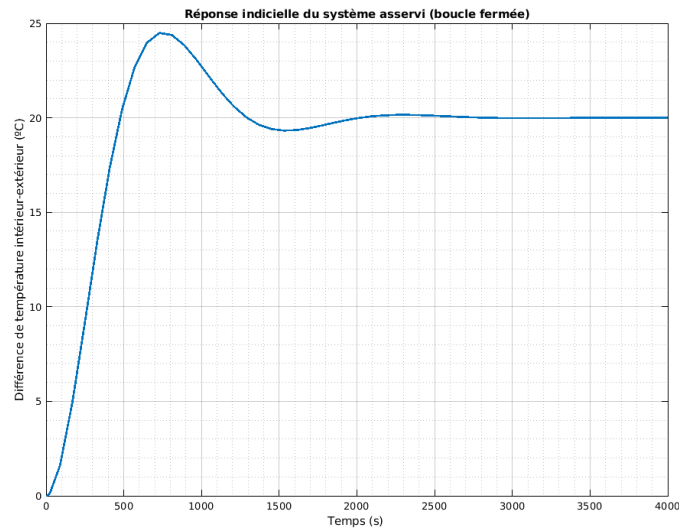


FIGURE 2 – Réponse indicielle du système asservi soumis à un échelon d'amplitude  $20^\circ\text{C}$ .

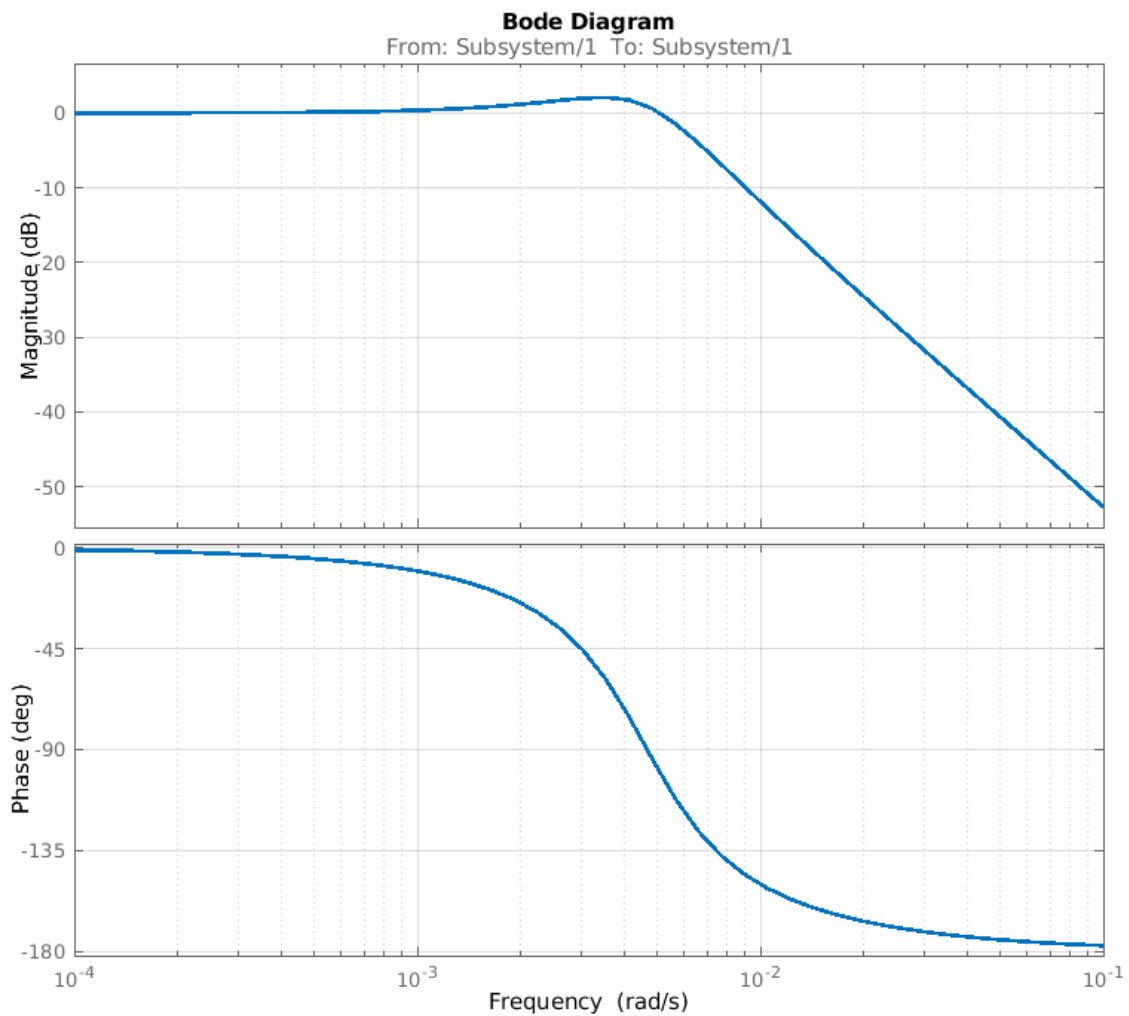


FIGURE 3 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée du système asservi.

Le diagramme de Bode traduit le comportement du système en réponse à n'importe quelle entrée sinusoïdale, une fois le régime permanent atteint. Ci-après, la réponse du système à des entrées sinusoïdales de différentes pulsations.

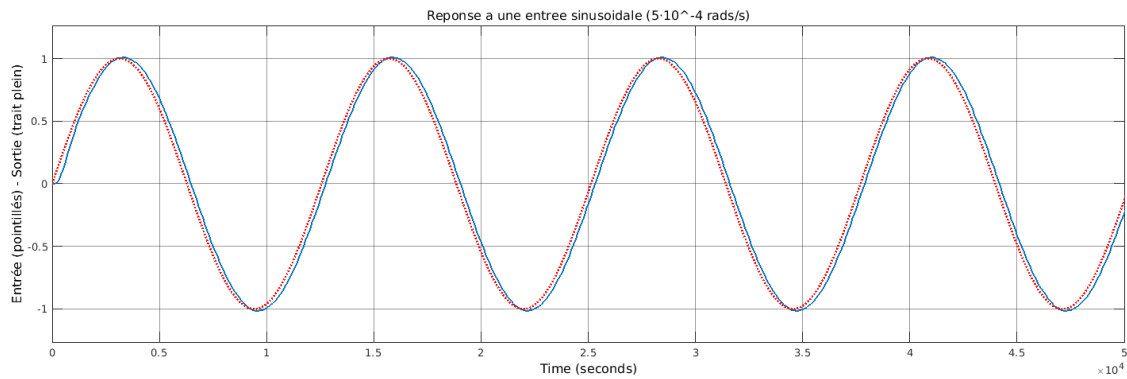


FIGURE 4 – Réponse du système asservi soumis à une entrée sinusoïdale d'amplitude  $1\text{ °C}$  et de pulsation  $5 \cdot 10^{-4}$  rad/s.

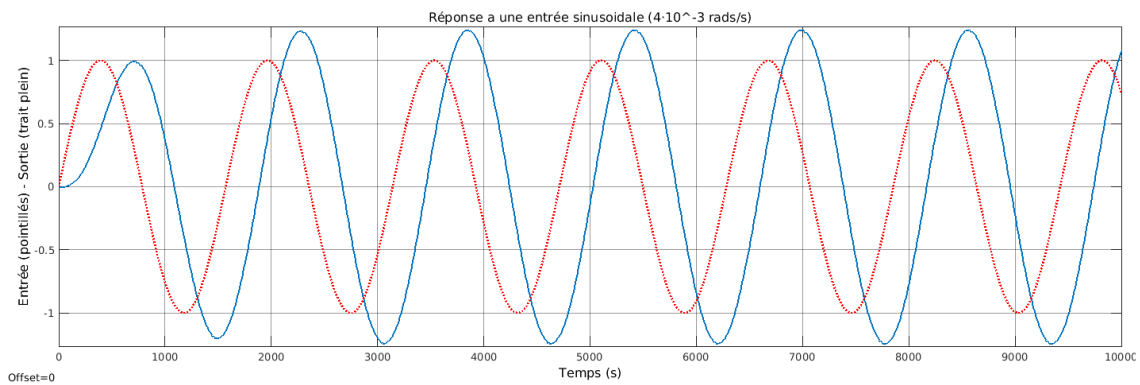


FIGURE 5 – Réponse du système asservi soumis à une entrée sinusoïdale d'amplitude  $1\text{ °C}$  et de pulsation  $4 \cdot 10^{-3}$  rad/s.

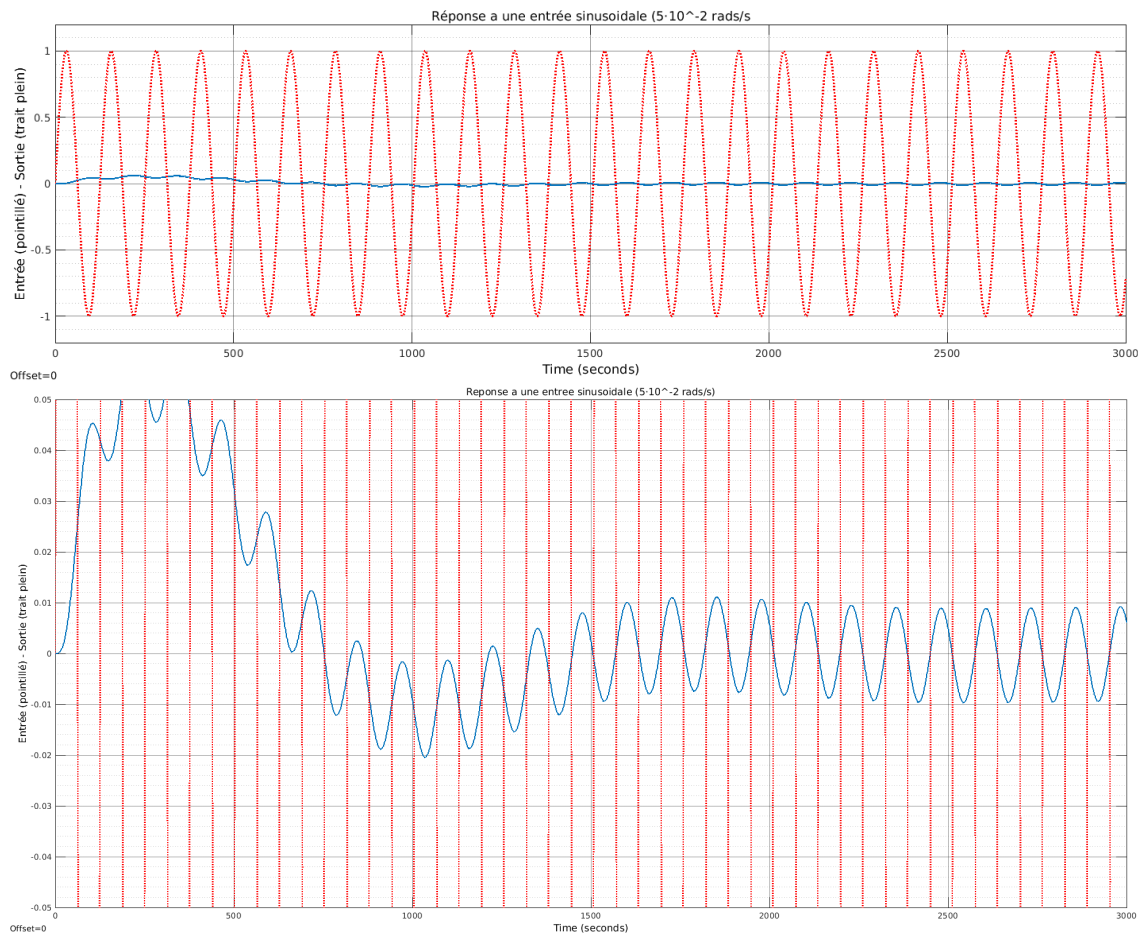


FIGURE 6 – Réponse du système asservi soumis à une entrée sinusoïdale d'amplitude 1 °C et de pulsation  $5 \cdot 10^{-2}$  rad/s (vue globale en haut et zoom en bas).

### 1.3.1 Amplification, gain et phase

Il est possible de lire sur le diagramme les grandeurs nécessaires à la caractérisation et au tracé de la réponse temporelle à une excitation sinusoïdale de pulsation donnée. La courbe du gain fournit, pour chaque pulsation, la valeur correspondante à  $20 \log_{10} \left( \frac{S_0}{E_0} \right)$ . On obtient donc l'amplification par le calcul suivant :  $\frac{S_0}{E_0} = 10^{\frac{G_{dB}}{20}}$ . En ce qui concerne la phase, on la lit sur la deuxième courbe.

#### Remarque


Dans la plupart des cas, **la phase est négative**, ce qui traduit le **retard** de la sortie par rapport à l'entrée.

 **Attention !**

Remarquons qu'il est alors différent d'écrire  $\varphi = -360^\circ$  et  $\varphi = 0^\circ$ . Bien que la phase soit définie mathématiquement à  $360^\circ$  près, le sens physique est très différent dans ces deux cas. Dans l'un des cas le signal de sortie est en **retard** d'une période par rapport à celui d'entrée, et dans l'autre, ils sont en phase. De ce fait, on gardera toujours la valeur *brute* de la phase, sans chercher à l'exprimer modulo  $360^\circ$ .

#### 1.4 Tracer le diagramme de Bode d'un SLCI


Tracer le diagramme de Bode d'un SLCI à partir de sa fonction de transfert peut se faire numériquement en calculant le gain et la phase pour un grand nombre de pulsations. Cependant, il est souvent suffisant de connaître l'allure de la courbe et quelques caractéristiques particulières.

 **À savoir**

**Gain pur :**  $H(p) = K$

 **À savoir**

**Dérivateur pur :**  $H(p) = K_d p$

 **À savoir**

**Intégrateur pur :**  $H(p) = \frac{K_i}{p}$

**Notion de diagramme asymptotique**

Nous avons étudié des diagrammes particulièrement simples. Dans le cas général, il existe des variations de comportement en fonction de la pulsation. Le **diagramme de Bode asymptotique** est un diagramme simplifié permettant de connaître l'allure de la courbe. L'idée principale est de décomposer les pulsations en plages de valeurs pour lesquelles on peut dégager des comportements prépondérants.

 **À savoir**

**Ordre 1 (classe 0) :**  $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$

**À savoir**

**Ordre 2 (classe 0) très amorti,  $\xi > 1$  :**  $H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$



 **À savoir**

**Ordre 2 (classe 0) peu amorti,  $\xi < 1$  :** 
$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

### Inverse d'une fonction de transfert connue

Supposons que le tracé du digramme de Bode d'une fonction  $H(p)$  soit connu. Il est alors possible de déduire le tracé du diagramme de Bode de  $\frac{1}{H(p)}$ .


#### À savoir

Notons  $G$  et  $\varphi$  respectivement le gain et la phase de  $H(p)$  et  $\tilde{G}$  et  $\tilde{\varphi}$  ceux de  $\frac{1}{H(p)}$ . Alors

$$\tilde{G} = 20 \log \left( \left| \frac{1}{H(j\omega)} \right| \right)$$

$$\tilde{\varphi} = \arg \left( \frac{1}{H(j\omega)} \right)$$

Le tracé du diagramme de Bode de  $\frac{1}{H(p)}$  s'obtient par symétrie de celui de  $H(p)$  par rapport à l'axe des abscisses pour chacune des deux courbes.

 Tracez le diagramme de Bode de  $H(p) = 1 + \tau p$

#### 1.4.1 Produit de fonctions de transfert connues

#### À savoir

Soient  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$  deux fonctions de transfert pour lesquelles les tracés des diagrammes de Bode sont connus. Notons  $G_1$  et  $\varphi_1$  le gain et la phase de  $H_1(p)$  et  $G_2$  et  $\varphi_2$  ceux de  $H_2(p)$ . Déterminons  $G$  et  $\varphi$ , gain et phase du produit  $H_1(p)H_2(p)$ .

$$G = 20 \log (|H_1(j\omega)H_2(j\omega)|)$$

$$\varphi = \arg (H_1(j\omega)H_2(j\omega))$$

À partir de ces tracés de base et des combinaisons possibles entre eux, il est possible d'obtenir le tracé du diagramme de Bode de n'importe quelle fonction de transfert sous forme rationnelle.

 Tracez le diagramme de Bode de  $H(p) = \frac{5(1 + 5p)}{(1 + 10,5p + 5p^2)(1 + 0,25p)}$

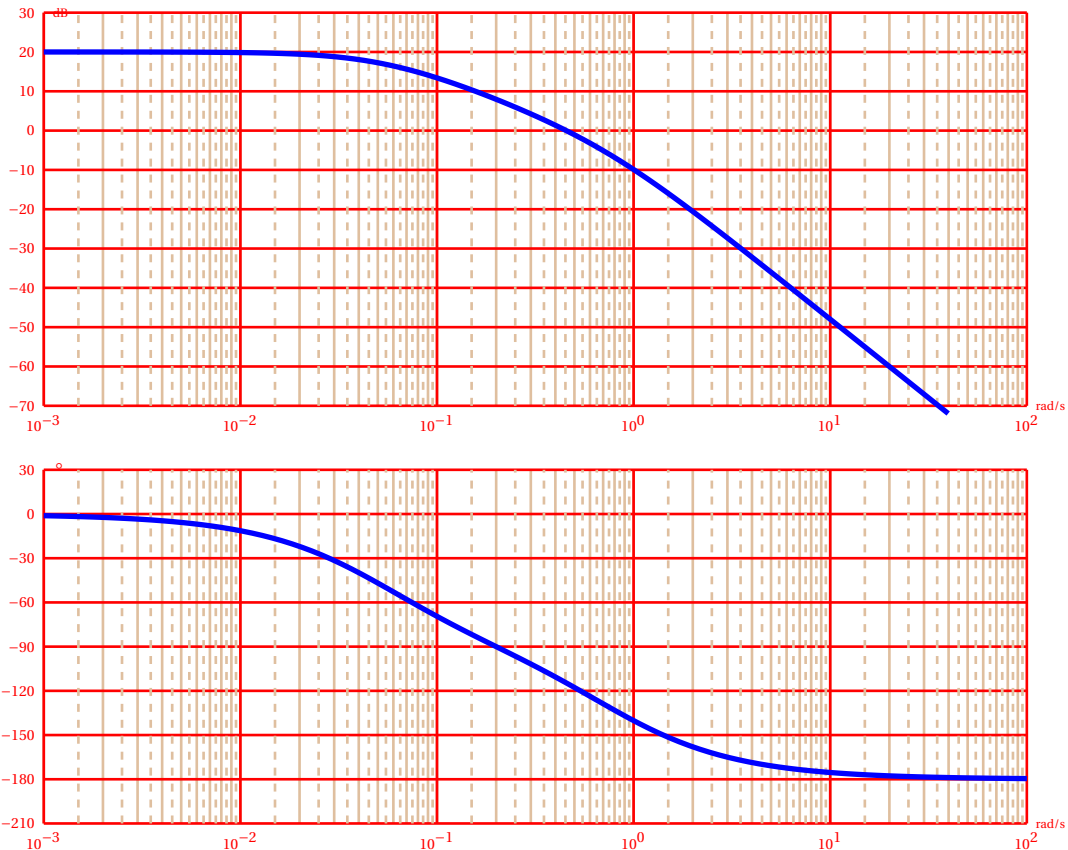
### 1.5 Identifier un modèle de comportement à partir d'un diagramme de Bode

Nous avons vu précédemment qu'il est possible d'identifier un modèle de comportement d'un SLCI à partir de sa réponse indicielle (réponse temporelle à un échelon). Cependant, cette méthode présente quelques limites, notamment en ce qui concerne les modèles qui peuvent être identifiés : seuls les systèmes d'ordre 1 et 2 peuvent facilement être identifiés. De plus, il faut des mesures de bonne qualité pendant le régime transitoire, ce qui peut être une difficulté dans l'analyse de systèmes rapides.

L'analyse du diagramme de Bode d'un SLCI permet également d'identifier un modèle de comportement. Voyons comment déterminer un tel modèle.

Supposons par la suite que la forme de la fonction de transfert à identifier est :

$$H(p) = \frac{1}{p^k} \frac{K}{1 + a_1 p + \dots + a_n p^{(n-k)}}$$



#### 1.5.1 Ordre

L'étude du comportement à très haute fréquence ( $\omega$  ou  $p$  tendant vers l'infini) permet de déterminer l'ordre du système. En effet  $H(p) \underset{|p| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{K}{a_n} \frac{1}{p^n}$

L'étude de la pente de la courbe de gain ou la valeur limite de la phase permettent de déterminer l'ordre  $n$ . La pente de la courbe de gain est un multiple de 20 dB/décade tout comme la limite de la phase est un multiple de  $-90^\circ$ . Le coefficient de multiplicité est l'ordre du système.

*Par lecture graphique, on obtient que, lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$ , la courbe de gain a une pente de \_\_\_\_\_ et la phase tend vers \_\_\_\_\_. Ce qui correspond à un système d'ordre \_\_\_\_\_.*


#### Pour aller plus loin

Dans le cas d'une fonction de transfert plus générale de type  $H(p) = \frac{K}{p^k} \frac{1 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{1 + a_1 p + \dots + a_n p^{(n-k)}}$ , cette méthode permet d'obtenir la valeur de  $n - m$ .

### 1.5.2 Classe

L'étude du comportement à très basse fréquence ( $\omega$  ou  $p$  tendant vers 0) permet de déterminer la classe du système. En effet  $H(p) \underset{p \rightarrow 0}{\sim} \frac{K}{p^k}$

L'étude de la pente de la courbe de gain ou la valeur limite de la phase permettent de déterminer la classe  $k$ . Notamment, si la pente du gain est nulle et la phase tend vers  $0^\circ$ , alors le système est de classe 0.

 La classe du système étudié est .

### 1.5.3 Grandeurs caractéristiques

Une fois l'ordre et la classe identifiés, la forme de la fonction de transfert est connue. On cherche alors à déterminer le gain. S'il s'agit d'un gain statique,

$$K_s = 10^{\frac{G_{dB}(\omega \rightarrow 0)}{20}}$$



#### Attention !

S'il ne s'agit pas d'un gain statique, on peut déterminer la valeur du gain à partir d'une valeur particulière du gain et de l'expression du gain asymptotique attendu.

Déterminer les autres grandeurs caractéristiques revient à déterminer les pulsations de cassure de la courbe. Pour ce faire, on peut extraire un diagramme asymptotique (partiel) et exploiter les résultats connus pour des systèmes d'ordre 1 et 2.

Pour un système d'ordre 1, les asymptotes de la courbe de gain s'intersectent en un point d'abscisse  $\omega = \frac{1}{\tau}$  et la phase à cette pulsation vaut  $-45^\circ$ .

Pour un système d'ordre 2, les asymptotes extrêmes de la courbe de gain s'intersectent en un point d'abscisse  $\omega = \omega_0$  et la phase à cette pulsation vaut  $-90^\circ$ . On obtient alors le coefficient d'amortissement par la valeur du gain en  $\omega_0$  :  $G_{dB}(\omega_0) = 20 \log(K) - 20 \log(2\xi)$

## 2 Prédiction des performances des systèmes asservis

L'analyse du comportement fréquentiel est un outil majeur pour prédire le comportement temporel d'un système asservi. Bien que le tracé du diagramme de Bode puisse être plus fastidieux que la détermination de sa réponse indicielle, elle fournit davantage d'information et permet donc une meilleure quantification des performances.

### 2.1 Importance du diagramme de Bode de la FTBO de l'asservissement

La fonction de transfert d'un système asservi (donc présentant un retour d'état) correspond à la fonction de transfert en boucle fermée de l'ensemble du système. Or, d'après la formule de Black,  $FTBF(p) = \frac{FTCD(p)}{1 + FTBO(p)}$ . De fait, l'influence de la fonction de transfert de la chaîne directe est relativement faible sur le comportement global. L'essentiel de celui-ci est dû au comportement de  $1 + FTBO(p)$ .



#### À savoir

Pour déterminer les performances d'un système asservi on étudie le **diagramme de Bode** de sa **FTBO**.

Les figures 7, 8 et 9 correspondent aux diagrammes de Bode de la FTBO du fermeteur à levain avec trois réglages de correcteur différents.

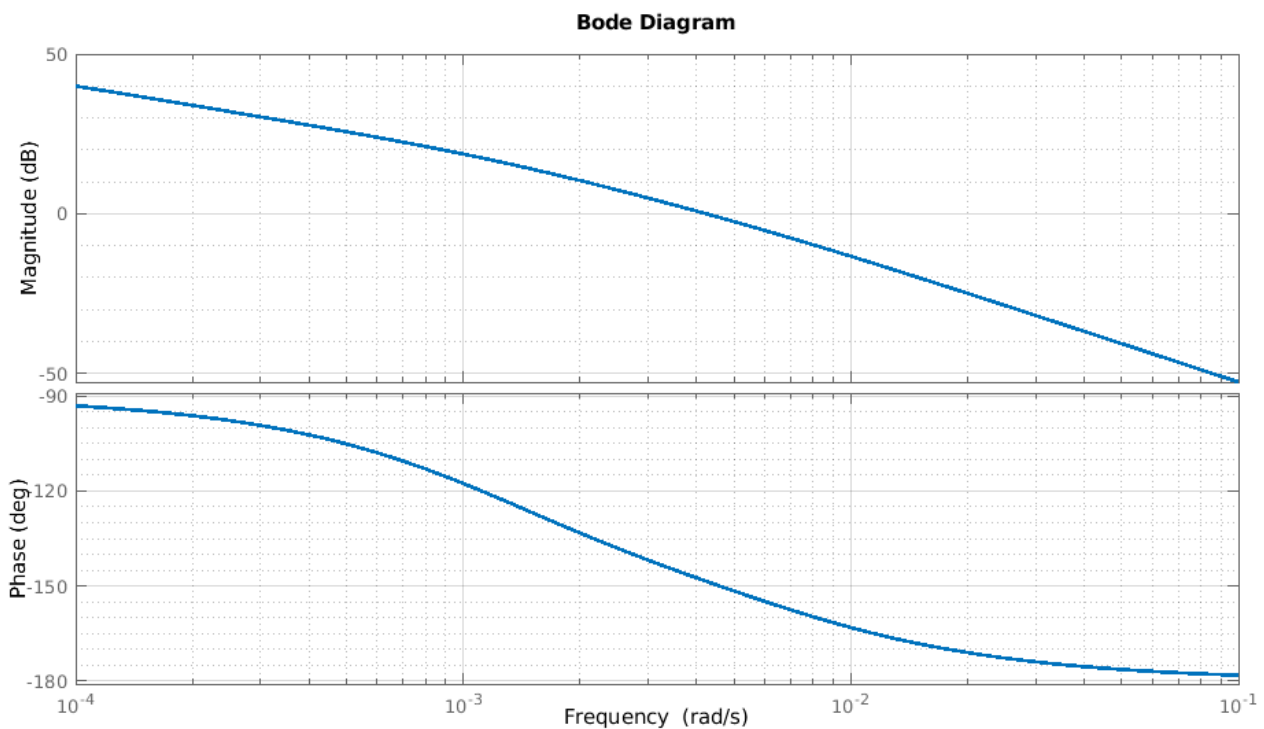


FIGURE 7 – Diagramme de Bode de la FTBO du système asservi avec un correcteur proportionnel intégral de paramètres  $k_p = 1 \text{ W}^\circ\text{C}$  et  $T_i = 500 \text{ s}$ .

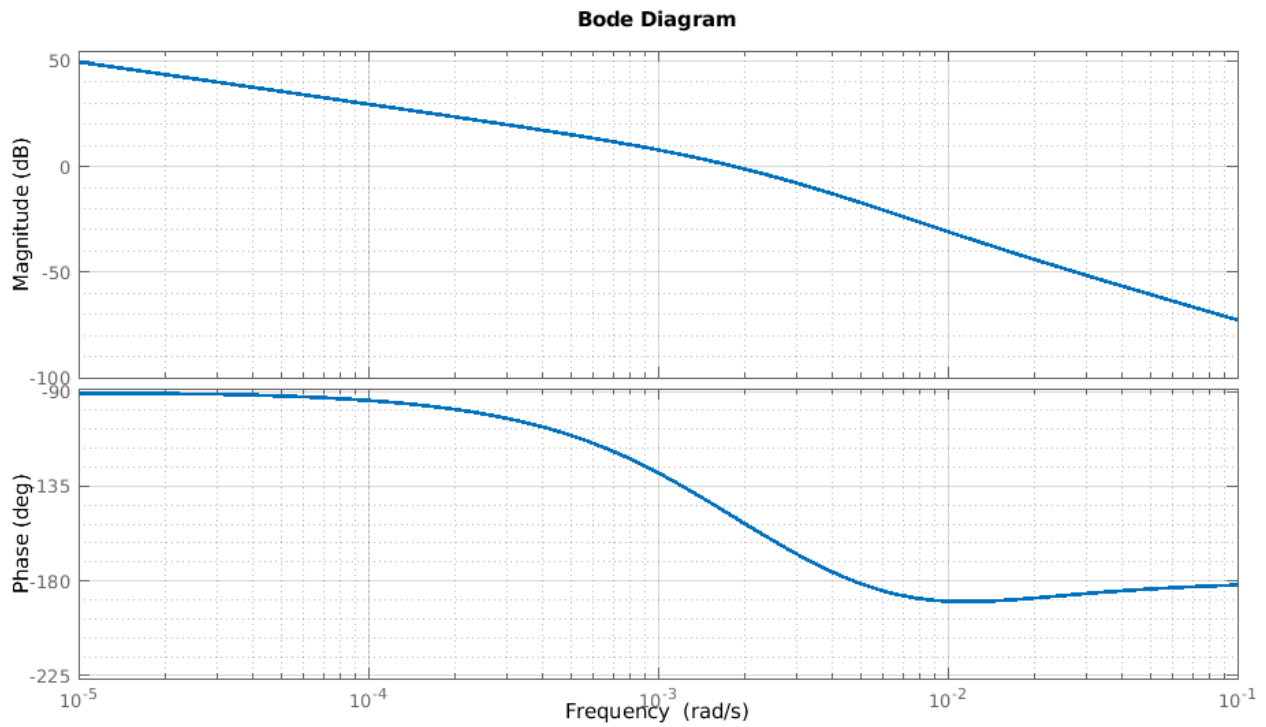


FIGURE 8 – Diagramme de Bode de la FTBO du système asservi avec un correcteur proportionnel intégral de paramètres  $k_p = 0,1 \text{ W/}^\circ\text{C}$  et  $T_i = 100 \text{ s}$ .

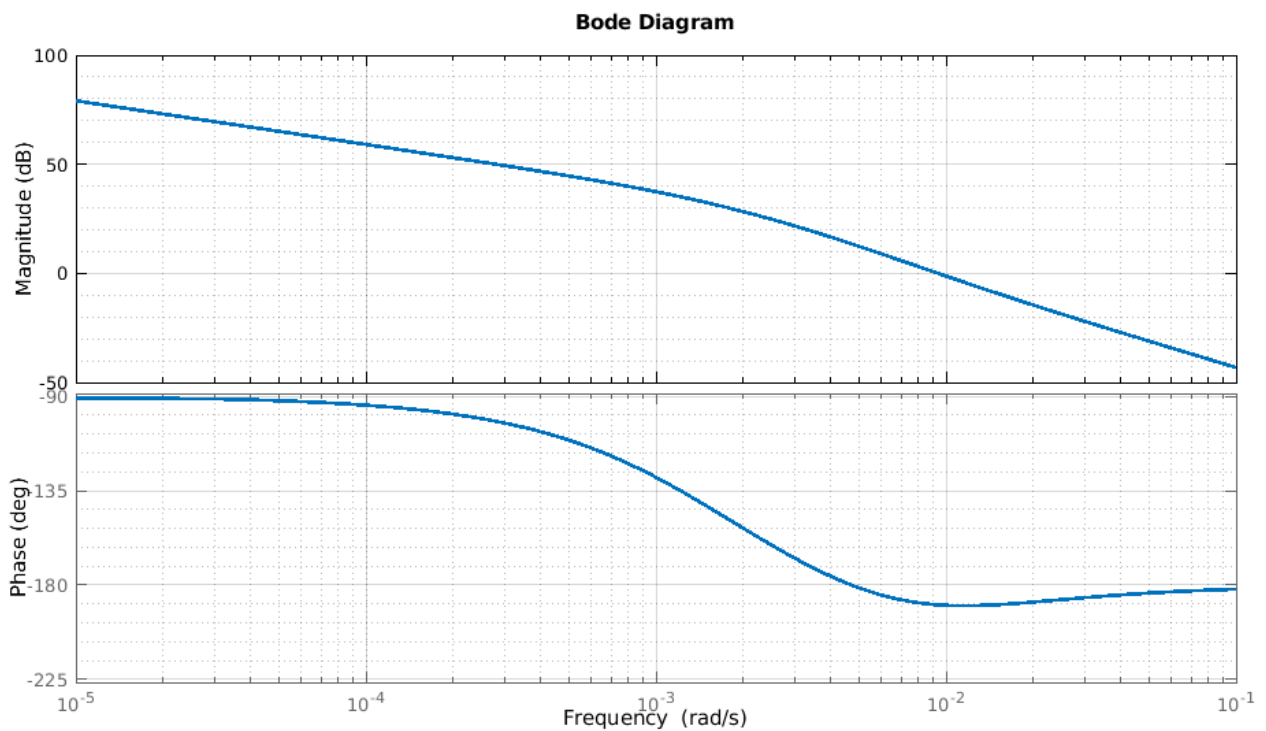


FIGURE 9 – Diagramme de Bode de la FTBO du système asservi avec un correcteur proportionnel intégral de paramètres  $k_p = 3 \text{ W/}^\circ\text{C}$  et  $T_i = 100 \text{ s}$ .

## 2.2 Stabilité – Point critique – Marges de gain et de phase

Le système asservi sera instable s'il existe des pulsations donnant lieu à une amplification infinie : le bruit d'amplitude presque nulle sera donc amplifié et donnera un signal d'amplitude non nulle. Le système, même au repos, aura alors tendance à avoir une sortie oscillante.

D'après la formule de Black,  $FTBF(j\omega) = \frac{FTCD(j\omega)}{1 + FTBO(j\omega)}$  peut être de module infini si  $FTBO(j\omega)$  est égal à -1, c'est-à-dire si son module vaut 1 et sa phase  $-180^\circ$ .



### À savoir

On appelle **point critique** la valeur -1. Le lieu de  $FTBO(j\omega)$  doit éviter le point critique pour que le système puisse être stable.

Sur un diagramme de Bode, le point critique se matérialise par la ligne à gain nul et la ligne à phase  $-180^\circ$ .

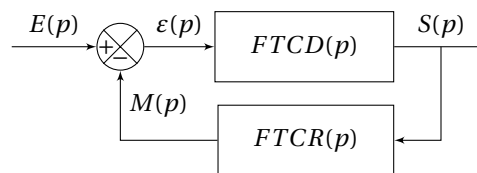


### Remarque

Le critère de stabilité est un plus subtil : il faut être *du bon côté* du point critique.

Lorsque la sortie de la FTBO est en opposition de phase, il faut que l'amplitude soit atténuée.

Lorsque la sortie de la FTBO n'est ni amplifiée ni atténuée, il faut que la sortie ne soit pas trop en retard.



Pour quantifier la stabilité d'un système asservi, on s'appuie donc sur l'écart de la FTBO au point critique. Il est alors possible de quantifier aussi bien la stabilité que l'instabilité pour pouvoir prédire les modifications éventuelles de réglage du correcteur.



### À savoir

#### Marge de gain

La marge de gain est l'écart entre le diagramme de Bode en gain de la FTBO du système asservi et la valeur critique 0 dB pour la pulsation donnant une phase de  $-180^\circ$ . L'écart est défini dans le sens donnant un système stable si la marge est positive, donc lorsque le gain est plus faible que 0 dB à la pulsation à  $-180^\circ$ .

$$M_{\text{GdB}} = 0 - G_{\text{dB}}(\omega_{-180^\circ})$$



### À savoir

#### Marge de phase

La marge de phase est l'écart entre le diagramme de Bode en phase de la FTBO du système asservi et la valeur critique  $-180^\circ$  pour la pulsation donnant un gain de 0 dB. L'écart est défini dans le sens donnant un système stable si la marge est positive, donc lorsque la phase est plus grande que  $-180^\circ$  à la pulsation à 0 dB.

$$M_\varphi = \varphi(\omega_{0\text{dB}}) - (-180) = \varphi(\omega_{0\text{dB}}) + 180$$



### À savoir

#### Marges de stabilité

On appelle marges de stabilité l'ensemble de la **marge de gain** et de la **marge de phase**.





### À savoir

Pour que le système soit stable, il faut que les **marges de stabilité** soit **positives**.

La stabilité se quantifie par l'ensemble des deux marges.

Lorsque les marges de stabilité sont négatives, le système est instable et la réponse indicielle n'est pas bornée comme le montre la figure ci-dessous.

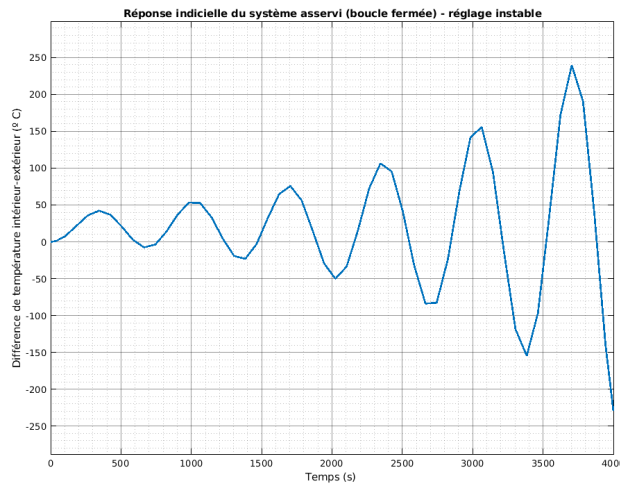


FIGURE 10 – Réponse indicielle à un échelon de  $20^\circ\text{C}$  du système asservi avec un réglage instable de correcteur proportionnel intégral : paramètres  $k_p = 3\text{ W/}^\circ\text{C}$  et  $T_i = 100\text{ s}$ .



### Pour aller plus loin

Dans le cas où il existe plusieurs pulsations critiques pour lire l'une ou l'autre des marges, on retient la valeur la plus contraignante.

## 2.3 Rapidité – Bande passante

La rapidité est la capacité du système asservi à atteindre rapidement sa valeur finale, qui se caractérise par sa capacité à répondre et amplifier les sollicitations à haute fréquence.



### À savoir

**Bande passante à 0 dB – Pulsation de coupure à 0 dB**

La **bande passante à 0 dB** est l'ensemble des pulsations pour lesquelles le **gain de la FTBO** est **supérieur à 0 dB**. Cette bande passante est normalement caractérisée par une pulsation maximale, la **pulsation de coupure à 0 dB** ou  $\omega_{0\text{ dB}}$  et la pulsation nulle.

Plus la pulsation de coupure à 0 dB est faible, plus le système est rapide.

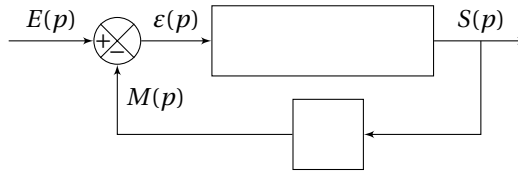


### Pour aller plus loin

Pour quantifier la rapidité des systèmes asservis, on peut aussi s'appuyer sur la bande passante à -3 dB ou à -6 dB de la FTBF. La définition est similaire à celle de la bande passante à 0 dB.

## 2.4 Précision – Classe

La précision d'un système asservi est donnée par son comportement à faible fréquence, c'est-à-dire par la classe du système.



Intéressons-nous à un système dont la FTBO est de classe  $\alpha$  et de gain  $K$  :  $FTBO(p) = \frac{K N(p)}{p^\alpha D(p)}$  avec  $N(p)$  et  $D(p)$  des polynômes de degré 0 unitaire.



### À savoir

D'une façon générale, il faut retenir que :

	FTBO classe 0	FTBO classe 1	FTBO classe 2	FTBO classe >2
erreur statique $\varepsilon_s$ (amplitude $E_0$ )	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0	0
erreur de traînage $\varepsilon_t$ (pente $a$ )	$\infty$	$\frac{a}{K}$	0	0
entrées paraboliques etc.	$\infty$	$\infty$	...	0