Séquence 3

Déterminer la position, la vitesse et l'accélération d'un point

Objectif de la séquence

L'objectif de ce cours est d'apprendre à décrire les trajectoires des points, la nature des mouvements des solides et à déterminer la vitesse et l'accélération d'un point par rapport à un référentiel donné.

Table des matières

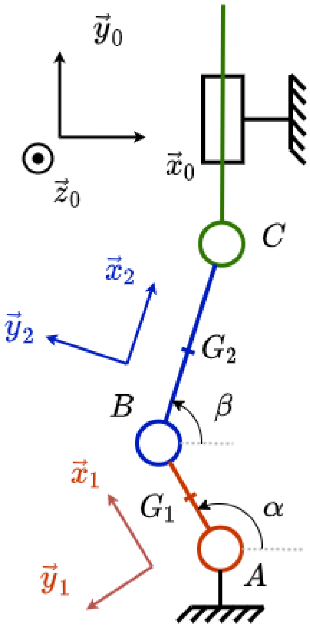
Objet d'étude *Compresseur d'air pour respitateur*

La régularité du débit du compresseur du respirateur étudié lors de la séquence précédente est dépendante de la régularité de la rotation du moteur qui dépend à son tour des efforts qui s'exercent sur le piston mais aussi des effets dynamiques du mécanisme. Ces effets relèvent du cours de deuxième année mais nous étudierons dans ce cours comment déterminer la vitesse et l'accélération des points pertinents, étape nécessaire pour estimer les effets dynamiques.

→ Déterminer la vitesse et l'accélération du centre de masse du piston C.

→ Déterminer la vitesse et l'accélération du centre de masse du vilebrequin G_1.

→ Déterminer la vitesse et l'accélération du centre de masse de la bielle G_2.



1 Paramétrage, vitesse et accélération

1.1 Paramétrage

À savoir

Déterminer la position d'un **solide indéformable** revient à déterminer la position d'un **repère** fixe par rapport à celui-ci. Un repère est constitué de

- un **point** (donc trois paramètres de position)
- une **base** (donc trois paramètres de position angulaire).

Quelques précisions supplémentaires

En sciences de l'ingénieur, on travaillera toujours avec des **bases orthonormées directes**, c'est à dire des bases dont

- les vecteurs sont de norme unitaire
- les vecteurs sont orthogonaux entre eux
- les trois vecteurs respectent la règle de la main droite

À savoir
La **règle de la main droite** permet de savoir si une base est directe ou non : si le pouce représente le premier vecteur et l'index le deuxième, alors le majeur est orienté comme le troisième vecteur de la base si celle-ci est directe. (*cf.* figure 1)

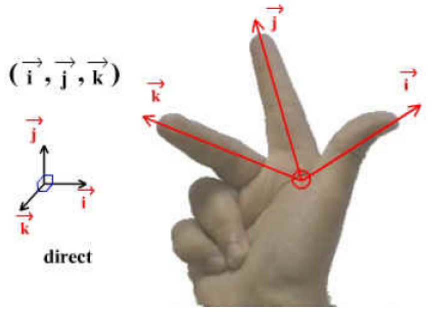


FIGURE 1 – *Règle de la main droite pour les bases directes.*

On se donne le paramétrage suivant pour le compresseur, qui sera utilisé pour exprimer les vitesses et accélérations recherchées :

- on associe au bâti (0) le repère $\mathscr{R}_0 = (A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
- on associe au vilebrequin (1) le repère $\mathscr{R}_1 = (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$
- on associe à la bielle (2) le repère $\mathscr{R}_2 = (B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$
- on associe au piston (3) le repère $\mathscr{R}_3 = (C, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. On remarquera que les repères associés au bâti et au piston ne diffèrent que par leur origine. La base choisie est la même.
- $\overrightarrow{AB} = a\vec{x}_1,\quad \overrightarrow{BC} = b\vec{x}_2,\quad \overrightarrow{AC} = \lambda\vec{y}_0,\quad \overrightarrow{AG_1} = \frac{a}{2}\vec{x}_1,\quad \overrightarrow{BG_2} = \frac{b}{2}\vec{x}_2$
- $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1),\quad \beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$

1.2 Position d'un point

À savoir
La **position d'un point par rapport à un repère de référence** est définie par le vecteur reliant l'origine du repère de référence au point objet de l'étude.

- La position de G_1 par rapport à $\mathscr{R}_0$ est le vecteur $\overrightarrow{AG_1} = \frac{a}{2}\vec{x}_1$.
- La position de G_2 par rapport à $\mathscr{R}_0$ est
- La position de C par rapport à $\mathscr{R}_0$ est
- La position de G_1 par rapport à $\mathscr{R}_2$ est

À savoir
Le vecteur **position** a la dimension physique d'une longueur : sa norme est une **longueur**.

$$[\text{position}] = \text{m}$$

Remarque
Remarquons que les **vecteurs de différentes bases** sont utilisés pour un même vecteur position : on cherche avant tout à avoir une expression simple et condensée même si cela implique d'utiliser des vecteurs de différentes bases.

1.3 Vitesse d'un point – Définition et calcul *naïf*

À savoir

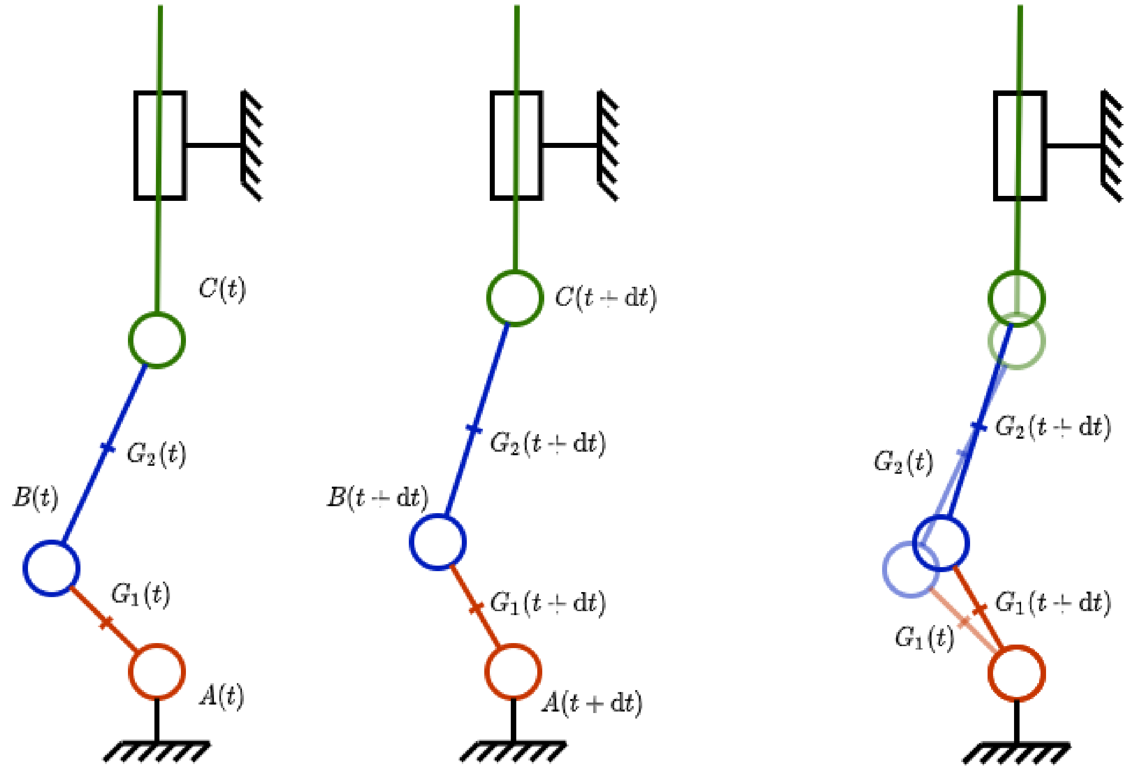
La **vitesse d'un point** P **par rapport à un référentiel** $\mathscr{R}$ est la dérivée temporelle du vecteur position de P par rapport à $\mathscr{R}$, en supposant la base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{R}$ fixe par rapport au temps.
Si on note A l'origine du repère $\mathscr{R}$, alors :

$$\overrightarrow{V}(P/\mathscr{R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{AP}}{\mathrm{d}\,t}\right|_{\mathscr{B}}$$

À savoir

Le vecteur vitesse a la dimension d'une vitesse :

$$[\text{vitesse}] = \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$



(a) Instants t (à gauche) et t + dt (à droite). *(b) Instants t et t + dt superposés.*

FIGURE 2 – *Schémas cinématiques du compresseur aux instants t et $t+dt$. Le bâti est pris comme référence du mouvement et est donc supposé fixe.*

Attention !

Le choix du repère de référence est essentiel pour que la définition soit complète. En effet, si on s'intéresse au mouvement du compresseur en prenant comme référence l'un des autres solides, on obtient des vitesses très différentes.

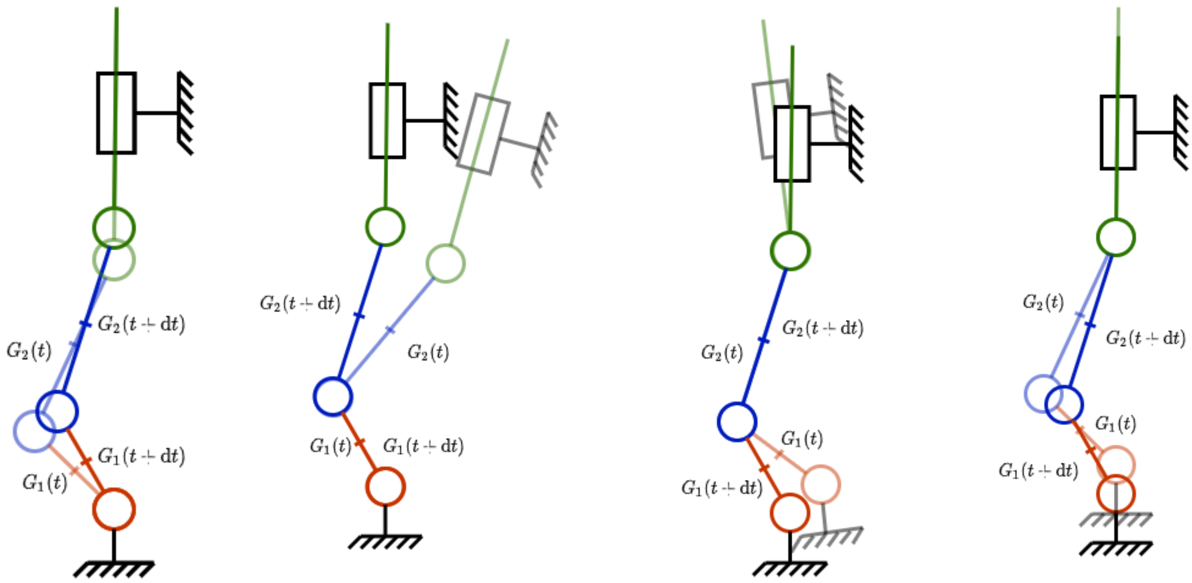


FIGURE 3 – *Schémas cinématiques du compresseur aux instants t et $t+dt$ avec différents solides comme référence (de gauche à droite, la référence du mouvement est le bâti, le vilebrequin, la bielle et finalement le piston).*

Cherchons à déterminer la vitesse de G_1 par rapport au repère $\mathscr{R}_0$: $\overrightarrow{V}(G_1/\mathscr{R}_0)$. Pour ce faire, commençons par établir la figure plane de changement de base.

Figure plane de changement de base

Méthode de calcul *naïve* : expression du vecteur position dans la base fixe Cette méthode consiste à exprimer le vecteur position dans la base de référence avant de le dériver par rapport au temps.

$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{a}{2}\overrightarrow{x}_1$$

Or, d'après la figure plane, $\overrightarrow{x}_1$ s'exprime dans la base $\mathscr{B}_0$:

$$\overrightarrow{x}_1 =$$

donc

$$\overrightarrow{AG_1} =$$

Dériver $\overrightarrow{AG_1}$ par rapport au temps en supposant la base $\mathscr{B}_0$ fixe revient alors à dériver chacune de ses composantes dans $\mathscr{B}_0$:

$$\overrightarrow{V}(G_1/\mathscr{R}_0) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AG_1}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{B}_0}$$

Comme α est une fonction du temps, on est amené à calculer la dérivée de fonctions composées (sinus ou cosinus d'une part et α d'autre part).

$$\frac{\mathrm{d}\,\cos(\alpha)}{\mathrm{d}\,t}(t) =$$

De même,

$$\frac{\mathrm{d}\,\sin(\alpha)}{\mathrm{d}\,t}(t) =$$

Et finalement,

$$\overrightarrow{V}(G_1/\mathscr{R}_0) =$$

On peut encore remarquer que $\overrightarrow{y}_1$ s'exprime dans la base $\mathscr{B}_0$

$$\overrightarrow{y}_1 =$$

et qu'on peut alors simplifier l'expression précédente en

$$\overrightarrow{V}(G_1/\mathscr{R}_0) =$$

Remarque

Les dérivées de scalaires (réels) par rapport au temps est normalement notée « point » ($\dot{\square}$).

Remarque

La dérivation des vecteurs par rapport au temps ne peut pas être notée « point » parce qu'il manquerait un élément essentiel : la base supposée fixe lors de la dérivation.

Attention !

Ces calculs peuvent être longs. Il est donc nécessaire de **vérifier** la pertinence du résultat, et en particulier l'**homogénéité**.

Pour aller plus loin

On peut également vérifier la cohérence du résultat vis-à-vis de la vitesse calculée. Ici, le résultat semble cohérent avec la figure 2 car

- la vitesse est suivant $+\overrightarrow{y}_1$
- sa norme est proportionnelle à $\frac{a}{2}$
- sa norme est proportionnelle à $\dot{\alpha}$

Exprimez la vitesse de C par rapport au bâti : $\overrightarrow{V}(C/\mathscr{R}_0)$

Exprimez la vitesse de G_2 par rapport au bâti $\overrightarrow{V}(G_2/\mathscr{R}_0)$ en fonction de α, β, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, a, b.

Exprimez la vitesse de G_1 par rapport à la bielle : $\overrightarrow{V}(G_1/\mathscr{R}_2)$

1.4 Vecteur taux de rotation

La méthode précédente étant fastidieuse, on se donne un moyen d'obtenir ce même résultat d'une façon plus directe. On remarque en particulier que la vitesse de G_1 par rapport au bâti $\overrightarrow{V}(G_1/\mathscr{R}_0) = \frac{a}{2}\dot{\alpha}\overrightarrow{y}_1$ est portée par $\overrightarrow{y}_1$, vecteur orthogonal à l'axe $A\overrightarrow{z}_0$ de la liaison pivot entre le vilebrequin et le bâti d'une part et orthogonal au vecteur position $\overrightarrow{AG_1} = \frac{a}{2}\overrightarrow{x}_1$ d'autre part.

À savoir

Le vecteur **taux de rotation** permet de caractériser la rotation d'un solide par rapport à un autre. Il se note $\overrightarrow{\Omega}$ et est défini par :

- sa direction : suivant l'axe de la rotation
- sa norme : égale à la valeur absolue de la dérivée temporelle du paramètre angulaire qiu définit l'une des bases par rapport à l'autre
- son sens : respecte la règle du « tire-bouchon ».

Le taux de rotation a la dimension d'une **vitesse angulaire** :

$$\left[\overrightarrow{\Omega}\right] = \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

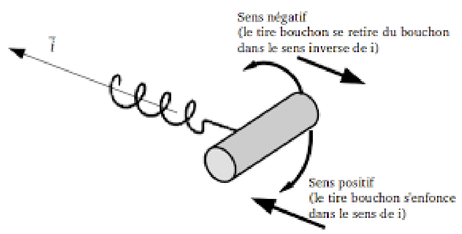


FIGURE 4 – *Règle du tire-bouchon.*

Ainsi, le vecteur taux de rotation du vilebrequin par rapport au bâti $\overrightarrow{\Omega}(1/0)$ a pour

- direction : $\overrightarrow{z}_0$
- norme : $|\dot{\alpha}|$
- sens : $+\overrightarrow{z}_0$ lorsque $\dot{\alpha} > 0$

donc

$$\overrightarrow{\Omega}(1/0) =$$

De même, le vecteur taux de rotation de la bielle par rapport au bâti s'exprime

$$\overrightarrow{\Omega}(2/0) =$$

Composition des vecteurs taux de rotation

Certains vecteurs taux de rotation ne peuvent pas être déterminés directement, comme c'est le cas du taux de rotation du vilebrequin par rapport à la bielle $\overrightarrow{\Omega}(1/2)$. En effet, le paramétrage ne définit pas directement un paramètre angulaire positionnant la base $\mathscr{B}_1$ par rapport à la base $\mathscr{B}_2$.

À savoir

Étant données trois bases $\mathscr{B}_i$, $\mathscr{B}_j$, $\mathscr{B}_k$, on a :

$$\overrightarrow{\Omega}(i/k) = \overrightarrow{\Omega}(i/j) + \overrightarrow{\Omega}(j/k)$$

On en déduit une autre relation utile :

$$\forall \mathscr{B}_i, \mathscr{B}_j, \quad \overrightarrow{\Omega}(i/j) = -\overrightarrow{\Omega}(j/i)$$

On en déduit que

$$\overrightarrow{\Omega}(1/2) \quad =$$

1.5 Dérivation vectorielle – Application au calcul d'une vitesse

L'intérêt du vecteur taux de rotation réside dans le fait qu'il permet de calculer plus facilement des dérivées de vecteurs.

À savoir

La **formule de Bour** permet de changer la base de dérivation dans une dérivée de vecteur.

Soient deux bases $\mathscr{B}_i$ et $\mathscr{B}_j$ et soit un vecteur $\overrightarrow{v}$. On peut exprimer alors $\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{B}_i}$ en fonction de $\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{B}_j}$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{B}_i} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{B}_j} + \overrightarrow{\Omega}(j/i) \wedge \overrightarrow{v}$$

On peut appliquer cette relation à l'expression de la vitesse de G_1 par rapport au bâti.

$$\overrightarrow{V}(G_1/\mathscr{R}_0) \quad = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AG_1}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{B}_0}$$

On retrouve le même résultat que précédemment mais d'une façon plus directe et sans avoir à refactoriser l'expression pour obtenir sa forme la plus simple. C'est donc cette méthode qui sera utilisée.

✍ Déterminer par dérivation vectorielle l'expression la plus compacte de $\overrightarrow{V}(G_2/\mathscr{R}_0)$.

✍ Déterminer par dérivation vectorielle l'expression la plus compacte de $\overrightarrow{V}(G_1/\mathscr{R}_2)$.

1.6 Accélération

À savoir

L'**accélération d'un point P par rapport à un référentiel $\mathscr{R}$** est la dérivée temporelle du vecteur vitesse de P par rapport à $\mathscr{R}$, en supposant la base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{R}$ fixe par rapport au temps.

$$\overrightarrow{\Gamma}(P/\mathscr{R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{B}}$$

À savoir

La dimension du vecteur accélération est celle d'une accélération :

$$[\text{accélération}] = \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

Calculons l'accélération de G_1 par rapport au bâti.

$$\overrightarrow{\Gamma}(G_1/\mathscr{R}_0) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}(G_1/\mathscr{R}_0)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{B}_0}$$

Attention !

Lors du calcul de l'accélération, il ne faut pas oublier de dériver toutes les grandeurs potentiellement dépendantes du temps : les paramètres géométriques, les dérivées des paramètres géométriques et les vecteurs. Dans l'expression de l'accélération on trouvera des paramètres dérivés deux fois (comme $\ddot{\alpha}$), des carrés de paramètres dérivés une fois (comme $\dot{\alpha}^2$) et parfois des termes faisant intervenir deux paramètres dérivés une fois.

✍ Déterminer l'accélération de G_1 par rapport à la bielle $\overrightarrow{\Gamma}(G_1/\mathscr{R}_2)$.

✍ Déterminer l'accélération de C par rapport au bâti $\overrightarrow{\Gamma}(C/\mathscr{R}_0)$.

✍ Déterminer l'accélération de G_2 par rapport au bâti $\overrightarrow{\Gamma}(G_2/\mathscr{R}_0)$.

2 Mouvements simples et trajectoires

2.1 Trajectoire d'un point

À savoir
La **trajectoire d'un point par rapport à un référentiel** est l'ensemble des positions prises au cours du temps par le point étudié par rapport au référentiel.

La trajectoire du point G_1 par rapport au bâti est

La trajectoire du point C par rapport au bâti est

La trajectoire du point G_2

✍ Déterminer la trajectoire de A, B, C, G_1 et G_2 par rapport au différents solides. On pourra s'aider de la figure 3.

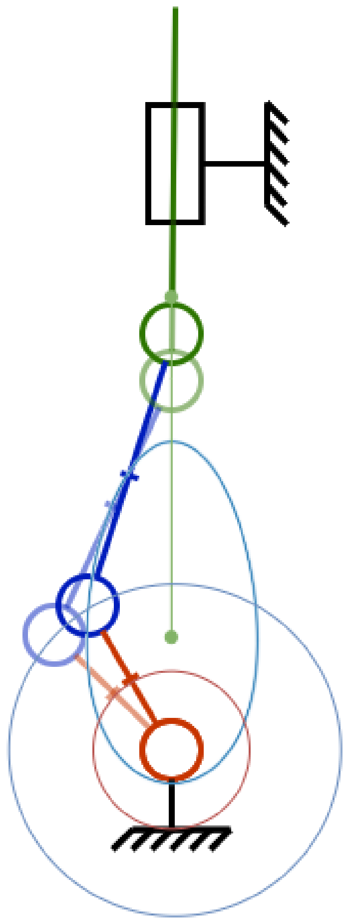


FIGURE 5 – *Trajectoire de plusieurs points par rapport au bâti.*

2.2 Description des mouvements

2.2.1 Translation

À savoir
Une **translation** est un mouvement entre deux solides qui se caractérise par l'absence de rotation : une base fixe par rapport à l'un des solides est fixe par rapport à l'autre.

Ici, le piston est en translation par rapport au bâti.

À savoir
Une liaison **glissière** n'autorise qu'un mouvement de **translation** entre les solides.

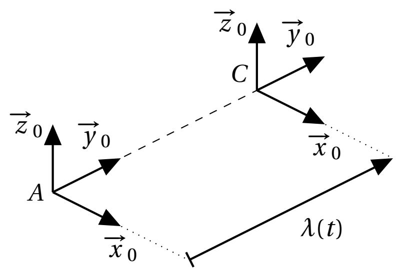


FIGURE 6 – *Translation suivant $\vec{y}_0$ caractérisée par $\overrightarrow{AC} = \lambda(t)\vec{y}_0$.*

Attention !
Le fait qu'un solide soit en translation par rapport à un autre n'impose pas que les trajectoires soient rectilignes.

À savoir
On appelle mouvement de **translation circulaire** un mouvement de translation pour lequel les trajectoires des points sont circulaires.

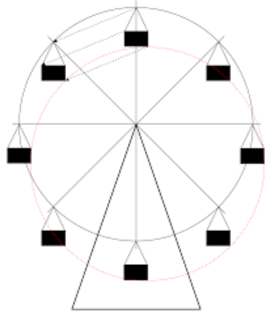


FIGURE 7 – *Translation circulaire d'une cabine de grande roue par rapport au sol.*

2.2.2 Rotation

À savoir
Une **rotation** est un mouvement entre deux solides qui se caractérise par l'existence d'un axe fixe de l'un des solides par rapport à l'autre.

Ici, le vilebrequin est en rotation par rapport au bâti autour de l'axe $(A\overrightarrow{z}_0)$, qui est fixe par rapport au bâti et au vilebrequin.

À savoir
Une liaison **pivot** n'autorise qu'un mouvement de **rotation** entre les solides.

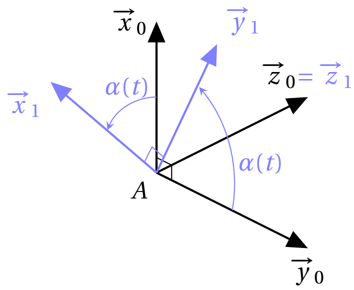


FIGURE 8 – *Rotation autour de $(A, \overrightarrow{z}_0)$ caractérisée par $(\overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{x}_1) = (\overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{y}_1) = \alpha(t)$. Attention, la figure est en 3D. Sur celle-ci, α est négatif.*

2.2.3 Mouvement composé

À savoir
On appelle **mouvement composé** un mouvement qui n'est ni une translation ni une rotation.
Une base fixe par rapport à l'un des solides est donc mobile par rapport à l'autre mais il n'existe pas pour autant un axe fixe de l'un par rapport à l'autre.

Ici, la bielle est en mouvement composé par rapport au bâti. En effet, le mouveemnt n'est pas une translation (β n'est pas constant) et il n'existe pas de point du piston toujours fixe par rapport au bâti.

2.3 Degrés de liberté d'une liaison

Nous avons vu qu'il faut 6 paramètres pour définir la position d'un solide par rapport à un autre :

- 3 longueurs (coordonnées de l'origine du repère de l'un des solides dans le référentiel de l'autre)
- 3 angles (pour orienter de façon quelconque une base par rapport à une autre)

À savoir
On appelle **degré de liberté d'une liaison** le nombre de **paramètres indépendants** (longueurs ou angles) qu'il faut fixer pour **déterminer la position** de l'un des solides par rapport à l'autre.

À savoir

- Une liaison **pivot** a **un** degré de liberté, qui correspond à l'angle pilotant la rotation autorisée.
- Une liaison **glissière** a **un** degré de liberté, qui correspond à la longueur pilotant la translation autorisée.
- Une liaison **pivot-glissant** a **deux** degrés de liberté, qui correspondent à l'angle pilotant la rotation autorisée et à la longueur pilotant la translation autorisée.

2.4 Chaînes de solides et mobilité d'un mécanisme

Nous avons vu dans différents exemples que lorsque le graphe de structure d'un mécanisme forme une boucle, les mouvements autorisés par certaines liaisons peuvent être contraints par la structure globale.

À savoir

On appelle **chaîne de solides ouverte**, un mécanisme dont le graphe de structure ne comporte **aucune boucle**.

On appelle **chaîne de solides fermée**, un mécanisme dont le graphe de structure forme **au moins une boucle**.

À savoir

On appelle **mobilité** d'un mécanisme le **nombre de paramètres géométriques indépendants** (angles ou longueurs) qu'il faut fixer pour connaître la position de tous les solides du mécanisme.

Si le mécanisme est une **chaîne ouverte**, la mobilité est la **somme des degrés de liberté** des liaisons.

Si le mécanisme est une **chaîne fermée**, la mobilité est **inférieure ou égale à la somme des degrés de liberté** des liaisons.

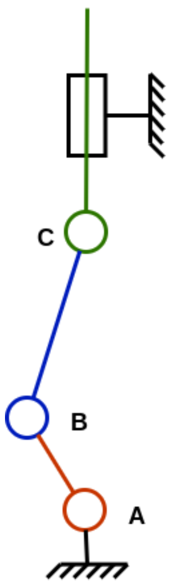


FIGURE 9 – *Le compresseur est une chaîne de solides fermée. Au total, ses liaisons comportent 5 degrés de liberté (trois liaisons pivot et une liaison pivot-glissant) mais l'ensemble du mécanisme n'a qu'une mobilité. Fixer l'angle entre le vilebrequin et la bâti permet de connaître la position de tous les solides.*

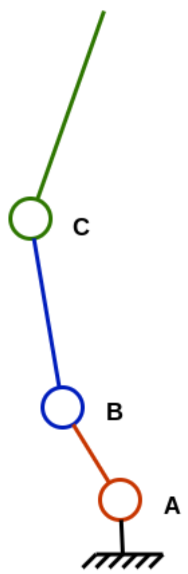


FIGURE 10 – *Si on supprime la liaison pivot-glissant entre le bâti et le piston, le mécanisme devient une chaîne ouverte à 3 degrés de liberté (trois liaisons pivot). Pour fixer la position de tous les solides, il faut fixer l'angle entre le vilebrequin et le bâti, puis l'angle entre la bielle et le vilebrequin puis l'angle entre le piston et la bielle, donc 3 paramètres correspondant aux trois mobilités de l'ensemble.*