Séquence 6

Modéliser cinématiquement les transmetteurs mécaniques habituels

Objectif de la séquence

Dans les chaînes de puissance des systèmes, on trouve un certain nombre de transmetteurs de puissance : trains d'engrenages simples ou épicycloïdaux, pignon-crémaillère, roue et vis sans fin, poulies-courroie etc. L'objectif de cette séquence est de déterminer les lois entrée-sortie cinématiques de ces tansmetteurs de puissance en s'appuyant notamment sur la notion de roulement sans glissement, qui pourra être exploité dans d'autres contextes comme la cinématique des véhicules à roues.

Table des matières

Page

1 Composition des mouvements et contact ponctuel

1.1 Composition des vitesses et des torseurs cinématiques

On s'intéresse à la vitesse d'un point M de la pale d'un hélicoptère par rapport au sol. Les pales sont en rotation par rapport à la cellule [1] autour d'un axe vertical. De plus, la cellule est en translation par rapport au sol. La vitesse de M appartenant à la pale par rapport au sol s'exprime

$$\overrightarrow{V}(M \in \text{pale}/\text{sol}) = \overrightarrow{V}(M \in \text{pale}/\text{cellule}) + \overrightarrow{V}(M \in \text{cellule}/\text{sol})$$

1. Partie de l'hélicoptère constituée principalement du fuselage et sur laquelle sont installés les autres éléments tels que la voilure, l'ensemble moteur etc.

À savoir

La composition des vitesses s'écrit pour un point M et trois solides 1, 2 et 3 :

$$\overrightarrow{V}(M \in 3/1) = \overrightarrow{V}(M \in 3/2) + \overrightarrow{V}(M \in 2/1)$$

À savoir

Composition des vecteurs taux de rotation :

$$\overrightarrow{\Omega}(3/1) = \overrightarrow{\Omega}(3/2) + \overrightarrow{\Omega}(2/1)$$

À savoir

Il est possible d'écrire d'une façon condensée la composition des vitesses et celle des vitesse de rotation : il s'agit de la composition des torseurs cinématiques :

$$\left\{\mathcal{V}_{3/1}\right\} = \left\{\mathcal{V}_{3/2}\right\} + \left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\}$$

Quelques précisions supplémentaires

La composition des torseurs cinématiques permet également d'affirmer :

$$\left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\} = -\left\{\mathcal{V}_{1/2}\right\}$$

ce qui implique également

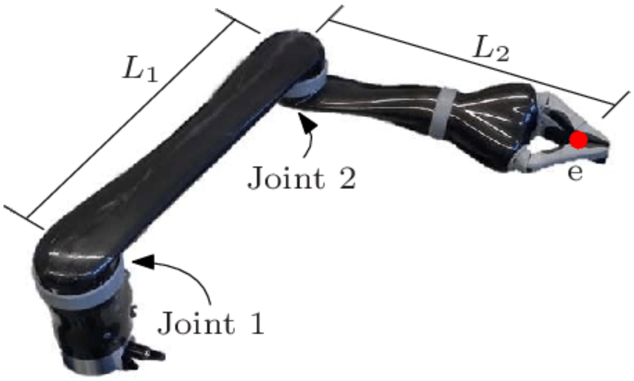
$$\overrightarrow{V}(M \in 2/1) = -\overrightarrow{V}(M \in 1/2)$$

Attention !

Pour pouvoir déterminer la **somme de deux torseurs** cinématiques, il faut que la vitesse de chacun d'entre eux soit exprimée au **même point**.

Dans le cas de l'hélicoptère, on peut exprimer le torseur cinématique de la pale par rapport au sol.

Exemple d'application : bras robotique RR



1.2 Fermeture cinématique

Il est possible d'obtenir une relation entre paramètres cinématiques en exploitant la composition des torseurs cinématiques (ou en particulier la composition des vitesses) sur une boucle de solides.

À savoir

Fermeture cinématique

$$\{\mathcal{V}_{n/n-1}\} + \dots + \{\mathcal{V}_{1/0}\} + \{\mathcal{V}_{0/n}\} = \{0\}$$

1.3 Description du contact ponctuel

On s'intéresse au contact ponctuel entre deux solides. Notons les solides (1) et (2), le pint de contact C et la normale au contact $\overrightarrow{z}$.

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(2/1) \\ \overrightarrow{V}(C \in 2/1) \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{cc} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{array} \right\}_{C,(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$$

1.3.1 Glissement

À savoir

On définit la **vitesse de glissement** d'un solide (2) par rapport à un solide (1) comme étant la vitesse au point de contact C appartenant à (2) par rapport à (1).

$$\overrightarrow{v}_{g,2/1} = \overrightarrow{V}(C \in 2/1) = V_x \overrightarrow{x} + V_y \overrightarrow{y}$$

1.3.2 Roulement

À savoir

Le **vecteur taux de rotation de roulement** de (2) par rapport à (1) est défini par la projection du vecteur taux de rotation $\overrightarrow{\Omega}(2/1)$ dans le plan de contact $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$.

$$\overrightarrow{\Omega_r}(2/1) = (\overrightarrow{\Omega}(2/1) \cdot \overrightarrow{x})\overrightarrow{x} + (\overrightarrow{\Omega}(2/1) \cdot \overrightarrow{y})\overrightarrow{y} = \omega_x \overrightarrow{x} + \omega_y \overrightarrow{y}$$

1.3.3 Pivotement

Pour aller plus loin

Le **vecteur taux de rotation de pivotement** de (2) par rapport à (1) est défini par la projection du vecteur taux de rotation $\overrightarrow{\Omega}(2/1)$ sur la normale au contact $\overrightarrow{z}$.

$$\overrightarrow{\Omega_p}(2/1) = (\overrightarrow{\Omega}(2/1) \cdot \overrightarrow{z})\overrightarrow{z} = \omega_z \overrightarrow{z}$$

On peut également écrire

$$\overrightarrow{\Omega}(2/1) = \overrightarrow{\Omega_p}(2/1) + \overrightarrow{\Omega_r}(2/1)$$

1.4 Roulement sans glissement

La liaison entre certains systèmes a pour objectif d'annuler le glissement. C'est notamment le cas des engrenages comme celui de la figure 2, appelé pignon-crémaillère, permettant de transformer un mouvement de rotation en un mouvement de translation.

À savoir

Le **roulement sans glissement** d'un solide par rapport à un autre implique que la **vitesse de glissement est nulle** mais il peut y avoir un **roulement non nul**.

Pour aller plus loin

La quesiton du pivotement ne se pose pas forcément : souvent, le pivotement est empêché par le reste de l'architecture du mécanisme.

2 Cinématique des transmetteurs de puissance habituels

On s'intéresse dans la suite à la loi entrée-sortie cinématique des transmetteurs de puissance habituels.

2.1 Geńéralités sur les transmetteurs à engrenage

2.1.1 Module d'un roue dentée

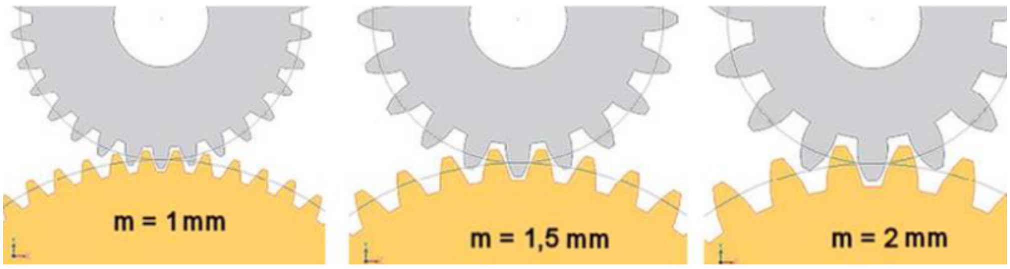
Certains transmetteurs habituels comportent une denture, comme les roues dentées ou les crémaillères.

À savoir

La taille des dents d'une roue dentée est caractérisée par le **module** m défini par

$$m = \frac{D}{Z}$$

où Z est le nombre de dents. Sur la circonférence d'une roue dentée, chaque dent occupe un arc de cercle, appelé pas, de taille $p = \pi m$. Pour que deux roues dentées puissent engrener, il faut que leur **module** soit **identique**.



2.1.2 Types de denture

Une denture peut être droite ou hélicoïdale. L'hélicoïdale a l'avantage d'être plus silencieuse et de pouvoir supporter plus d'efforts mais elle engendre un effort axial. On peut combiner une partie des avantages avec des dentures en chevron.

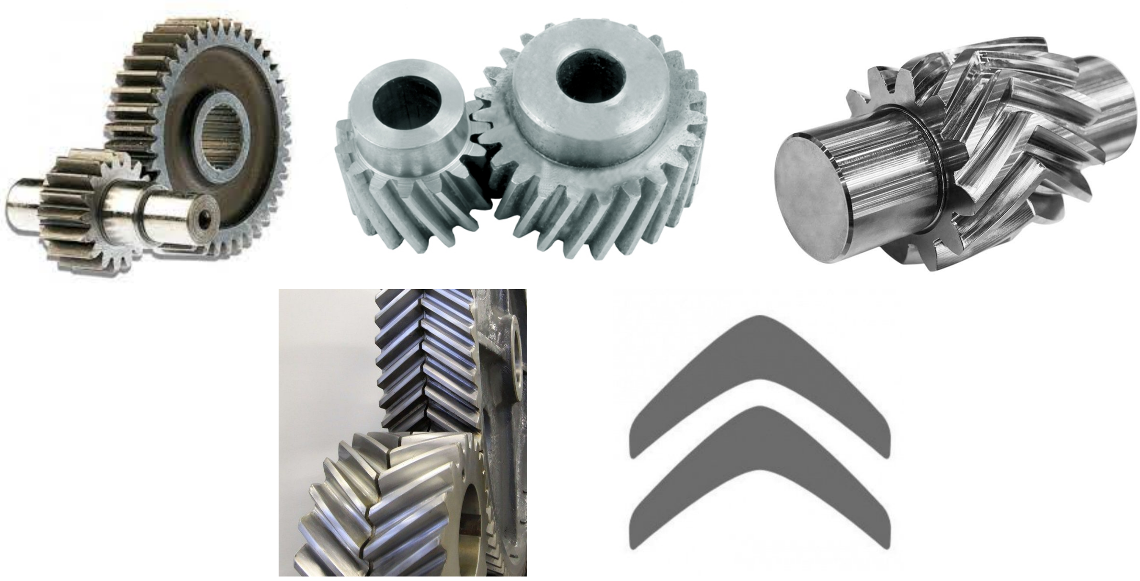


FIGURE 1 – *En haut : denture droite (à gauche), hélicoïdale (au milieu) et en chevron (à droite). En bas, engrenage à chevrons et logo d'une marque automobile française...*

2.2 Pignon-crémaillère

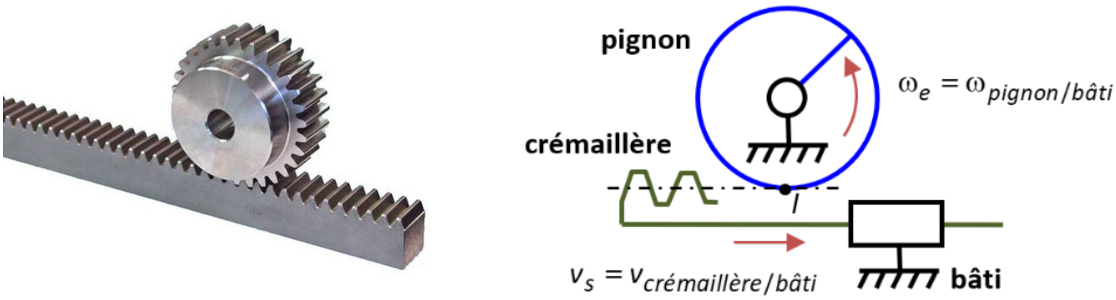
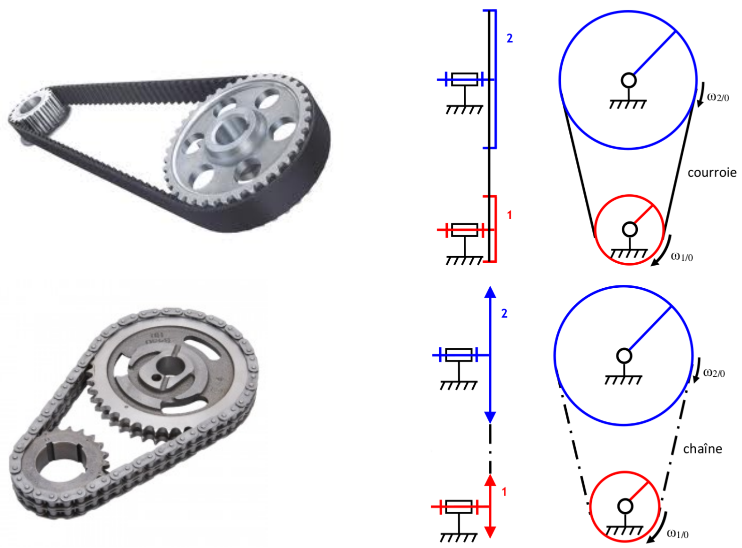


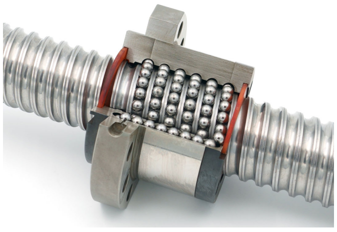
FIGURE 2 – *Pignon-crémaillère (à gauche) et schéma cinématique associé (à droite).*

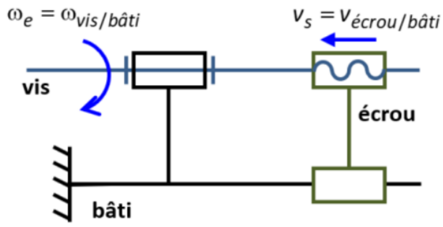
2.3 Poulies-courroie et pignons-chaîne

Les systèmes poulies-courroie ou pignons-chaîne permettent de transmettre un mouvement de rotation entre deux axes. La chaîne est plus bruyante et chère que la courroie mais elle a une plus grande durée de vie, rigidité et permet de transmettre plus d'efforts.

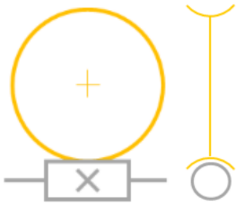


2.4 Vis-écrou



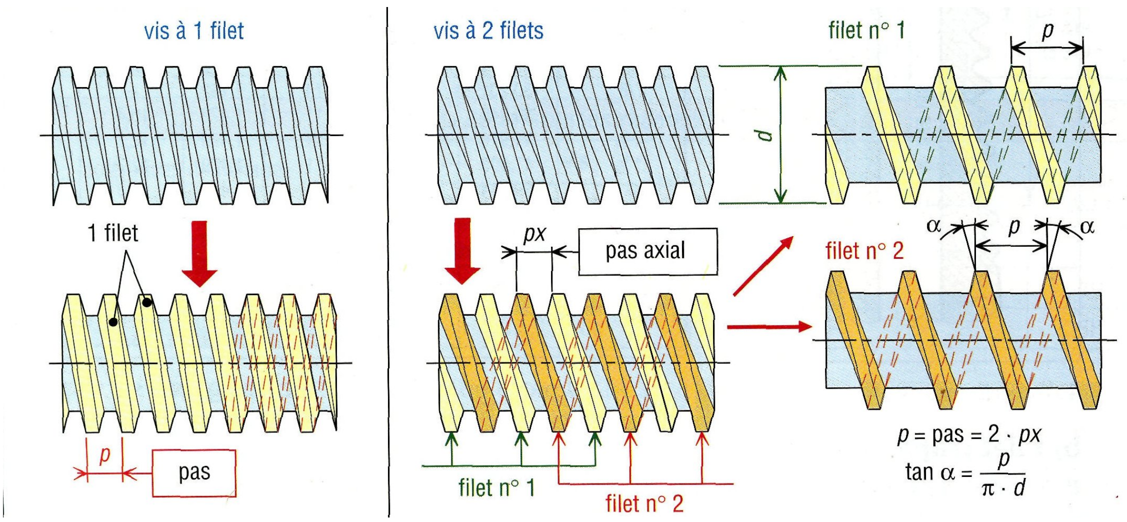


2.5 Roue et vis sans fin



Quelques précisions supplémentaires

Une vis peut avoir plusieurs filets. Il faut alors prendre en compte le nombre de filets pour déterminer les lois entrée-sortie cinématiques ou géométriques.



2.6 Train d'engrenages

À savoir

Lorsque la loi entrée-sortie est linéaire, c'est-dire lorsque la sortie est proportionnelle à l'entrée, on définit le **rapport de transmission**, souvent noté ρ comme

$$\rho = \frac{\omega_e}{\omega_s}$$

où ω_e et la vitesse de rotation de l'entrée et ω_s celle de la sortie.

Attention !

Cette définition est l'inverse de celle du gain de la fonction de transfert qui a la même entrée et la même sortie :

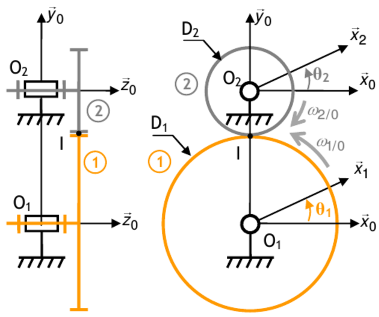
$$\frac{\Omega_s(p)}{\Omega_e(p)} = \frac{1}{\rho}$$

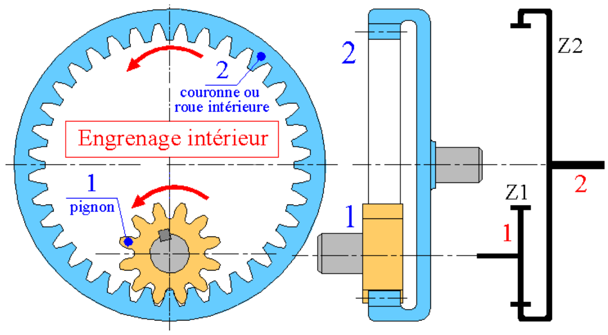
Remarque

Il arrive que la définition du rapport de transmission ne soit pas celle donnée ici (mais son inverse) [a]. Dans tous les cas, on s'adapte aux notations imposées si elle le sont.

a. Il existe des raisons historiques à ceci. Les normes française et états-unienne définissaient des grandeurs inverses pour le même nom de grandeur. Lors de l'uniformisatino de ces normes, le choix retenu fut l'états-unien ce qui fait cohabiter encore de fait l'ancienne et la nouvelle norme en France.

2.6.1 Train d'engrenages à axes parallèles (ou cylindriques)





Lorsque la sortie d'un engrenage constitue l'entrée d'un autre engrenage (et ainsi de suite), on parle de **train d'engrenages**. Si de plus, tous les axes de rotation sont fixes par rapport au bâti, l'ensemble est souvent qualifié de **train d'engrenages simple** (*cf.* figure 3).

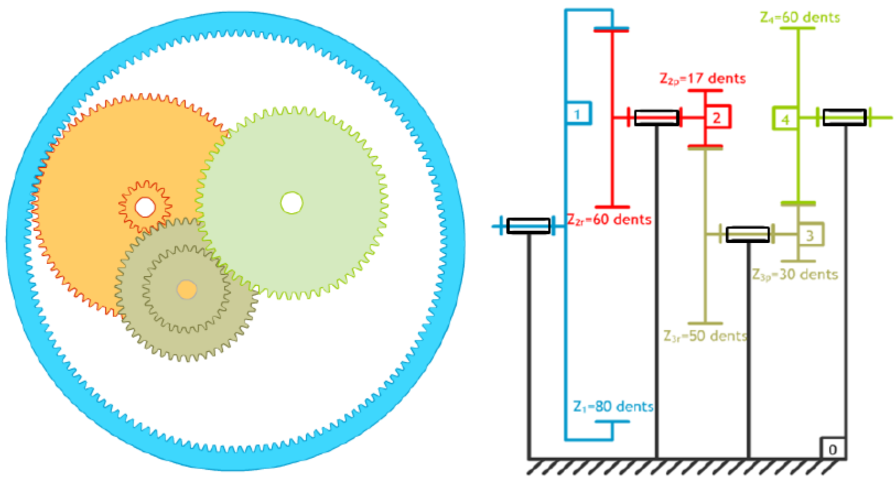


FIGURE 3 – *Boîte de vitesses (à gauche) et réducteur d'un malaxeur de caoutchouc (à droite).*

✍ Déterminer le rapport de transmission, sachant que le réducteur a pour entrée la couronne (1) et pour sortie la roue (4).

2.6.2 Train d'engrenages épicycloïdal

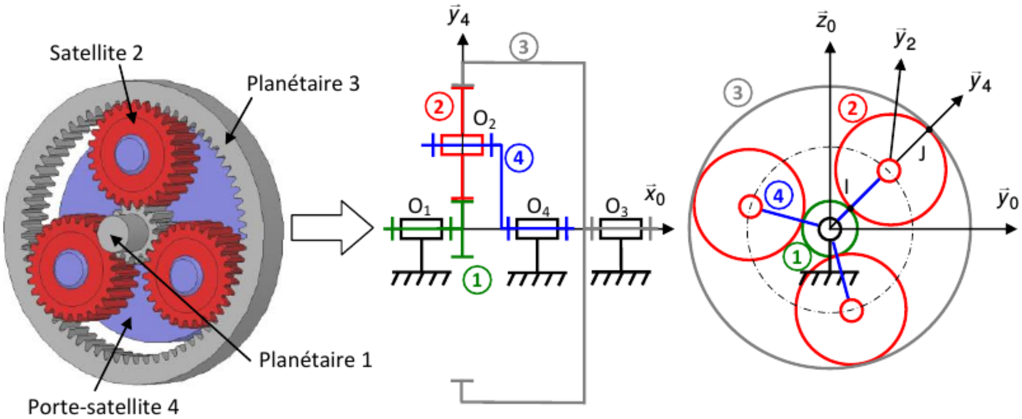


FIGURE 4 – *Train d'engrenages épicycloïdal (à gauche) schémas cinématiques associés (à droite).*

Ce type de train est constitué de deux roues (1) et (3) tournant autour d'un axe $(O_1\overrightarrow{x}_0)$ fixe par rapport au bâti (0) et qui engrènent avec un troisième solide (2) dont l'axe de rotation est lui même en rotation par rapport au bâti. On appelle classiquement (1) et (3) des **planétaires** (le solide (3) est en plus une couronne), le solide (2) le **satellite** et le solide (4) le **porte-satellite**. On remarque sur l'assemblage de la figure 4 qu'il peut exister plusieurs satellites sans que ceci ne modifie le comportement cinématique du système.

✍ Déterminer une relation reliant les vitesses de rotation par rapport au bâti (0) des planétaires (1) et (3) et du porte-satellites (4).

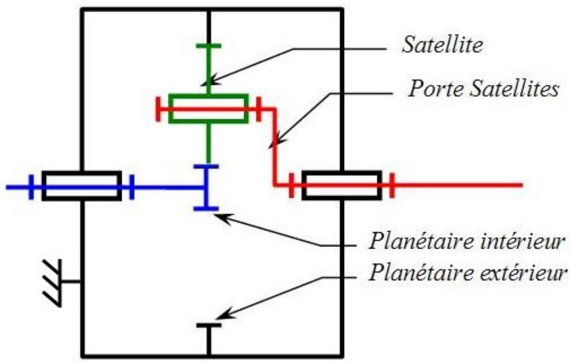


FIGURE 5 – *Schéma cinématique d'un train d'engrenages épicycloïdal avec couronne fixe.*

✍ Déterminez le rapport de transmission du train épicycloïdal ci-dessus, qui a pour entrée le planétaire intérieur et pour sortie le porte-satellites. Le bâti est la couronne.

Il est possible de trouver des satellites qui ont deux dentures distinctes : une pour chaque planétaire avec lequel il engrène.

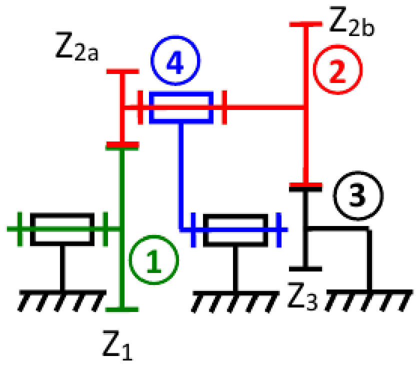


FIGURE 6 – *Train épicycloïdal avec satellite à deux dentures.*

✍ Déterminer le rapport de transmission du train épicycloïdal ci-dessus, qui a pour entrée le planétaire (1) et pour sortie le planétaire (4).