DEVOIR SURVEILLÉ N°1

durée : 4h
La calculatrice n'est **pas autorisée.**
Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Les résultats seront $\boxed{\textbf{encadrés}}$**.**
Le sujet comporte 1 partie **Questions de cours** et 6 **exercices**.
*****

Questions de cours (≃ 8 points)

1. **Démontrer** le théorème suivant :

   Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.
   Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ l'est aussi. De plus $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

2. Soient $f : E \longrightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F.
   Recopier et **compléter** les équivalences suivantes :
   $$y \in f(A) \iff \dots\dots\dots\dots$$
   $$x \in f^{-1}(B) \iff \dots\dots\dots\dots$$

3. **Démontrer** la proposition suivante :

   Soient a et b deux nombres réels et $n \in \mathbb{N}^*$.
   $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k\right)$.

4. **Énoncer** puis **démontrer** la formule du binôme de Newton.

Exercice 1 Démonstrations par récurrence simple, double... (≃ 6 points)

1. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
   $$\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \sqrt{1 + v_n} \end{cases}$$
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $$w_0 = 1, \quad w_1 = -5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = 5w_{n+1} - 6w_n.$$
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 8 \times 2^n - 7 \times 3^n$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 3$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.
   Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = 3n$.

Exercice 2 (≃ 6 points)

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
Vous justifierez correctement vos réponses.

$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x) + 1 \end{array}$ $\quad f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & -n \end{array}$ $\quad f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x - 3y \end{array}$

$f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array}$ $\quad f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, x+y) \end{array}$ $\quad f_6 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+z, y+z) \end{array}$

Exercice 3 **Quelques sommes...** ($\simeq$ 4 points)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k 2^{n-k}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^k}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} i$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} \right)$.

Exercice 4 ($\simeq$ 6 points)

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 2x - 3 \end{array}$

1. Déterminer $f([-3, 2])$, $f^{-1}(\{-3\})$ et $f^{-1}([0, 1[)$.
2. Déterminer une bijection g, induite par f sur des intervalles que l'on précisera.
3. Déterminer une expression de g^{-1} pour la fonction g que vous avez trouvée à la question précédente.

Exercice 5 ($\simeq$ 10 points)

On considère la fonction f définie sur $]-1, 1[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier la parité de la fonction f. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
2. Étudier les variations de f sur $]-1, 1[$.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \geq 2$ par $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$.
   a) Montrer que u_n peut s'écrire $\ln(n-1) - \ln(n+1)$.
   b) Étudier les variations de la suite (u_n).
5. On considère la fonction F définie sur $]-1, 1[$ par $F(x) = (x-1)\ln(1-x) - (x+1)\ln(x+1)$.
   a) Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f.
   b) Déterminer la valeur exacte de $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x)dx$.

Exercice 6 ($\simeq$ 4 points)

Soit E un ensemble et f une application de E dans E vérifiant $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.