Séquence 4

Décrire et prévoir le comportement temporel d'un système continu

Objectif de la séquence

L'objectif de ce cours est d'apprendre à décrire et à prédire le comportement temporel des systèmes continus et en particulier asservis. On commencera par se donner des critères pour mesurer les performances des systèmes continus. On apprendra ensuite à traduire la modélisation sous forme d'équations différentielles de chaque composant en une fonction de transfert dans le domaine de Laplace puis à déduire le comportement de l'ensemble du système asservi à partir de celui de ses composants pour en prédire finalement sa réponse à une entrée donnée.

Table des matières

Page

Objet d'étude *Asservissement en pression d'un respirateur médical*

L'un des modes d'utilisation d'un respirateur médical consiste à imposer une courbe de pression en fonction du temps à la bouche du patient. Il s'agit donc d'un asservissement de cette pression, dite de voie aérienne.

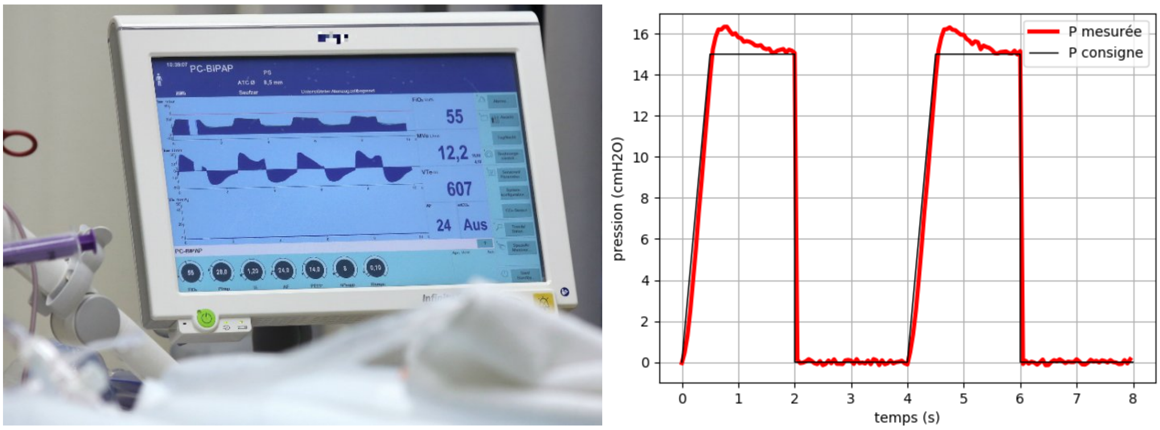


FIGURE *1 – Moniteur d'un respirateur et courbe de pression souhaitée et mesurée.*

- → À quel point le système est-il capable de répondre au cahier des charges ?
- → Quels critères associer aux exigences du cahier des charges pour les quantifier ?
- → Comment prédire ces performances à partir de la connaissance du comportement des composants du système ?

1 Systèmes continus, entrées canoniques et performances

1.1 Systèmes continus

Définition

On appelle **système continu** un système dont les grandeurs d'entrée et de sortie sont définies à tout instant. On dit que ces grandeurs sont **analogiques**.

Les systèmes continus s'opposent aux **systèmes échantillonnés** pour lesquels les grandeurs d'entrée et de sortie ne sont définies qu'à certains instants : elles sont **discrètes**.

Le respirateur est vu ici comme un système prenant en entrée la pression souhaitée p_{consigne}, qu'on appelle la **consigne**, et ayant pour sortie la pression réelle en bouche du patient p_{aw}.

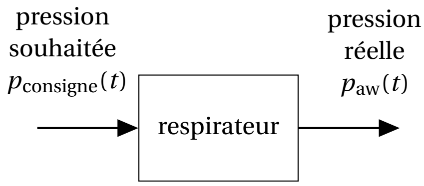


FIGURE 2 – *Représentation du respirateur.*

1.2 Entrées canoniques

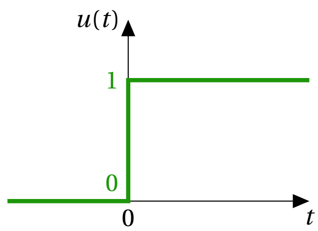
Le respirateur est soumis à une entrée qui croît linéairement d'abord puis reste constante et qui finalement chute brutalement et reste constante au niveau initial. Cette entrée est complexe mais peut être décrite à partir d'entrées simples que nous allons décrire.

D'une façon générale, le système est supposé au repos avant d'être utilisé par l'acteur principal. De ce fait, on suppose que l'entrée du système est nulle avant l'origine des temps (l'instant $t = 0$).

Définition

La **fonction de Heaviside** est habituellement notée u (ou h) et est définie par

$$\begin{cases} \forall t < 0, \ u(t) = 0 \\ \forall t \geq 0, \ u(t) = 1 \end{cases}$$



Les entrées canoniques sont définies à partir de la fonction de Heaviside.

1.2.1 Échelon

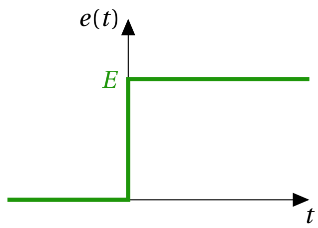
À savoir

L'**échelon** : l'entrée passe brusquement de 0 à une valeur constante appelée **amplitude**.

$$e(t) = Eu(t)$$

où E est l'amplitude de l'échelon.

La réponse d'un système à une entrée en échelon est appelée **réponse indicielle**.



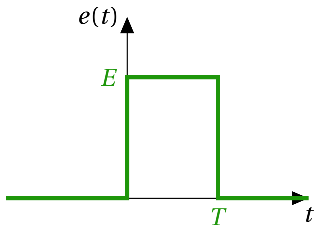
1.2.2 Créneau

À savoir

Le **créneau** : l'entrée passe brusquement de 0 à une valeur constante appelée **amplitude** puis redescend au bout d'une certaine durée à 0.

$$e(t) = E(u(t) - u(t - T))$$

où E est l'amplitude de l'échelon et T sa durée ou largeur.



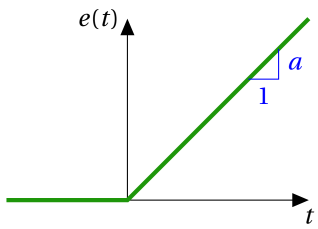
1.2.3 Rampe

À savoir

La **rampe** : l'entrée croît linéairement à partir de l'instant initial avec une **pente** donnée.

$$e(t) = a\,t\,u(t)$$

où a est la pente de la rampe.



1.2.4 Impulsion

À savoir

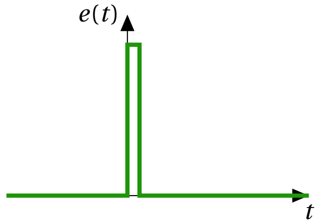
L'**impulsion** n'est pas à proprement parler une fonction[a] : l'entrée, toujours nulle, prend une valeur infinie en $t = 0$ pendant une durée infiniment courte de telle sorte que son intégrale est finie et appelée **amplitude**. Une impulsion d'amplitude unitaire est dite **fonction de Dirac** ou **Dirac**[b] et notée δ.

$$e(t) = A\delta(t)$$

où A est l'amplitude de l'impulsion.

a. Il s'agit en fait d'une distribution (ou fonction généralisée). L'impulsion est la limite d'une suite de fonctions : des fonctions créneau de largeur $\frac{1}{n}$ et d'amplitude n. La limite de cette suite de créneaux lorsque n tend vers l'infini est un créneau infiniment fin et infiniment haut.

b. En l'honneur de Paul Dirac, mathématicien et physicien britannique du XXᵉ siècle qui l'a décrite pour l'utiliser initialement dans le contexte de la mécanique quantique.



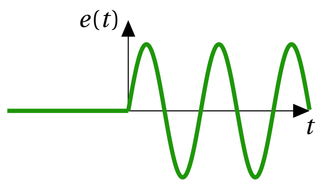
1.2.5 Sinusoïde

Pour aller plus loin

La **sinusoïde** : pour $t > 0$ l'entrée est sinusoïdale.

$$e(t) = A\sin(\omega t)\,u(t)$$

où A est l'amplitude et ω la pulsation.



1.2.6 Composition des entrées canoniques

L'entrée de pression souhaitée du respirateur peut être construite à partir de ces entrées canoniques.

✍ Exprimer p_{consigne} à partir des entrées canoniques.

1.3 Performances des systèmes continus

Caractériser les performances temporelles d'un système continu revient essentiellement à quantifier :

- sa **stabilité** : capacité du système à atteindre une valeur constante
- sa **précision** : capacité à atteindre la valeur souhaitée une fois que la réponse est constante.
- sa **sensibilité aux perturbations** (ou **précision** vis-à-vis des perturbations) : capacité à compenser l'apparition d'une perturbation.
- sa **rapidité** : capacité à atteindre rapidement sa valeur constante finale

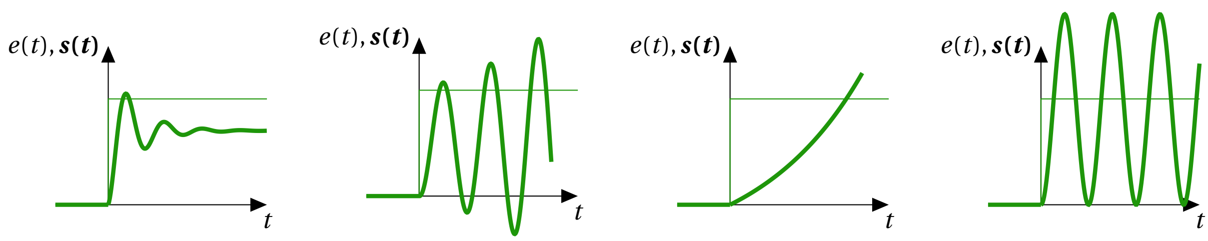
Voyons quels critères lisibles sur une réponse temporelle du système peuvent être associés à chacune de ces exigences.

1.3.1 Stabilité

À savoir

La **stabilité** est caractérisée à partir de la réponse indicielle d'un système. On distingue d'abord les systèmes **stables** des systèmes **instables**.

Un système est **stable** si sa **réponse indicielle tend** vers une **valeur finie**, qu'on appellera « valeur finale de la réponse » ou « réponse à l'infini ».



(a) Réponse indicielle d'un système stable

(b) Réponse indicielle d'un système instable (oscillant)

(c) Réponse indicielle d'un système instable (non oscillant)

(d) Réponse indicielle d'un système à la limite de la stabilité

FIGURE 3 – *Stabilité d'un système continu.*

Pour aller plus loin

On peut déterminer si un système est stable ou non à partir d'autres réponses que l'indicielle.

- Si à une entrée bornée correspond une sortie bornée, alors le système est stable.
- Si la réponse du système à une entrée constante à partir d'un certain instant tend vers une valeur finie, alors le système est stable.

Pour aller bien plus loin

On peut également définir la stabilité de façon équivalente à partir de la réponse impulsionnelle du système. Le système est stable si sa réponse impulsionnelle tend vers 0.

À savoir

Dans le cas des systèmes stables, on quatifie la stabilité par le critère **dépassement**, qui correspond à la différence entre la valeur maximale atteinte par la réponse su système et sa valeur finale.

En notant $s_\infty = \lim_{t\to\infty} s(t)$ la valeur finale de la réponse $s(t)$, le **dépassement absolu** s'écrit :

$$D_{\text{abs}} = \max(s(t) - s_\infty)$$

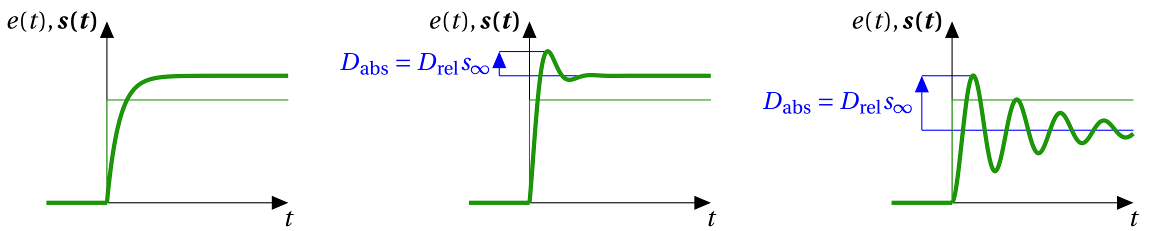
et le **dépassement relatif**

$$D_{\text{rel}} = \frac{\max(s(t) - s_\infty)}{s_\infty}$$

Le « dépassement » fait normalement référence au dépassement relatif et s'exprime en **pourcentage**.

Quelques précisions supplémentaires

En toute rigueur, le dépassement n'est pas une quantification directe de la stabilité mais d'une autre exigence qui est appelée **amortissement**. Cependant, l'amortissement étant lié à la stabilité il est fréquent d'utiliser l'amortissement comme caractérisation de la stabilité.



(a) Réponse indicielle d'un système très amorti/stable ($D = 0$). *(b) Réponse indicielle d'un système amorti/stable.* *(c) Réponse indicielle d'un système peu amorti/stable.*

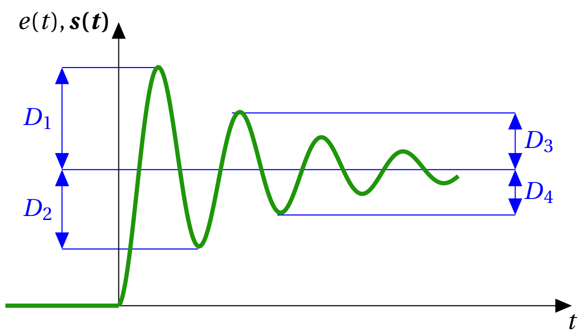
FIGURE 4 – *Dépassement d'un système continu.*

Remarque

Attention à bien définir le dépassement à partir de la valeur maximale et de la **valeur finale** et non de la ~~valeur de consigne~~.

Pour aller plus loin

On définit également un dépassement pour chaque extremum local de la réponse du système. On définit le n-ième dépassement, noté D_n comme la valeur absolue de l'écart relatif entre le n-ième extremum local et la valeur finale s_∞. Pour la plupart des systèmes, le plus grand dépassement correspond au premier dépassement et alors $D = D_1$.



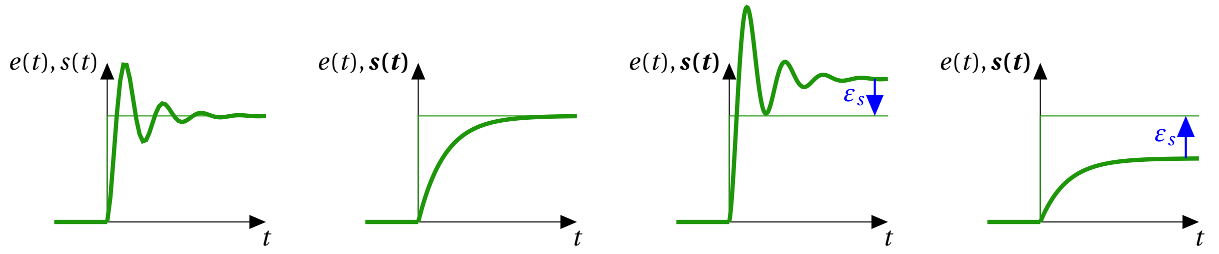
1.3.2 Précision

À savoir

La **précision** se quantifie par le critère d'**erreur statique**, notée ε_s, qui est la **différence signée** entre la consigne et la valeur finale de la réponse.

$$\varepsilon_s = \lim_{t\to\infty}(e(t)-s(t))$$

Si l'**erreur statique** est **nulle**, on dit que le système est « **précis** ».



(a) Réponse indicielle d'un système précis (oscillant) *(b) Réponse indicielle d'un système précis (non-oscillant)* *(c) Réponse indicielle d'un système non précis avec $\varepsilon_s < 0$* *(d) Réponse indicielle d'un système non précis avec $\varepsilon_s > 0$*

FIGURE 5 – *Précision d'un système continu.*

Pour aller plus loin

L'erreur statique est la limite de l'erreur, définie par $\varepsilon(t) = (e(t) - s(t))$, pour une consigne $e(t)$ convergente. De ce fait, il n'est pas nécessaire de lire l'erreur statique sur la réponse indicielle. Il suffit de la lire sur la réponse du système à une entrée tendant vers une valeur finie.

✍ Quelle est l'erreur statique de l'asservissement en pression du respirateur (*cf.* figure 1) ?

Remarque

L'erreur statique est une grandeur signée. Le signe indique si la réponse est trop élevée ou pas assez par rapport à la consigne.

Pour aller plus loin

Nous discutons ici de la précision d'un système asservi : sa sortie est par définition de même nature que son entrée puisque le rôle de l'asservissement est de rendre la sortie égale à l'entrée. Sur d'autres systèmes continus, la précision peut ne pas être définie. Par exemple, pour un moteur à courant continu, dont l'entrée serait la tension électrique d'alimentation et la sortie la vitesse de rotation, il est impossible de définir la précision. En effet, l'erreur statique n'est pas homogène ; chercher à savoir si la vitesse de rotation du moteur est égale à sa tension d'alimentation est un non-sens.

Quelques précisions supplémentaires

Il existe d'autres critères associés à l'exigence de précision. Par exemple, on définit l'**erreur de traînage** (ou de **poursuite**) ε_t comme la limite de l'erreur lorsque l'entrée est une rampe et non un échelon.

$$\varepsilon_t = \lim_{t\to\infty}(e(t)-s(t)) \quad \text{pour } e(t) \text{ de la forme } e(t) = atu(t)$$

On peut également définir le **retard de traînage** (ou de poursuite) comme la limite du décalage temporel de passage par une même valeur de sortie.

Remarque

On ne peut pas écrire $\varepsilon_t = \lim_{t\to\infty}(e(t) - s(t)) = \lim_{t\to\infty} e(t) - \lim_{t\to\infty} s(t)$ puisque $e(t)$ diverge (et on peut espérer que $s(t)$ fait de même...)

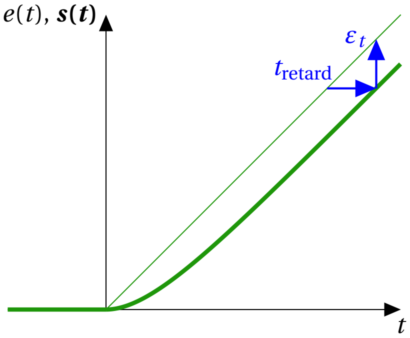


FIGURE 6 – *Erreur de traînage.*

1.3.3 Sensibilité aux perturbations

Le système respirateur peut être perturbé par l'action du patient, s'il essaie lui-même de respirer. On peut alors considérer le système respirateur comme un système continu à deux entrées : p_{consigne} et p_{patient}, la première étant toujours la consigne et la deuxième étant une perturbation.

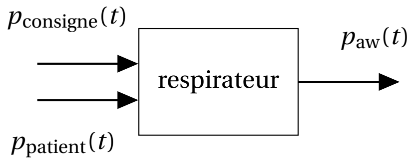


FIGURE 7 – *Représentation du respirateur avec perturbation.*

À savoir

La **sensibilité aux perturbations** ou **précision vis-à-vis des perturbations** se quantifie par l'erreur statique en présence d'une perturbation en échelon d'amplitude donnée.

✍ On fournit ci-contre la réponse du respirateur à la consigne suivie d'une perturbation. Déterminer sa précision vis-à-vis de la perturbation.

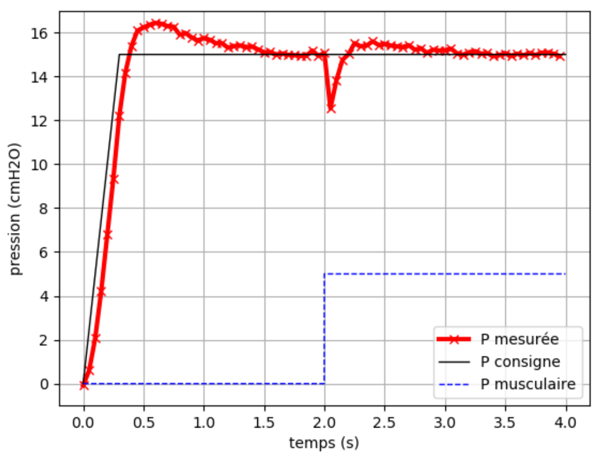
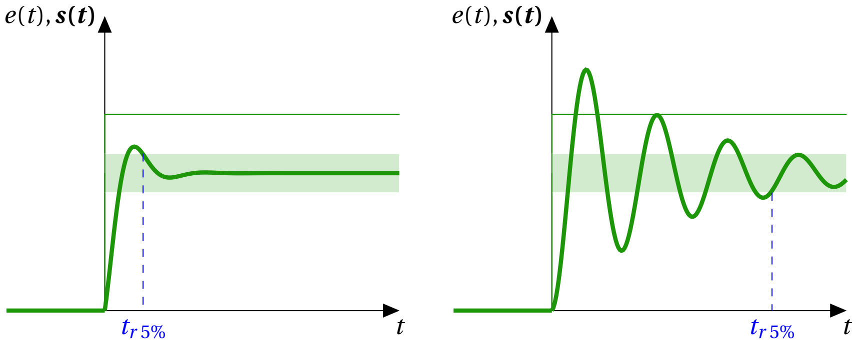


FIGURE 8 – *Réponse du respirateur avec perturbation à l'instant $t = 2$ s.*

1.3.4 Rapidité

À savoir

La **rapidité** se quantifie par le **temps de réponse à 5 %**, c'est-à-dire par le temps que met la **réponse indicielle** du système $s(t)$ à **atteindre définitivement** une **enveloppe** de **5 %** autour de la **valeur finale**.



(a) Réponse indicielle d'un système avec lecture de son temps de réponse à 5 %.

(b) Réponse indicielle d'un système avec lecture de son temps de réponse à 5 %

FIGURE 9 – *Rapidité d'un système continu. Le système (a) est plus rapide que le (b).*

Attention !

Attention à bien définir l'enveloppe autour de la **valeur finale** et non de la ~~consigne~~. De même, la largeur de l'enveloppe est de 5 % de la **valeur finale** et non de la ~~consigne~~.

Attention !

Il n'est possible de définir la précision et la rapidité que lorsque le système étudié est stable.

✍ On fournit ci-contre la réponse indicielle du respirateur. Déterminer son temps de réponse à 5 %.

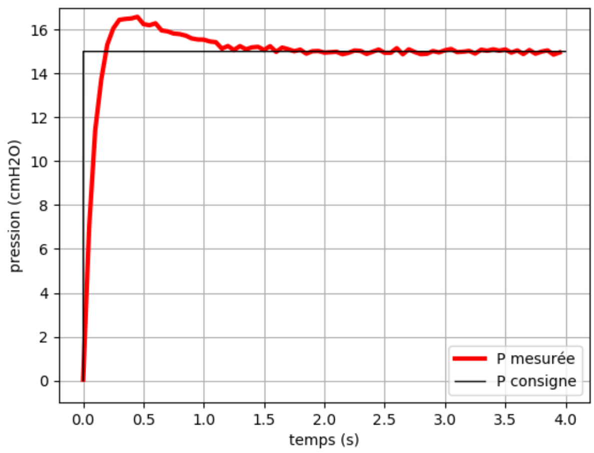


FIGURE 10 – *Réponse indicielle du respirateur.*

2 Modélisation des systèmes linéaires continus et invariants (SLCI)

Nous avons déterminé les critères des exigences relatives au comportement d'un système continu. Cherchons maintenant à nous donner un cadre mathématique permettant de traduire le comportement des systèmes continus et ensuite de prévoir leur comportement.

2.1 Systèmes linéaires continus et invariants

Le comportement des systèmes continus peut être modélisé à partir d'une équation différentielle reliant l'entrée à la sortie. Dans le cas général, il est très difficile d'exploiter une équation différentielle quelconque. Faisons quelques hypothèses sur le comportement du système à modéliser et voyons la portée de ces hypothèses.

2.1.1 Invariance

Définition

On dit qu'un système est **invariant** si, lorsqu'il est au repos, sa réponse ne dépend pas de l'instant d'application de l'entrée. Autrement dit, si à l'entrée $e(t)$ correspond la sortie $s(t)$, alors quel que soit le décalage temporel τ, à l'entrée $e(t-\tau)$ correspond la sortie $s(t-\tau)$. Ceci peut se représenter par :

$$e(t) \rightsquigarrow s(t) \Rightarrow \forall \tau, \quad e(t-\tau) \rightsquigarrow s(t-\tau)$$

Quelques précisions supplémentaires

L'invariance peut être limitée par le vieillissement des pièces mécaniques mais aussi par la dépendance du comportement de paramètres non pris en compte dans le modèle (température, pression etc.).

L'apparition d'un liquide dans la tuyauterie du respiratur peut provoquer une variation de comportement du respirateur et compromettre donc son invariance.

2.1.2 Linéarité

Définition

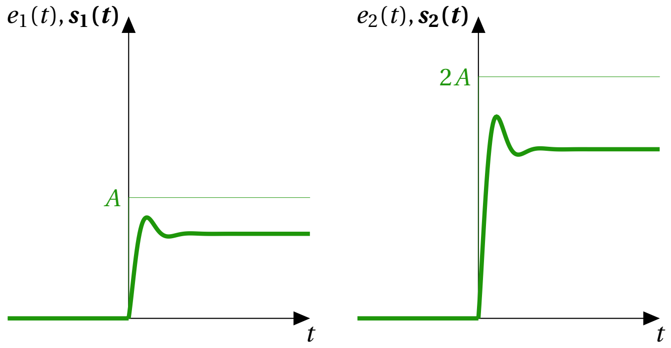
On dit qu'un système est **linéaire** si la superposition de deux entrées conduit à une réponse égale à la superposition de la réponse correspondant à chacune de ces deux entrées.

Soient $e_1(t)$ et $e_2(t)$ deux fonctions d'entrée, $s_1(t)$ et $s_2(t)$ leurs sorties associées et λ un réel. Alors

$$e_1(t) + \lambda e_2(t) \rightsquigarrow s_1(t) + \lambda s_2(t)$$

où le symbole $\rightsquigarrow$ se lit « a pour sortie ».

Notamment, la réponse d'un système linéaire à un échelon d'amplitude $2A$ sera à tout instant égale à 2 fois la réponse du même système à un échelon d'amplitude A.



Remarque

Cette propriété est très intéressante puisqu'elle permet de déterminer la réponse d'un système à une entrée complexe décomposable en entrées simples.

On peut déterminer la réponse du respirateur à l'entrée $p_{\text{consigne}}(t) = \frac{15}{0,5}tu(t) - \frac{15}{0,5}tu(t-0,5) - 15u(t-2)$ à partir des réponses du respirateur aux entrées $tu(t)$, $tu(t-0,5)$ et $u(t-2)$. En exploitant par ailleurs l'invariance du système, il suffit de déterminer la réponse du respirateur à $tu(t)$ et $u(t)$ pour prévoir le comportement de celui-ci à p_{consigne}.

Pour aller plus loin

Il existe des phénomènes qui limitent la linéarité du comportement de certains systèmes. On peut citer

- la saturation,
- le seuil,
- l'hystérésis...

Si les phénomènes de seuil et d'hystérésis sont faibles vis-à-vis de l'amplitude des mouvements étudiés ou si la saturation n'arrive que pour des valeurs proches des extrema des valeurs effectivement prises par les grandeurs du système, on peut les négliger afin de simplifier le modèle.
Par exemple, dans le cas du respirateur, il faut une alimentation minimale pour que la valve permettant de délivrer un débit d'air s'ouvre (seuil). Par ailleurs, l'ouverture ne peut pas aller au-delà de son maximum mécanique (saturation). Si on s'intéresse plus en détail au circuit pneumatique, on remarquera qu'avant d'atteindre le patient, l'air délivré par le respirateur remplit la tuyauterie de celui-ci et l'air expiré remplit la tuyauterie avant d'être effectivement évacué (hystérésis).

Pour aller plus loin

Beaucoup de relations mécaniques sont non-linéaires comme par exemple un grand nombre des relations entre des grandeurs cinématiques d'un mécanisme.
Dans ce cas, si l'amplitude d'évolution des grandeurs d'entrée et sortie est suffisamment restreinte, on pourra supposer que le comportement est linéaire autour du point de fonctionnement. On assimile alors la relation non-linéaire à sa tangente au point d'intérêt.

On se restreint par la suite à l'étude des systèmes linéaires continus et invariants (SLCI).

2.2 Caractérisation du comportement par une équation différentielle

Modéliser le comportement temporel d'un système sous les hypothèses de continuité, linéarité et invariance revient à traduire son comportement temporel par une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n}(t) + \cdots + a_2 \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}(t) + a_1 \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) + a_0 s(t) = b_m \frac{\mathrm{d}^m e}{\mathrm{d}t^m}(t) + \cdots + b_2 \frac{\mathrm{d}^2 e}{\mathrm{d}t^2}(t) + b_1 \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}(t) + b_0 e(t)$$

Un tel modèle peut s'établir à partir des phénomènes physiques qui régissent le comportement du système. Il s'agit alors d'un **modèle de connaissance**.

Dans le cas du patient, on peut établir le modèle suivant. On note :

- $p_{\mathrm{aw}}(t)$ la pression de la voie respiratoire (bouche du patient). Il s'agit de la sortie du système.
- $q(t)$ le débit d'air entrant dans le patient. Il s'agit de l'entrée du système.
- $V(t)$ le volume d'air dans les poumons du patient
- R la résistance pneumatique de la voie aérienne du patient (à rapprocher de la résistance électrique, en remplaçant la différence de tension par la différence de pression et le courant par le débit d'air)
- C la compliance de la cage thoracique (à rapprocher de la capacité d'un condensateur électrique, en remplaçant la charge par le volume et la tension par la pression)

Les équations qui régissent le comportement du patient branché au respirateur peuvent alors s'écrire

$$\begin{cases} p_{\mathrm{aw}}(t) = Rq(t) + \dfrac{V(t)}{C} \\ q(t) = \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t) \end{cases}$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{aw}}}{\mathrm{d}t}(t) = R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{q(t)}{C}$$

et on reconnaît la forme générale d'une équation différentielle linéaire à coefficient constants donnée ci-dessus.

Définition

On appelle **ordre** d'un système le **degré maximal** de dérivation de la **sortie** du système dans l'équation différentielle de comportement.

On appelle **classe** du système le degré de **dérivation minimal** de la **sortie** du système dans l'équation différentielle de comportement.

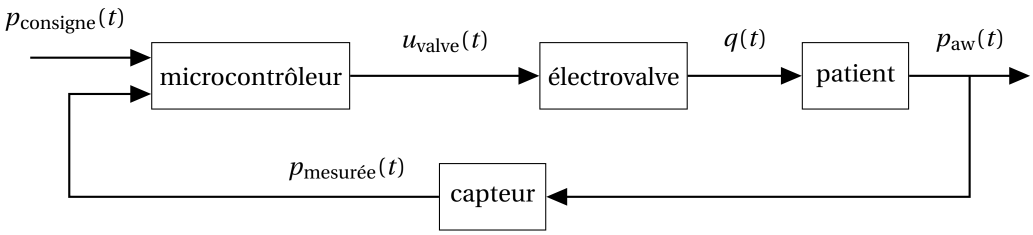
Le système {patient branché au respirateur}, avec pour entrée le débit d'air et pour sortie la pression en voie respiratoire, est d'ordre 1 et de classe 1.

Pour aller plus loin

Un système réel doit respecter le **principe de causalité** : les causes doivent se produire après les conséquences. Ce principe se traduit dans le cas d'un système linéaire continu et invariant par le fait que le degré maximal de dérivation de la sortie doit être supérieur ou égal à celui de l'entrée.

2.3 Domaine de Laplace

La manipulation d'équations différentielles peut être fastidieuse, notamment quand chaque composant d'un système est décrit par une équation différentielle et que les sorties des uns sont les entrées des autres.



On cherche donc un moyen de simplifier la manipulation de ces équations différentielles. Le domaine de Laplace est un outil mathématique qui permet de manipuler plus facilement les équations de comportement des SLCI. Le passage d'une équation différentielle dans le domaine de Laplace se fait grâce à la transformée de Laplace.

2.3.1 Définition de la transformation de Laplace

Pour aller plus loin

Soit f une fonction du temps. On note F sa transformée de Laplace : $f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(p)$. La fonction F est définie par[a] :

$$F(p) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-tp}\,\mathrm{d}t$$

Notons que les valeurs de f pour $t < 0$ ne sont pas prises en compte dans la définition de F, transformée de Laplace de f.

a. Cette définition n'est pas à connaître mais il est intéressant d'essayer de comprendre sa signification physique et d'en faire une analyse dimensionnelle.

Quelques précisions supplémentaires

La transformée de Laplace d'une fonction temporelle est normalement notée avec la même lettre en majuscule.

L'opération de transformation de Laplace se note $\mathscr{L}$

À savoir

Soient f et g deux fonctions du temps vérifiant les conditions de Heaviside (cf. ci-après) et notons $F(p)$ et $G(p)$ leur transformée respective et λ un réel. Alors :

linéarité : $f(t) + \lambda g(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(p) + \lambda G(p)$

dérivation : $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} pF(p)$

intégration : $\int_0^t f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{F(p)}{p}$

Attention !

En revanche, il faut bien noter que $f(t)g(t) \overset{\mathscr{L}}{\nrightarrow} F(p)G(p)$

Définition

On appelle **conditions de Heaviside**, le fait que le système soit au repos avant l'instant $t = 0$. Cela se traduit par le fait que la fonction et toutes ses dérivées sont nulles pour $t < 0$.

Pour aller bien plus loin

Déterminons la transformée de Laplace de $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)$, dérivée d'une fonction $f(t)$ dont la transformée $F(p)$ est supposée connue.

$$\begin{aligned}\left[\mathscr{L}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)\right](p) &= \int_{0^-}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{e}^{-tp}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[f(t)\,\mathrm{e}^{-tp}\right]_{0^-}^{+\infty} - \int_{0^-}^{+\infty} f(t)(-p)\,\mathrm{e}^{-tp}\,\mathrm{d}t \\ &= -f(0^-) + p\int_{0^-}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-tp}\,\mathrm{d}t \\ &= pF(p) - f(0^-)\end{aligned}$$

Alors $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} pF(p) - f(0^-)$. Si avant l'application de l'entrée, la fonction f est nulle ($f(t<0) = 0$), la dérivation dans le domaine temporel s'écrit simplement comme un produit entre la variable p et la fonction F dans le domaine de Laplace.

Quelques précisions supplémentaires

La dimension physique de la variable de Laplace p est l'inverse d'un temps (une fréquence ou une pulsation) : $[p] = s^{-1}$

Pour aller plus loin

La dimension physique de la transformée de Laplace $F(p)$ n'est pas la même que celle de $f(t)$: $[F(p)] = [f(t)] \cdot s$

Appliquons la transformée de Laplace à l'équation de comportement du patient déterminée ci-dessus :

$$\frac{\mathrm{d}\,p_{\mathrm{aw}}}{\mathrm{d}\,t}(t) = R\frac{\mathrm{d}\,q}{\mathrm{d}\,t}(t) + \frac{q(t)}{C}$$

2.3.2 Fonction de transfert

L'intérêt de cette équation de comportement dans le domaine de Laplace est que la sortie $P_{\mathrm{aw}}(p)$ s'exprime comme une fonction de la variable de Laplace p multipliée par l'entrée $Q(p)$ ce qui n'était pas le cas des grandeurs dans le domaine temporel. Ainsi, le rapport

$$\frac{P_{\mathrm{aw}}}{Q} = \frac{Rp + \frac{1}{C}}{p} = \frac{1 + RCp}{Cp}$$

est indépendant de l'entrée et la sortie.

Définition

La **fonction de transfert** d'un système est le rapport, dans le domaine de Laplace, de la sortie sur l'entrée du système. La fonction de transfert caractérise le comportement du système et ne dépend que de ses caractéristiques intrinsèques.

À savoir

Le **degré maximal** du **dénominateur** de la fonction de transfert correspond au degré maximal de dérivation de la sortie dans l'équation différentielle de comportement. Il s'agit donc de l'**ordre** du système ou de la fonction de transfert.

Le **degré minimal** du **dénominateur** de la fonction de transfert correspond au degré minimal de dérivation de la sortie dans l'équation différentielle de comportement. Il s'agit donc de la **classe** du système ou de la fonction de transfert.

3 Réponses des SLCI habituels aux entrées canoniques

Méthode à conaître

Pour connaître la réponse $s(t)$ d'un système donné caractérisé par sa fonction de transfert $H(p)$ à une entrée donnée $e(t)$, il faut :

1) déterminer l'expression de l'entrée $e(t)$ dans le domaine de Laplace : $E(p)$
2) multiplier l'entrée $E(p)$ par la fonction de transfert $H(p)$ afin d'obtenir $S(p)$, la sortie dans le domaine de Laplace
3) trouver une fonction temporelle $s(t)$ dont la transformée de Laplace est $S(p)$

Cette méthode peut être appliquée pour prouver tous les résultats de cette partie. Il suffit de s'appuyer sur les transformées de Laplace des entrées canoniques (*cf.* figure 1) et sur les transformées de Laplace de certaines fonction usuelles (*cf.* figure 2).

Il est également possible de déduire certaines carcactéristiques de $s(t)$, comme sa limite à l'infini s_∞ ou encore sa pente à l'origine à partir de l'expression $S(p)$ et des théorèmes de la valeur finale et initiale.

3.1 Entrées canoniques dans le domaine de Laplace et autres fonctions usuelles

À savoir

Nom	Fonction temporelle	Tracé fonction temporelle	Transformée de Laplace
Impulsion	$\delta(t)$		1
Échelon unitaire (f. Heaviside)	$u(t)$		$\dfrac{1}{p}$
Rampe	$t\,u(t)$		$\dfrac{1}{p^2}$
Sinus	$\sin(\omega t)\,u(t)$		$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
Cosinus	$\cos(\omega t)\,u(t)$		$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
Créneau	$u(t)-u(t-\tau)$		$\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\tau p}}{p}$

TABLEAU *1 – Fonctions associées aux entrées canoniques sous leur forme unitaire.*

Pour aller plus loin

Nom	Fonction temporelle	Tracé fonction temporelle	Transformée de Laplace
Exponentielle décroissante	$e^{-\alpha t}\, u(t)$		$\dfrac{1}{p+\alpha}$
	$t\, e^{-\alpha t}\, u(t)$		$\dfrac{1}{(p+\alpha)^2}$
Sinus avec décroissance exponentielle	$\sin(\omega t)\, e^{-\alpha t}\, u(t)$		$\dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
Cosinus avec décroissance exponentielle	$\cos(\omega t)\, e^{-\alpha t}\, u(t)$		$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$

TABLEAU 2 – *Fonctions utiles pour déterminer des transformées de Laplace inverses.*

3.2 Théorèmes de la valeur finale et de la valeur initiale

À savoir

Théorème de la valeur finale

Soit f une fonction temporelle et F sa transformée de Laplace. Si la limite de f à l'infini existe, alors

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$$

Pour aller plus loin

L'existence de la limite de f à l'infini est équivalente au fait que l'ensemble des pôles (donc les racines du dénominateur) de $pF(p)$ sont à partie réelle strictement négative.

À savoir

Théorème de la valeur initiale

Soit f une fonction temporelle et F sa transformée de Laplace. Si la limite de $pF(p)$ en $+\infty$ existe, alors

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\to+\infty} pF(p)$$

Remarque

Ce théorème permet de repérer facilement les discontinuités de la sortie d'un système (ou de ses dérivées).

Remarque

On appliquera souvent le théorème de la valeur finale ou intiale à la sortie du système $s(t)$.

La transformée inverse de $H(p)$ n'a aucun sens physique. Appliquer le théorème de la valeur finale ou initiale à $H(p)$ est un non-sens.

3.3 Système gain pur

Définition

On appelle **gain pur** un système dont la fonction de transfert est

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K$$

Quelques précisions supplémentaires

Un intégrateur pur a pour équation différentielle de comportement :

$$s(t) = Ke(t)$$

À savoir

Réponse indicielle d'un gain pur

Pour aller plus loin

Réponse à une rampe d'un gain pur

3.4 Système intégrateur pur

Définition

On appelle **intégrateur pur** un système dont la fonction de transfert est

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{p}$$

Quelques précisions supplémentaires

Un intégrateur pur a pour équation différentielle de comportement :

$$s(t) = \int_0^t e(t)\mathrm{d}t$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}(t) = e(t)$$

À savoir

Réponse indicielle d'un intégrateur pur

Pour aller bien plus loin

Réponse à une rampe d'un intégrateur pur

3.5 Système dérivateur pur

Définition

On appelle **dérivateur pur** un système dont la fonction de transfert est

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = p$$

Quelques précisions supplémentaires

Un dérivateur pur a pour équation différentielle de comportement :

$$s(t) = \frac{\mathrm{d}\,e}{\mathrm{d}\,t}(t)$$

À savoir

Réponse indicielle d'un dérivateur pur

Pour aller plus loin

Réponse à une rampe d'un dérivateur pur

3.6 Retard pur

Définition

On appelle **retard pur** un système dont la fonction de transfert est

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \mathrm{e}^{-\tau p}$$

Quelques précisions supplémentaires

Un retard pur a pour équation temporelle de comportement :

$$s(t) = e(t - \tau)$$

Pour aller plus loin

Réponse indicielle d'un retard pur

3.7 Système d'ordre 1 (classe 0)

Définition

La fonction de transfert d'un **système d'ordre 1** s'écrit sous la forme

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau p}$$

Remarque

L'appellation « système d'ordre 1 » fait habituellement référence à un système d'ordre 1, de classe 0 et dont le numérateur est constant.

Quelques précisions supplémentaires

Un **système d'ordre 1** et de classe 0 a pour équation différentielle de comportement :

$$\tau \frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}(t) + s(t) = K e(t)$$

où

- K est appelé **gain statique** et a la dimension physique de $\frac{s}{e}$
- τ est appelé **constante de temps** du système et a la dimension physique d'un temps

À savoir

Réponse indicielle d'un système d'ordre 1

À savoir

Caractéristiques de la réponse indicielle d'un système d'ordre 1

Pour aller plus loin

Réponse à une rampe d'un système d'ordre 1

Pour aller plus loin

Erreur de traînage d'un système d'ordre 1

3.8 Système d'ordre 2 (classe 0)

Définition

La fonction de transfert d'un **système d'ordre 2** s'écrit sous la forme

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

où

- K est appelé **gain statique** et a la dimension physique de $\frac{s}{e}$
- ω_0 est appelé **pulsation propre** du système et a la dimension physique de l'inverse d'un temps
- ξ est le **coefficient d'amortissement** du système et est sans dimension

Remarque

L'appellation « système d'ordre 2 » fait habituellement référence à un système d'ordre 2, de classe 0 et dont le numérateur est constant.

Quelques précisions supplémentaires

Un **système d'ordre 2** et de classe 0 pur a pour équation différentielle de comportement :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d} t^2}(t) + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{\mathrm{d} s}{\mathrm{d} t}(t) + s(t) = K e(t)$$

À savoir

Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

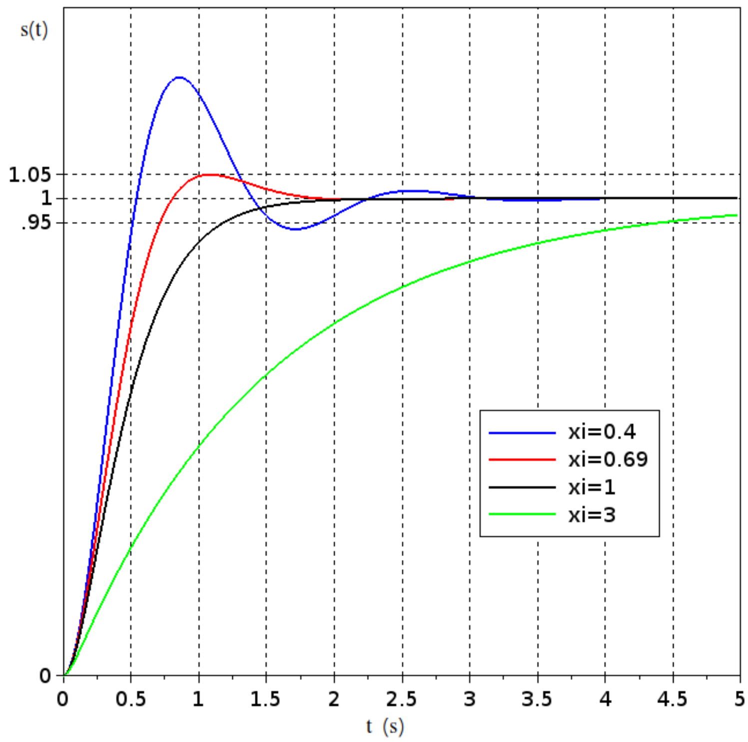


FIGURE *11 – Réponse de systèmes d'ordre 2 pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement. Le gain statique, la pulsation propre et l'amplitude de l'échelon d'entrée sont unitaires.*

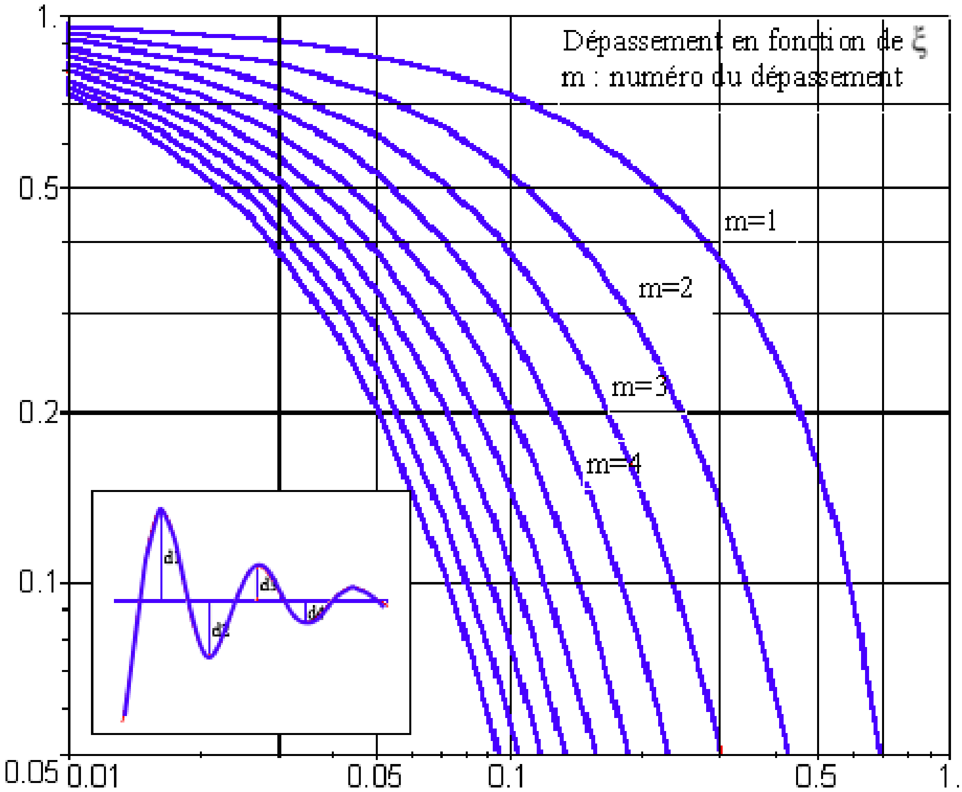


FIGURE *12 – Dépassement en fonction du coefficient d'amortissement* ξ.

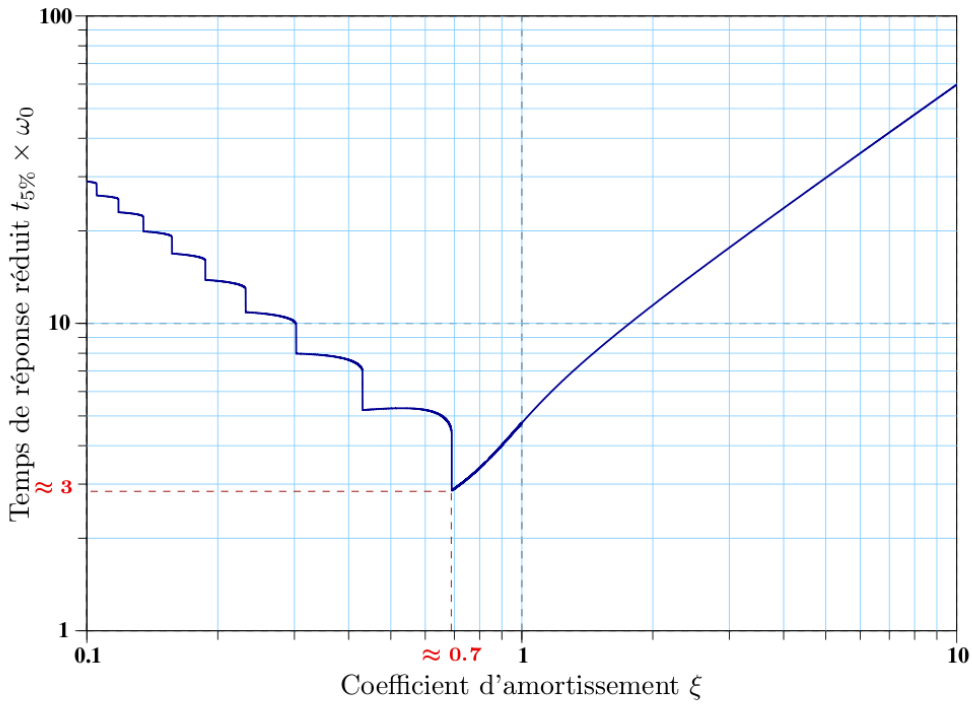


FIGURE 13 – *Temps de réponse réduit ($t_{r5\%,réduit} = t_{r5\%}\omega_0$)*

À savoir

Caractéristiques de la réponse indicielle d'un système d'ordre 2

Pour aller plus loin

Réponse à une rampe d'un système d'ordre 2

Pour aller bien plus loin ☕

Erreur de traînage d'un système d'ordre 2

3.9 Identification d'un système

La connaissance théorique du système étudié n'est pas toujours aisée. Dans ce cas, on cherche à modéliser le système à partir de son comportement.

Définition

Un **modèle de connaissance** est établi à partir des **équations** différentielles de comportement d'un système.

Un **modèle de comportement** est établi à partir du comportement **mesuré** du système.

Méthode à conaître

Afin d'établir un modèle de comportement on peut suivre la démarche suivante :

1) soumettre le système à une entrée en échelon
2) assimilier la réponse à celle d'un système connu, typiquement d'ordre 1 ou 2
   - à partir de la tangente à l'origine
   - à partir de la présence ou non d'un dépassement
3) déterminer les caractéristiques du modèle (gain statique, constante de temps ou pulsation propre et coefficient d'amortissement) à partir de valeurs pertinentes relevées

4 Modélisation des asservissements et prédiction des performances

4.1 Structure du système asservi et schémas-blocs

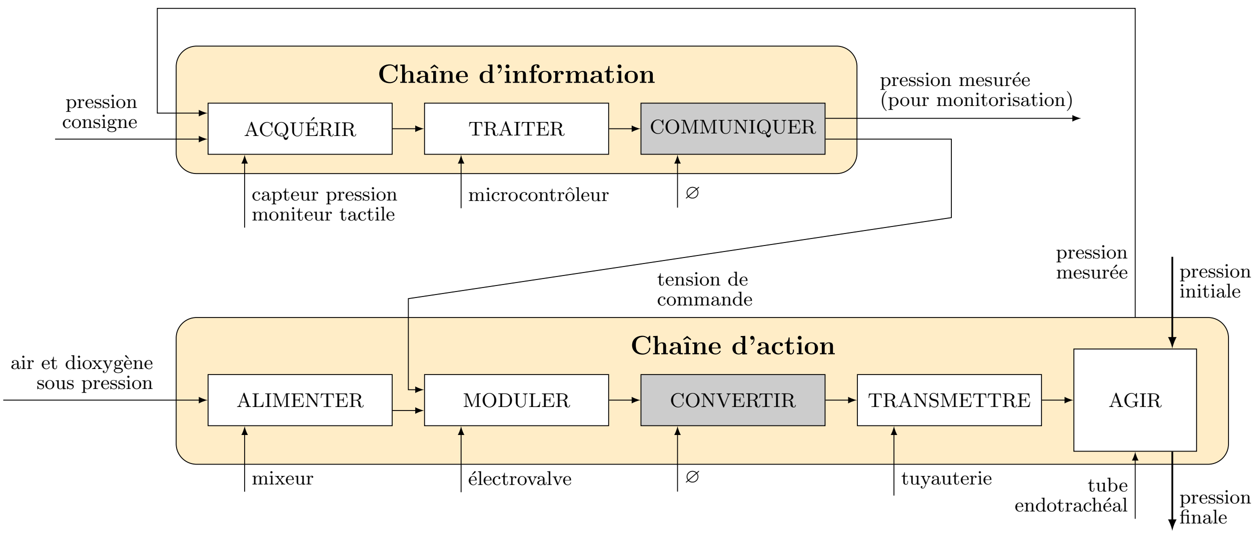


FIGURE 14 – *Chaîne fonctionnelle de l'asservissement en pression du respirateur.*

La structure de la chaîne fonctionnelle de l'asservissement en pression du respirateur peut être simplifiée pour ne conserver que les éléments essentiels à l'analyse des performaces de l'asservissement.

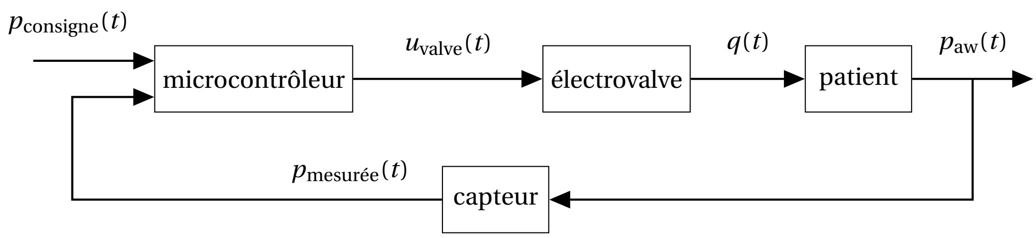


FIGURE 15 – *Schéma simplifié de l'asservissement en pression du respirateur.*

Cette structure met en relief l'existence d'une boucle traversant la chaîne d'information et une partie de la chaîne d'action.

Définition

Un **asservissement** a pour objectif de faire en sorte que la **grandeur asservie** soit égale à la **consigne**.

Un **asservissement** se caractérise par la présence d'un **retour d'état**, c'est-dire une connaissance par la chaîne d'information de l'état de la grandeur asservie et une adaptation de la commande en conséquence.

Le microcontrôleur calcule l'**écart** entre la consigne et la mesure de la grandeur asservie et détermine la **commande** et donc la puissance utilisée par la chaîne d'action.

Le rôle du microcontrôleur est de calculer l'écart entre la consigne et la mesure de la grandeur asservie et déterminer la tension d'alimentation de l'électrovalve qui déterminera son ouverture et donc le débit d'air entrant dans les poumons. On arrive ainsi à une représentation schématique composée de blocs et de sommateurs (ou comparateurs) appelée **schéma-blocs**.

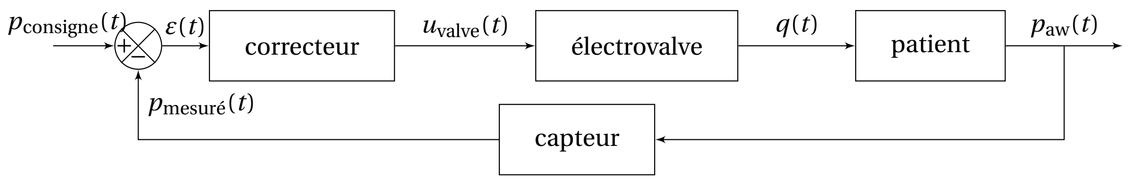


FIGURE 16 – *Schéma-blocs de l'asservissement en pression du respirateur avec le nom des composants.*

> **À savoir**
> Dans un **schéma-blocs** :
> - chaque **bloc** traduit le comportement d'un composant ou sous-système ayant **une seule entrée** et **une seule sortie**.
> - les **sommmateurs** (resp. **comparateurs**) permettent de calculer la **somme** (resp. **différence**) entre des **grandeurs**.

Le comportement des composants peut être modélisé par les fonctions de transfert suivantes :

- patient : $\dfrac{P_{\text{aw}}}{Q} = \dfrac{1+RCp}{Cp}$
- électrovalve : $\dfrac{Q}{U_{\text{valve}}} = \dfrac{K_{\text{valve}}}{1+\tau_{\text{valve}}p}$
- capteur : gain pur $K_{\text{capt}} = 1$

Le comportement du correcteur est un choix du concepteur de l'asservissement. Intéressons-nous au cas le plus simple des correcteurs linéaires, le **correcteur proportionnel**, pour lequel la commande est proportionnelle à l'écart.

- correcteur : $\dfrac{U_{\text{valve}}}{\varepsilon} = K_{\text{corr}}$

On arrive donc à l'écriture d'un schéma-blocs dans le domaine de Laplace avec les fonctions de transfert des composants.

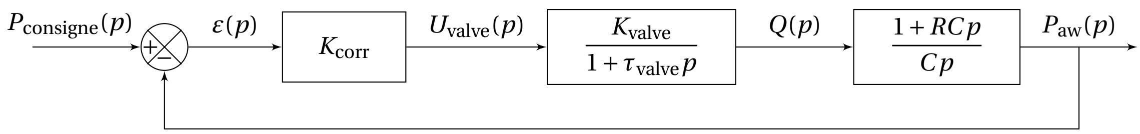


FIGURE 17 – *Schéma-blocs de l'asservissement en pression du respirateur avec le nom des composants.*

4.2 Fonction de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée

Un schéma-blocs peut se ramener à une forme standard qui en simplifie l'étude. Les méthodes de manipulation de schéma-blocs sont présentées plus tard.

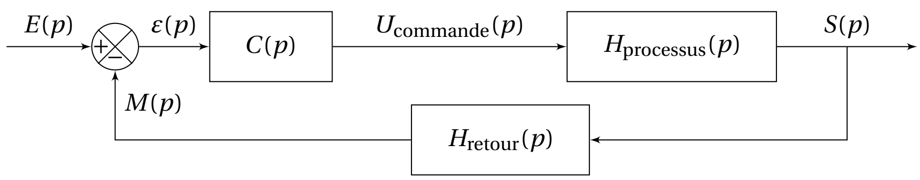


FIGURE 18 – *Schéma-blocs type.*

Celui-ci peut encore se simplifier en une simple boucle avec une chaîne directe et une chaîne de retour, de fonctions de tranfert respectives $FTCD(p)$ et $FTCR(p)$.

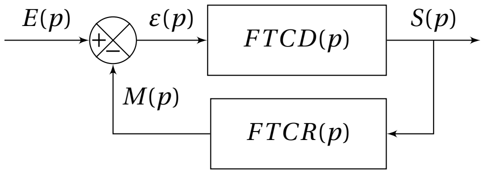


FIGURE 19 – *Schéma-blocs type.*

4.2.1 Fonction de transfert en boucle ouverte

Définition

La **fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO)** est le produit de la fonction de transfert de la chaîne directe avec la fonction de transfert de la chaîne de retour.

$$FTBO(p) = FTCD(p) \times FTCR(p)$$

Remarque

Cette fonction n'a pas d'intérêt direct pour connaître la réponse d'un système à une entrée donnée car $S(p) \neq FTBO(p)E(p)$. Elle permet cependant de caractériser la boucle d'asservissement et, de ce fait, son analyse va permettre de prévoir certaines performances du système. Nous étudierons ses propriétés plus tard dans l'année.

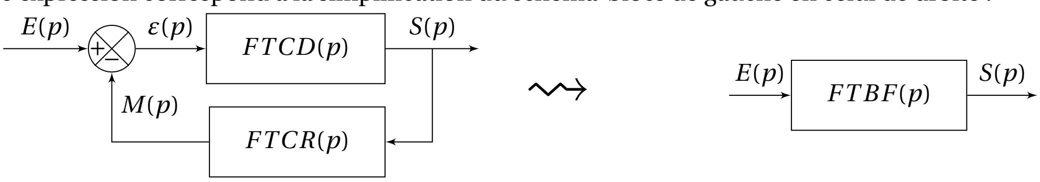
4.2.2 Fonction de transfert en boucle fermée

À savoir

La **fonction de transfert en boucle fermée (FTBF)** est le rapport entre la sortie et l'entrée :

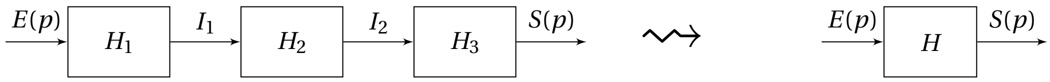
$$FTBF(p) =$$

Cette expression correspond à la simplification du schéma-blocs de gauche en celui de droite :

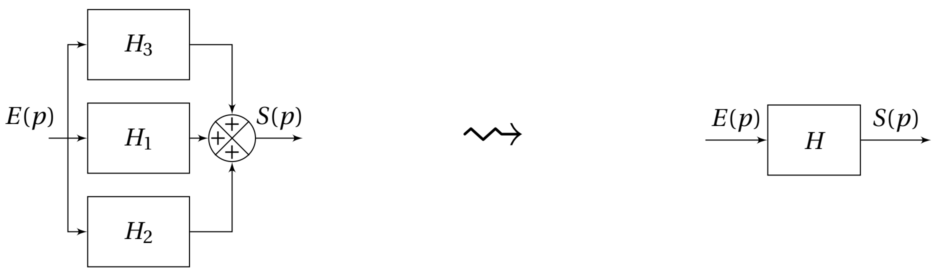


4.3 Manipulation de schéma-blocs

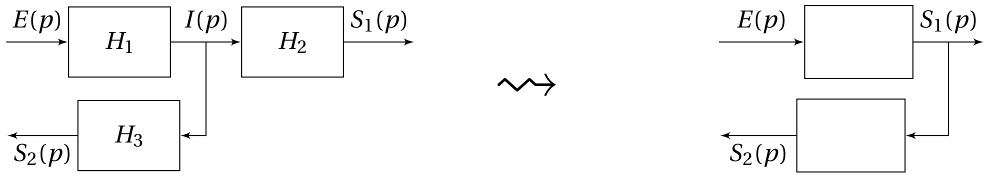
4.3.1 Blocs en série

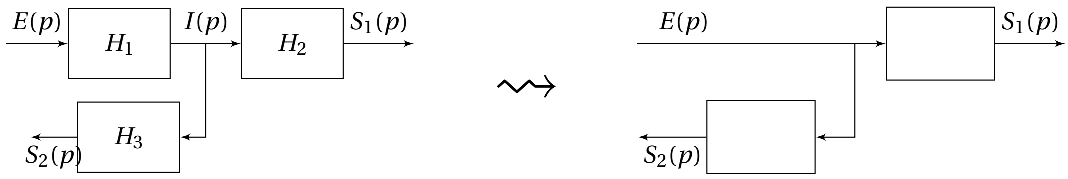


4.3.2 Blocs en parallèle

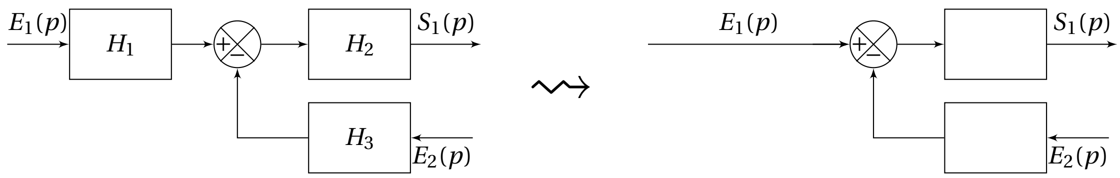


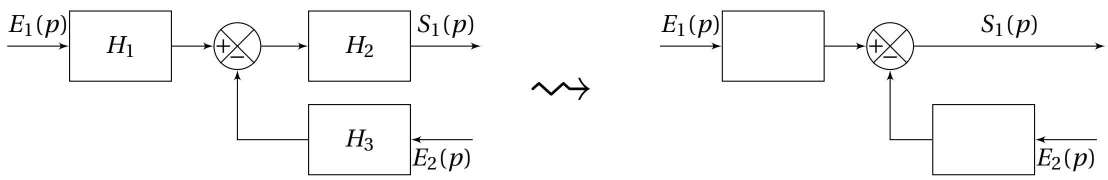
4.3.3 Déplacement de point de jonction





4.3.4 Déplacement de sommateur/comparateur





4.4 Principe de superposition

Nous avons vu comment connaître la fonction de transfert d'un système en boucle fermée et donc comment déterminer la sortie du système à une consigne donnée. Voyons comment prendre en compte les perturbations dans la détermination de la réponse du système.

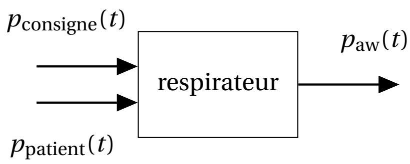


FIGURE 20 – *Représentation du respirateur avec perturbation.*

Cette « boîte noire » peut s'écrire par un modèle de connaissance que nous n'expliciterons pas, sous forme d'un nouveau schéma-blocs à deux entrées : la consigne $P_{\text{consigne}}(p)$ et la perturbation $P_{\text{patient}}(p)$.

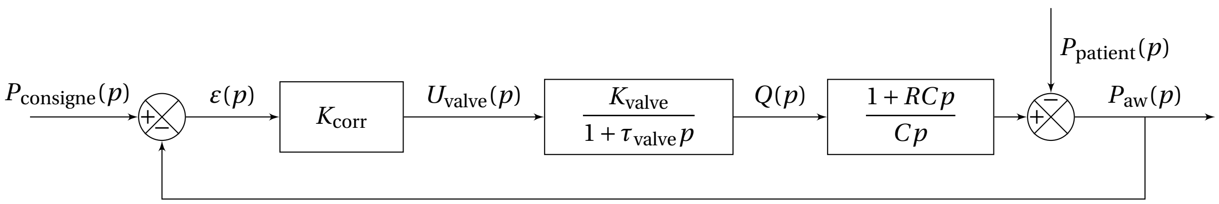
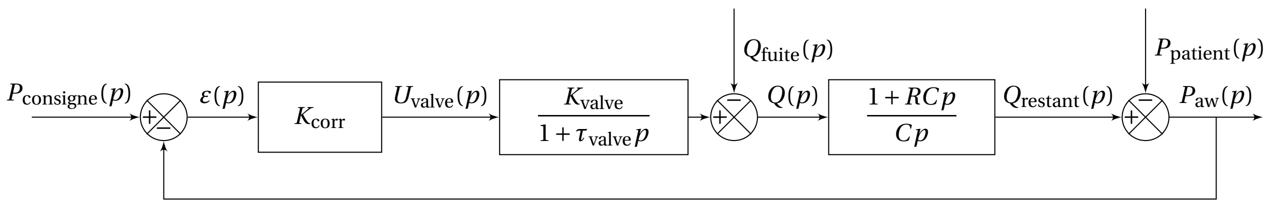


FIGURE 21 – *Schéma-blocs du respirateur avec perturbation.*

Remarque

Ici, la perturbation s'ajoute directement à la grandeur asservie. Dans d'autres cas, elle peut apparaître dans une autre position du schéma-blocs. Par exemple, une fuite de débit au niveau de la tuyauterie se représenterait :



La linéarité de chacun des composants et donc du système permet d'appliquer le principe de superpostion :

À savoir

La **réponse** d'un système à **plusieurs entrées** est la **somme** de la réponse du système à chacune des entrées en supposant toutes les **autres nulles**.
Si le systèmes comporte deux entrées $E_1(p)$ et $E_2(p)$ et une sortie $S(p)$, notons

- $FTBF_1(p)\big|_{E_2(p)=0}$ la fonction de transfert en boucle fermée correspondant à E_1 en supposant E_2 nul
- $FTBF_2(p)\big|_{E_1(p)=0}$ la fonction de transfert en boucle fermée correspondant à E_2 en supposant E_1 nul

alors

$$S(p) = FTBF_1(p)\big|_{E_2(p)=0} E_1(p) + FTBF_2(p)\big|_{E_1(p)=0} E_2(p)$$

Remarque

Cette relation est parfois aussi écrite :

$$S(p) = \left.\frac{S(p)}{E_1(p)}\right|_{E_2(p)=0} E_1(p) + \left.\frac{S(p)}{E_2(p)}\right|_{E_1(p)=0} E_2(p)$$

Ainsi, pour déterminer $P_{\text{aw}}(p)$ en fonction de $P_{\text{consigne}}(p)$ et de $P_{\text{perturbation}}(p)$, il suffit d'écrire deux problèmes :

- l'un en supposant $P_{\text{consigne}}(p)$ non nul et $P_{\text{patient}}(p)$ nul ;
- l'autre en supposant $P_{\text{consigne}}(p)$ nul et $P_{\text{patient}}(p)$ non nul.