CHAPITRE 1 : REPRÉSENTATION DES ENTIERS

I **REPRÉSENTATION DES ENTIERS NATURELS**

I.1 Codage de l'information par des booléens

La mémoire des ordinateurs est constituée de très nombreux circuits électroniques élémentaires pouvant se trouver, pour chacun d'eux, dans deux états : sous tension ou hors tension. Par simplicité, on a décidé d'appeler ces deux états 1 et 0. Une telle valeur est dite **booléenne**. On l'appellera, par la suite, **booléen**, **chiffre binaire** ou encore **bit** (binary digit).

L'état dans lequel se trouve un circuit élémentaire est donc représenté par le symbole 0 ou par le symbole 1. L'état d'un circuit composé de plusieurs de ces circuits élémentaires est alors représenté par une suite finie de 0 et de 1, que l'on appelle **mot**. Par exemple, le mot 100 décrit l'état d'un circuit composé de trois circuits élémentaires, respectivement dans l'état 1, 0 et 0.

I.2 Notion de "bases"

Depuis le Moyen-Âge, on écrit les nombres entiers naturels en notation décimale à position. Cela signifie que, pour écrire le nombre entier naturel n, on imagine n objets, que l'on groupe par paquets de dix, puis on groupe ces paquets de dix objets en paquets de dix paquets etc... À la fin, il reste entre zéro et neuf objets isolés, entre zéro et neuf paquets isolés de dix objets, entre zéro et neuf paquets isolés de cent objets etc... On représente alors cet entier naturel en écrivant de droite à gauche, le nombre d'objets isolés, le nombre de paquets de dix, le nombre de paquets de cent, le nombre de paquets de mille etc... Chacun de ces nombres étant compris entre zéro et neuf, seuls dix chiffres sont nécessaires : 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Notre notation s'appelle donc aussi notation décimale.

Exercice 1 :
Déterminer la représentation en base quatre de 57.

Exercice 2 :
Déterminer la représentation en base cinq de 999.

Exercice 3 :
Déterminer la représentation en base seize (dite **hexadécimale**) de 1235.

Dans la suite de ce cours, quand une suite de chiffres exprime un nombre dans une base autre que dix, on choisit d'indiquer la base en indice. Exemple : 20310_4

Exercice 4 :
Déterminer la représentation en base dix du nombre 20310_4.

Exercice 5 :
Déterminer la représentation en base dix du nombre $5af9_{16}$.

Exercice 6 :
Écrire l'algorithme permettant de déterminer la représentation en base b d'un entier naturel n.
Les valeurs de n et b seront fournies en entrée.
On se limitera au cas où b est compris entre deux et neuf.

I.3 Le binaire

La mémoire des ordinateurs étant constituée de circuits n'ayant que deux états possibles, les ordinateurs comptent donc naturellement en base deux.
On choisit une notation particulière pour les nombres binaires : $\underline{1101}$
On lit alors, de droite à gauche, 1 unité , 0 deuxaine, 1 quatraine et 1 huitaine. Ainsi $\underline{1101} = 13$.

Dans la mémoire des ordinateurs, les circuits mémoire élémentaires (dits circuits mémoire un bit) sont souvent groupés par huit : les **octets**. Et on utilise des nombres exprimés en notation binaire sur un, deux, quatre ou huit octets (donc sur 8, 16, 32 ou 64 bits).
Cela permet de représenter les nombres de 0 à $\underline{11111111} = 255$ sur un octet,
de 0 à $\underline{1111111111111111} = 65535$ sur deux octets,
de 0 à $\underline{11111111111111111111111111111111} = 4294967295$ sur quatre octets,
et de 0 à $\underline{1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111} = 18446744073709551615$ sur huit octets.

Exercice 7 :
Déterminer la représentation en base dix du nombre $\underline{10101011}$.

Exercice 8 :
Déterminer la représentation en binaire du nombre 10000.

Exercice 9 :
Déterminer la représentation en binaire des nombres 1, 3, 7, 15, 31, 63.
Expliquer ces résultats

Exercice 10 :
Montrer que les mots de n bits permettent de représenter tous les entiers de 0 à $2^n - 1$.
Inversement, combien faut-il de bits au minimum pour représenter tous les entiers dont l'écriture décimale comporte n chiffres ?

II REPRÉSENTATION DES ENTIERS RELATIFS

II.1 Notation en complément à deux

Il nous faut maintenant étendre aux entiers relatifs la représentation binaire des entiers naturels.

Une première possibilité serait de réserver un bit pour le signe de l'entier et d'utiliser les autres bits pour coder sa valeur absolue. Ainsi, avec des mots de 16 bits, on utiliserait 1 bit pour le signe et les 15 bits restants pour sa valeur absolue ; on pourrait alors représenter les entiers relatifs de $-\underline{111111111111111} = -(2^{15}-1) = -32767$ à $\underline{111111111111111} = (2^{15}-1) = 32767$.
Cette méthode présente cependant un certain nombre d'inconvénients, notamment la présence de deux zéros, l'un positif et l'autre négatif.

Une autre possibilité consiste à représenter un entier relatif par un entier naturel. Pour les mots de 16 bits, on représente un entier relatif p **positif ou nul** comme l'entier naturel p et un entier relatif p **strictement négatif** comme l'entier naturel $p+2^{16} = p+65536$, qui est compris entre 32768 et 65535.
On peut ainsi coder les entiers relatifs compris entre -32768 et 32767.

Cette manière de représenter les entiers relatifs s'appelle **la notation en complément à 2**.

L'entier relatif -1 est représenté comme l'entier naturel 65535, donc par le mot 1111 1111 1111 1111 (on ne le souligne pas ici car ce n'est pas ici exactement la représentation d'un nombre en base deux).

On remarque qu'il est alors facile de déterminer le signe d'un nombre représenté sous cette forme : un entier relatif positif ou nul est représenté par un entier naturel dont le premier bit vaut 0 ; un entier relatif strictement négatif est représenté par un entier naturel dont le premier bit vaut 1.

Plus généralement, avec des mots de n bits , on peut représenter les entiers relatifs compris entre -2^{n-1} et $2^{n-1}-1$: on représente un entier relatif p positif ou nul comme l'entier naturel p (compris entre 0 et $2^{n-1}-1$) et un entier p strictement négatif comme l'entier naturel $p+2^n$ (compris entre 2^{n-1} et 2^n-1).

II.2 Exercices

Exercice 11 :
Déterminer les représentations binaires sur 8 bits des entiers relatifs 0 et -128.

Exercice 12 :
Déterminer les représentations binaires sur 8 bits des entiers relatifs 127 et -127, puis de 101 et de -94.

Exercice 13 :
Quels entiers relatifs peut-on représenter avec des mots de 8 bits ? Combien sont-ils ?.
Mêmes questions avec les mots de 16 bits, 32 bits et 64 bits.

Exercice 14 :
Déterminer la représentation décimale des entiers relatifs dont les représentations binaires sur 8 bits sont 01010101 et 10101010.

Exercice 15 :
Représenter les entiers relatifs 99 et 57 en binaire sur 8 bits. Ajouter les deux nombres binaires obtenus.
Quel est l'entier relatif obtenu ? Pourquoi est-il négatif ?