

Statique des fluides

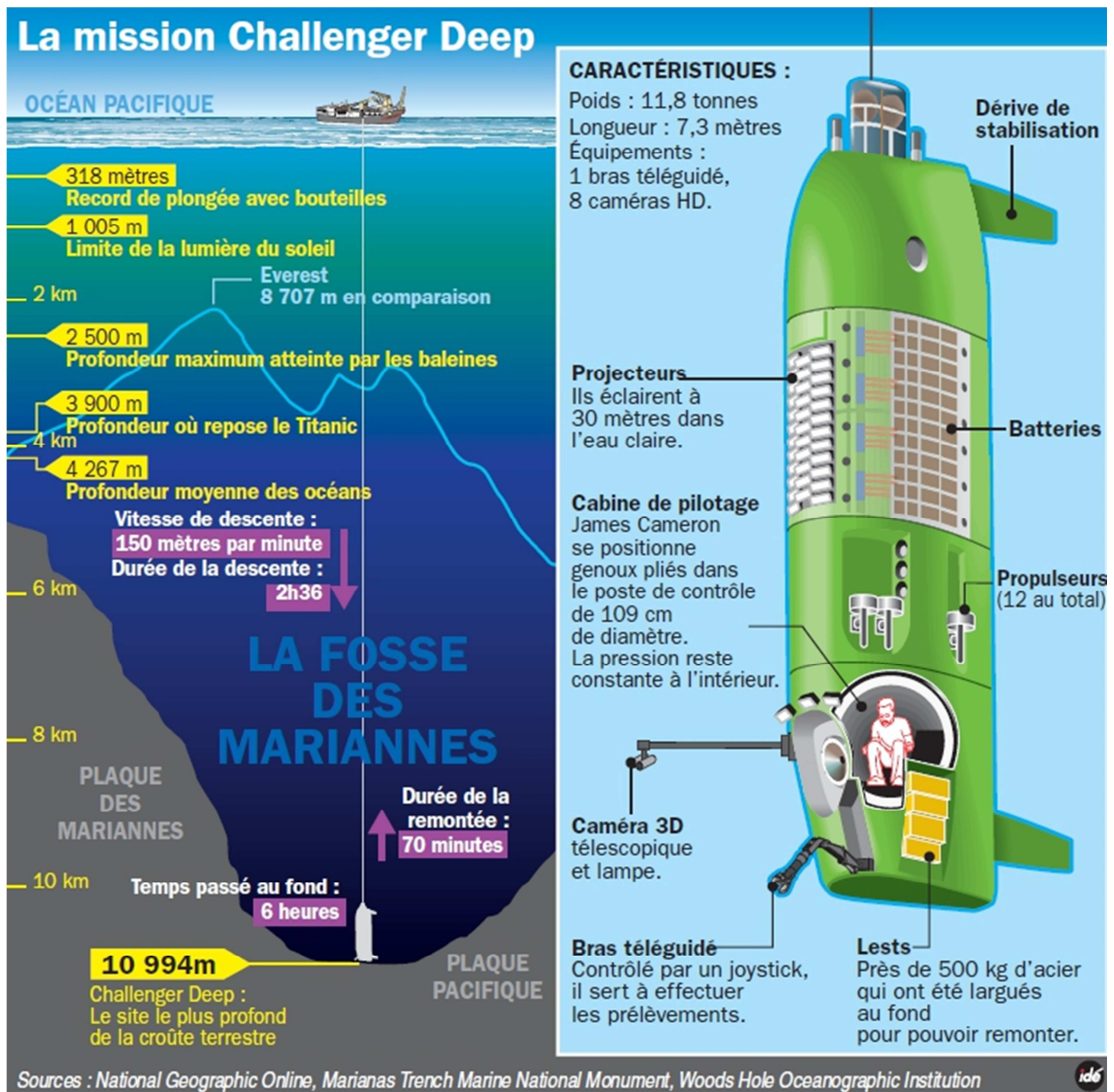
INTRO :

Pour son film « Deepsea Challenge », le cinéaste James Cameron a filmé au fond de la fosse des Mariannes.

A quelle pression doivent résister les caméras embarquées à ces profondeurs ?

La connaissance de la pression d'un fluide est nécessaire à la conception de nombreux engins.

Par exemple lors d'une expédition sous-marine, le matériel embarqué doit résister à la pression océanique.



Buts de ce chapitre : établir la relation fondamentale de la statique des fluides ; en déduire l'évolution de la pression avec l'altitude au sein d'un fluide incompressible ou compressible dans le cadre de l'atmosphère isotherme ; déterminer la résultante des forces pressantes exercées par un fluide.

Prérequis (PTSI) :

P.12 cinématique, P.13 dynamique newtonienne et P.19 système thermodynamique à l'équilibre.

A) Relation fondamentale de la statique des fluides

1) Rappel sur les fluides (cf PTSI Ch.P19)

Contrairement aux solides, les liquides et les gaz sont **déformables** (« ils n'ont pas de forme propre »).

L'état **FLUIDE** regroupe l'état **gazeux** et l'état **liquide**.

Un **liquide** est un fluide **condensé et quasi-incompressible** i.e. qu'il possède un volume propre.

Un **gaz** est un fluide dispersé, donc **peu dense**, et **compressible** i.e. qu'il tend à occuper tout l'espace qui lui est offert (il n'a pas de volume propre).

ODG dans les conditions usuelles $P = 1 \text{ bar}$ et $T = 25^\circ\text{C}$, cf PTSI TD 19.

	n^* (en m^{-3})	ρ (en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)
$\text{H}_2\text{O}_{(l)}$	10^{28}	10^3
Air :	10^{25}	1
Comparaison	$n_{\text{liquide}}^* \sim 10^3 n_{\text{gaz}}^*$	$\rho_{\text{liquide}} \sim 10^3 \rho_{\text{gaz}}$

2) Relation fondamentale de la statique des fluides

♦ Le **fluide étudié**, liquide ou gaz, est au **REPOS** (on dit aussi **en équilibre** → **statique**) dans le référentiel **terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen** associé au repère $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Le **CHAMP DE PESANTEUR** $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ est supposé **UNIFORME**.

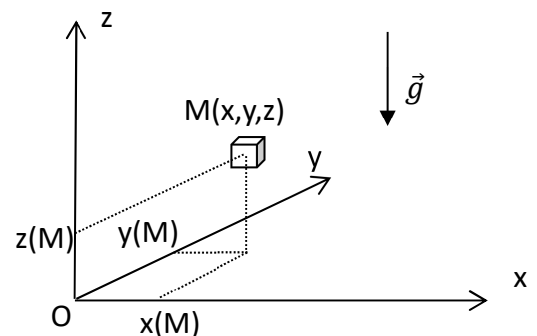
→ Rappel (PTSI Ch.P13) : $\vec{P} = \vec{F}_{\text{grav, Terre} \rightarrow M}$

$$\Leftrightarrow g = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + z)^2}$$

$$\Leftrightarrow g \approx G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = \text{cste} \quad \text{si } z \ll R_T = 6400 \text{ km}$$

♦ **Localement**, on considère une « **particule de fluide** » cubique centrée en $M(x,y,z)$ (centre d'inertie du cube) de volume **mésoscopique*** noté $d\tau = dx dy dz$.

* Rappel : volume **MESOSCOPIQUE** : petit à l'échelle macroscopique mais grand à l'échelle microscopique.



♦ Pour décrire l'état du fluide, on introduit les grandeurs intensives définies en tout point M (grandeurs locales) : la pression $P(M)$, la température $T(M)$, la masse volumique $\rho(M)$...

La relation fondamentale de la statique des fluides correspond à l'équation différentielle vérifiée par la fonction $P(M) = P(x,y,z)$.

♦ Etude de l'équilibre du système = {de la **particule de fluide centrée en M**}Bilan des forces extérieures :

- **Force de pesanteur** i.e. **poids** de la particule de fluide (force volumique s'applique sur un volume) qui vérifie $dm \cdot \vec{g} = \rho(M)d\tau\vec{g} = -\rho(M)d\tau g\vec{e}_z$
- **Force pressante** (force surfacique s'applique sur une surface) exercée par le reste du fluide sur la surface délimitant la particule de fluide (6 faces du cube) notée :

$$d\vec{F}_p = dF_{px}\vec{e}_x + dF_{py}\vec{e}_y + dF_{pz}\vec{e}_z$$

Expression des composantes de la force pressante (rappel cf PTSI Ch.P.19) :

→ Cas de la composante de la force pressante exercée selon $\vec{e}_x$: résultante des forces subies par les faces normales à l'axe (Ox) de surface $dS = dydz$.

$$dF_{px}\vec{e}_x = P\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right)dS\vec{e}_x + P\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right)dS(-\vec{e}_x)$$

→ Expression analogue des autres composantes.

Principe d'inertie (ou PFD avec $\vec{a}(M) = \vec{0}$) car système au repos :

→ Projection selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$: **la pression ne dépend que de la variable z** : $P(x, y, z) = P(z)$

→ Projection selon $\vec{e}_z$: **relation fondamentale de la statique des fluides (= RFSF)**

✍ Démonstration complète : sur feuille.

BILAN :

On obtient **la relation fondamentale de la statique des fluides avec Oz axe vertical ascendant** :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

Rq :

- Si on choisit **Oz descendant**, la relation précédente s'écrit :

$$\frac{dP}{dz} = +\rho g$$

Quel que soit le sens choisi pour la direction verticale, il faut que la RFSF rende compte de la diminution de la pression avec l'altitude !

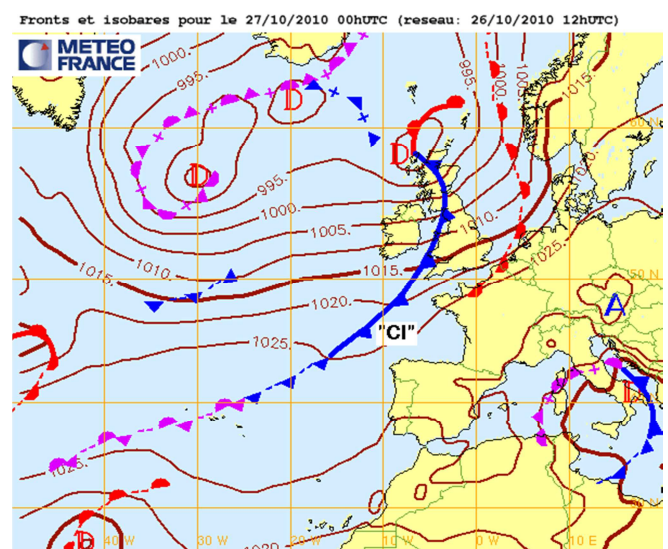
- La pression $P(M)$ et la masse volumique $\rho(M)$ sont des grandeurs locales susceptibles de varier au sein du fluide.

- On parle donc de champ de pression (champ scalaire : à tout point de l'espace on associe le scalaire P) comme on parle de champ de pesanteur / magnétique (champ vectoriel : à tout point de l'espace on associe le vecteur $\vec{g} / \vec{B}$).

Sur la carte météorologique ci-contre, on représente le champ de pression (exprimée en hectopascal : hPa).

On appelle équipotentielle, une ligne (ou une surface) sur laquelle le champ garde la même valeur. Une équipotentielle de pression est appelée une isobare.

→ *analogie avec les courbes équipotentielles électriques : courbes telles que $V(M) = cste$.*

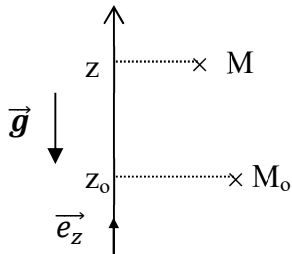


B) Fluide incompressible et homogène

Un fluide homogène et incompressible a une masse volumique uniforme (homogène) indépendante de la pression (incompressible) soit $\rho(M) = \text{cste}$.

On considèrera que les **liquides** sont des **fluides incompressibles**.

1) Evolution de la pression avec l'altitude



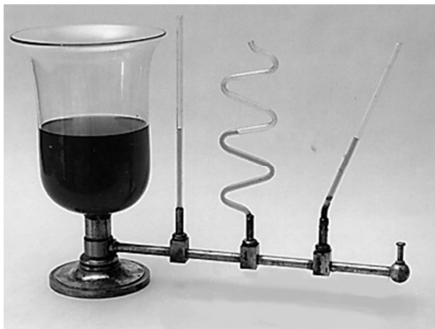
On intègre la relation fondamentale de la statique des fluides $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ avec ρ **constant** (fluide homogène et incompressible) et g **constant** (hypothèse de la RFSF : champ de pesanteur uniforme) entre les altitudes z et z_0 :

$$P(z) - P(z_0) = -\rho g(z - z_0)$$

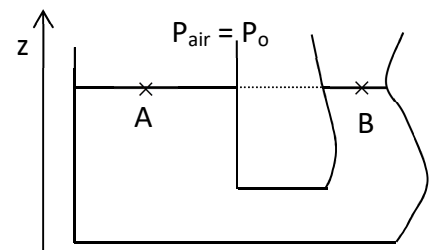
ODG : ➡ Evaluer la variation ΔP de la pression dans l'eau due à une variation $\Delta z = 10$ m d'altitude ?

BILAN : La pression diminue avec l'altitude ($\Leftrightarrow$ augmente avec la profondeur).
Sous l'eau, la pression augmente d'environ 1 bar tous les 10 m de profondeur.

2) Conséquence n°1 : Principe des vases communicants



« Modélisation »
→



Le liquide atteint le même niveau dans plusieurs récipients reliés entre eux. Cela prouve que la pression dépend seulement de la profondeur.

Interprétation :

A retenir (admis *) :

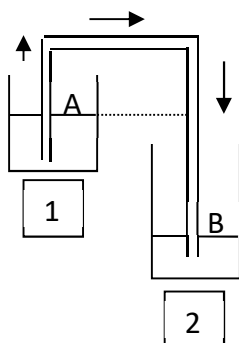
Il y a continuité de la pression à la traversée de la surface libre séparant deux fluides : $P_A = P_0 = P_B$

* Rq : on néglige ici les effets de tension superficielle qui se manifestent dans des tubes fins (capillarité).

Or, d'après la RFSF, la pression varie z . L'égalité des pressions à l'interface air/eau impose donc $z_A = z_B$.

BILAN : Les surfaces libres du liquide en équilibre sont dans le même plan horizontal.

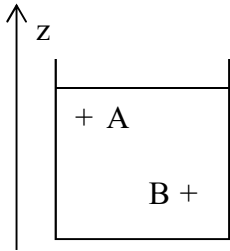
Ex : Siphon



Après une phase d'amorçage, le liquide passe du récipient 1 vers le récipient 2 de manière à ce que la dénivellation entre les deux surfaces libres du liquide s'annule, ce qui n'arrivera pas avant que le récipient 1 soit vide.

<http://phymain.unisciel.fr/le-siphon/>

3) Conséquence n°2 : Principe de Pascal



Ce principe se déduit directement de l'évolution de la pression au sein d'un fluide incompressible :

$$P_A - P_B = -\rho g(z_A - z_B)$$

Si la pression en A varie de ΔP , alors quel que soit B, la pression en B varie également de ΔP .

Principe de Pascal (1653) : Une pression extérieure sur un fluide dans un récipient fermé est transmise intégralement à toutes les parties du fluide et aux parois du récipient.

Ce principe a de nombreuses applications pratiques : presse, vérin, frein hydrauliques...

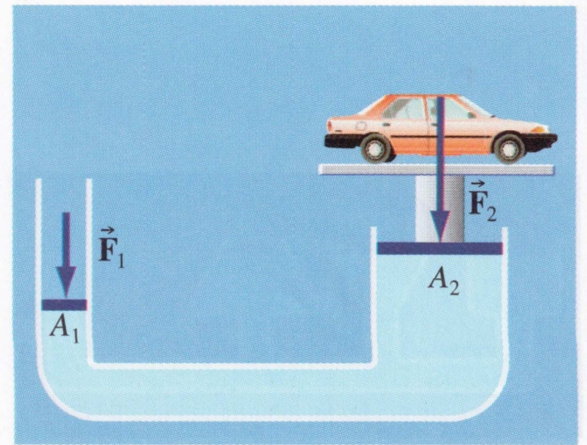


Figure 14.11 ▲

Le pont élévateur part du principe que la pression due à une force faible appliquée sur un tube étroit est égale à la pression causée par une force plus grande appliquée sur un tube plus large.

Pour l'expliquer : appliquer le principe d'inertie à la voiture et aux deux pistons.

4) Conséquence n°3 : Mesure de pression → manomètres

Principe : P dépend de z → on mesure une dénivellation entre 2 points A et B, connaissant la masse volumique du fluide entre A et B et la pression en A, on en déduit la pression en B.

♦ Mesure absolue de pression (Manomètres barométriques)

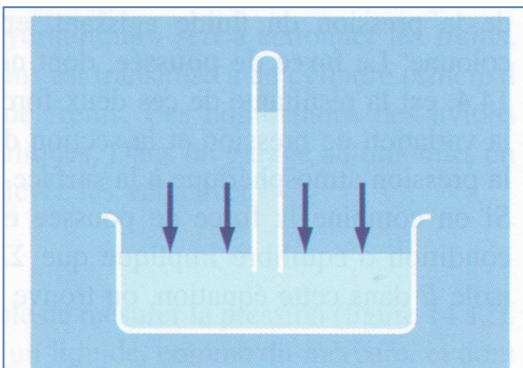
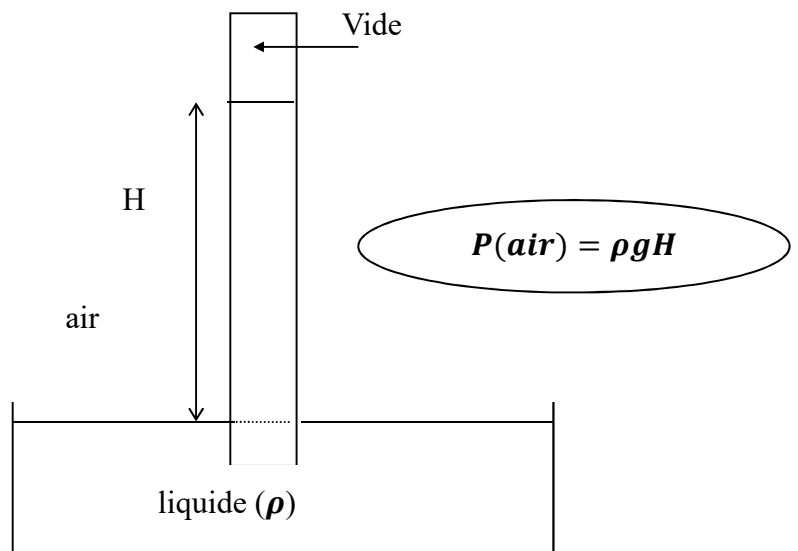


Figure 14.6 ▲

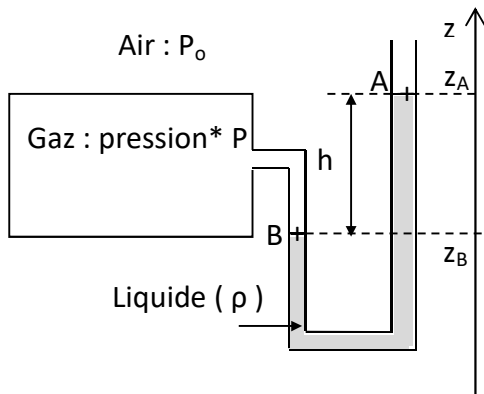
On peut mettre en évidence la pression exercée par l'atmosphère en renversant un tube de liquide, comme du mercure, dans une cuvette contenant le même liquide. La colonne de liquide est supportée par la pression régnant à la base. À la pression atmosphérique normale, la colonne de mercure a une hauteur de 76 cm.



L'expérience a été réalisée pour la 1^e fois par Torricelli en 1643.

Le liquide utilisé était du mercure Hg ($\rho_{\text{Hg}} = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$).

- ➡ Montrer que la colonne de mercure a une hauteur de 76 cm si $P(\text{air}) = 1 \text{ atm} = 1,013 \text{ bar}$?
- ➡ On exprime parfois la pression en cm de Hg. Donner la conversion cm de Hg ↔ Pa.
- ➡ Quelle serait la hauteur de la colonne de liquide en remplaçant le mercure par l'eau ?

♦ Mesure **relative** de pression (Manomètres à air libre)

➡ Montrer que la mesure de $h = z_A - z_B \geq 0$ permet de déterminer la pression P du gaz dans le récipient de gauche.

On parle de surpression si $h > 0$ ($P > P_0$)

On parle de dépression si $h < 0$ ($P < P_0$)

* Au § C, on verra que la pression au sein d'un gaz varie peu avec $z \Rightarrow P$ uniforme dans tout le récipient.

➡ Dans le cas où les pressions sont du même ordre de grandeur, vaut-il mieux prendre un liquide de masse volumique élevée ou faible ?

C) Fluide compressible : cas de l'atmosphère isotherme

Dans le cas de l'eau, une variation d'altitude de 10 m induit une variation de pression d'environ 1 bar.

Dans le cas de l'air, la variation de pression avec l'altitude est moindre. On ne peut pas modéliser les gaz, tel que l'air, par un fluide incompressible. Dans ce paragraphe, on développe une **modélisation pour traiter le cas des fluides compressibles** : $\rho(M) \neq \text{cste}$.

1) Modèle utilisé pour l'atmosphère

♦ **Atmosphère ISOTHERME** : La température T est supposée uniforme $T = T_0 = \text{cste}$

♦ **Modèle du GAZ PARFAIT** : l'air (constitué d'environ 80% de N_2 et 20% de O_2) est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M_a = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Sa masse volumique s'exprime donc par : $\rho(M) = \frac{M_a P(M)}{RT}$ (E)

✎ Démonstration complète : sur feuille.

♦ **CHAMP DE PESANTEUR UNIFORME** (hypothèse de la RFSF) : g constant

2) Evolution de la pression (et de la masse volumique) avec l'altitude

♦ On choisit **Oz vertical ascendant**, d'après la RFSF, on a : $\frac{dP}{dz} = -\rho g$

♦ On remplace ρ avec (E) : $\frac{dP}{dz} = -\frac{M_a g}{RT_0} P$ où $\frac{M_a g}{RT_0} = \text{constante}$ d'après le modèle adopté

♦ Par analyse dimensionnelle, on introduit une grandeur homogène à une distance notée H : $H = \frac{RT_0}{M_a g}$

On l'appelle **hauteur caractéristique de l'atmosphère isotherme**.

♦ On réécrit l'équation sous la forme :

$$\frac{dP}{dz} + \frac{P}{H} = 0$$

Sachant qu'à l'altitude $z = 0$ (au niveau du sol), on a $P(z = 0) = P_0$ supposée connue, on obtient :

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{z}{H}}$$

✎ Qualifier l'équation différentielle et démontrer l'expression de $P(z)$ ci-dessus : sur feuille.

Rq :

- Avec (E) (qui découle de l'équation d'état des GP), on obtient pour la masse volumique :

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-\frac{z}{H}} \text{ avec } \rho_0 = \frac{M_a P_0}{RT_0}.$$
- Analogie avec la décharge du circuit RC : $\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = 0 \Rightarrow u_c(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$ (cf PTSI Ch.P4).

BILAN : La pression et la masse volumique de l'atmosphère isotherme décroissent de manière exponentielle avec l'altitude.

3) Hauteur caractéristique H

On a obtenu : $P(z) = P_0 e^{-\frac{z}{H}}$ avec $H = \frac{RT_0}{M_a g}$

☞ Tracer la courbe représentative de la fonction $P(z)$.

ODG : ☞ Evaluer la hauteur caractéristique H pour $T_0 = 20^\circ\text{C}$.

On considère la pression uniforme si sa variation relative est inférieure à 1% : $\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{P_0 - P(z)}{P_0} < 0,01$.

☞ Evaluer z tel que $\frac{P_0 - P(z)}{P_0} < 0,01$.

BILAN :

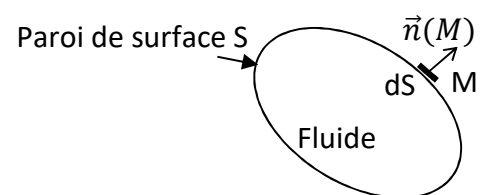
- ♦ Pour des dénivellations Δz petites devant H, la pression et la masse volumique d'un gaz sont uniformes à température constante.
- ♦ ODG : Pour $T_0 \approx 20^\circ\text{C}$, $H \approx 10 \text{ km}$
- ♦ Comparaison : pour une même dénivellation Δz , la variation de pression ΔP induite est beaucoup plus élevée dans un liquide que dans un gaz !

D) Expressions de la résultante des forces pressantes

1) Calcul direct des forces pressantes

La pression est une grandeur scalaire.

La FORCE PRESSANTE est une grandeur vectorielle normale en chaque point à la surface sur laquelle elle s'applique.



- ♦ Force élémentaire exercée par le fluide sur l'élément de paroi dS : $\vec{dF}_p = P(M) \vec{n}(M) dS$
avec $\vec{n}(M)$ vecteur unitaire normal à dS , orienté du fluide vers l'extérieur.
- ♦ Force résultante exercée par le fluide sur la paroi S : $\vec{F}_p = \iint_S \vec{dF}_p = \iint_S (P(M) \vec{n}(M) dS)$

Méthode pour calculer la résultante d'une force pressante :

- Etudier les **invariances** du problème pour choisir un **système de coordonnées adapté** et la base de vecteurs associée **pour exprimer dS et $\vec{n}(M)$** ;
- Etudier les **symétries** du problème pour déterminer la **direction $\vec{u}$ de la force résultante** : projeter la force élémentaire sur $\vec{u}$ pour se ramener au calcul d'une intégrale scalaire.

Application : cf TD.

2) Théorème d'Archimède (rappel cf PTSI Ch.P13)

A l'exception de géométries simples, le calcul des forces pressantes est souvent complexe. Le théorème d'Archimède simplifie le calcul dans le cas particulier précisé ci-dessous.

Théorème d'Archimède :

Pour un corps (C) totalement immergé dans un ou plusieurs fluides au repos dans le référentiel terrestre, la résultante des forces pressantes, appelée poussée d'Archimède, exercée sur (C) est égale à l'opposé du poids du (ou des) fluide(s) déplacé(s) :

$$\vec{\Pi}_A = -m_{\text{fluide(s) déplacé(s)}} \cdot \vec{g}$$

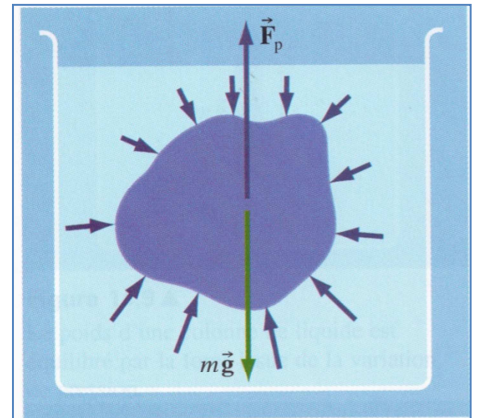


Figure 14.13 ▲

Selon le principe d'Archimède, la force de poussée $\vec{F}_p$ agissant sur un corps est égale au poids du fluide déplacé.

Ex :

❖ Ballon ascensionnel

Système {ballon de masse m (enveloppe, gaz, nacelle)} étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen

PFD : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{\Pi}_A = (m - m_{\text{air}})\vec{g}$
où m_{air} est la masse d'air déplacée par le ballon.

Projection suivant la verticale ascendante :

$$ma_z = (m_{\text{air}} - m)g$$

L'ascension a lieu ssi

$$a_z > 0 \Leftrightarrow m < m_{\text{air}} \Leftrightarrow \rho_{\text{gaz}} < \rho_{\text{air}}$$

CCL : Pour qu'il monte, on doit donc remplir le ballon avec un gaz moins dense que l'air atmosphérique.

Ex : Ballon-sonde (hélium), Montgolfière (air chaud).



❖ Iceberg (rappel cf PTSI TD13)

Soit un iceberg de volume total V homogène. Quelle proportion volumique de l'iceberg est émergée ?

On note :

- V_i son volume immergé et V_e son volume émergé ;
- ρ_l la masse volumique de l'eau liquide salée : $\rho_l = 1,02 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- ρ_g la masse volumique de l'eau solide (glace) : $\rho_g = 0,92 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- ρ_a la masse volumique de l'air : $\rho_a = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Système = {iceberg} étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces extérieures :

- son poids : $m\vec{g} = \rho_g(V_i + V_e)\vec{g}$
- la poussée d'Archimède due à l'eau et à l'air : $\vec{\Pi}_A = -\rho_l V_i \vec{g} - \rho_a V_e \vec{g}$

Principe d'inertie (ou PFD avec $\vec{a} = \vec{0}$) appliqué au système en équilibre :

$$\vec{0} = \rho_g(V_i + V_e)\vec{g} - \rho_l V_i \vec{g} - \rho_a V_e \vec{g}$$

ODG : Comme $\rho_g \gg \rho_a$ alors $\|\rho_g V_e \vec{g}\| \gg \|\rho_a V_e \vec{g}\|$ et on néglige la poussée d'Archimède due à l'air.

Projection selon la verticale : $\rho_g V = \rho_l V_i$ d'où $\frac{V_i}{V} = \frac{\rho_g}{\rho_l} \approx 90 \%$

CCL : Le volume émergé de l'iceberg représente seulement 10% du volume total de l'iceberg!

