Outils mathématiques :
Résolution d'équations différentielles – Partie I

Extraits du programme :

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
Equations différentielles linéaires à coefficients constants. Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants : y' + ay = f(x).	Identifier l'ordre. Mettre l'équation sous forme canonique. Trouver la solution générale de l'équation sans second membre (équation homogène). Trouver l'expression des solutions lorsque f(x) est constante.
Autres équations différentielles d'ordre 1 ou 2.	Séparer les variables d'une équation du premier ordre à variables séparables.

INTRO :

Une équation différentielle est une équation mettant en jeu une fonction y de variable t et ses dérivées d'ordre k par rapport à t. L'ordre n d'une telle équation correspond à l'ordre maximal de dérivation de y qui intervient dans l'équation.

L'évolution temporelle d'un système physique ou chimique est très souvent régie par une équation différentielle. Les équations différentielles interviendront donc très régulièrement dans le cours de physique-chimie : en électricité (évolution d'une tension lors du régime transitoire), en mécanique (évolution de la position d'un mobile), en thermodynamique (évolution de la température), en chimie (évolution de la concentration d'une espèce au cours d'une réaction)… La variable sera très souvent le temps t.

Ici, on va s'intéresser à la résolution d'équations différentielles qui seront toutes :

- du **1er ordre**,
- à **coefficients constants**.

Certaines seront **homogènes** i.e. auront un **2nd membre nul** et d'autres auront un **2nd membre non nul**.

Certaines seront **linéaires** et d'autres **non linéaires**.

Buts de ce chapitre : présenter les méthodes permettant de résoudre une équation différentielle du 1er ordre à coefficients constants MAIS CE CHAPITRE N'EST PAS UN COURS DE MATHS SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES, il s'agit seulement d'UN BILAN DES RESULTATS UTILES POUR LA PHYSIQUE-CHIMIE.

Les méthodes présentées dans ce chapitre seront employées fréquemment, notamment dans les Ch.P4 et Ch.C2 : il faut donc connaître et savoir appliquer ces méthodes !

I/ Equations différentielles du 1er ordre, à coefficients constants, LINEAIRES

1°/ Position du problème

Une équation différentielle du 1er ordre, à coefficients constants et linéaire se présente sous la forme :

$$a \cdot \frac{dy}{dt} + b \cdot y(t) = c(t) \qquad (E)$$

Avec : y la **fonction inconnue de variable t** ;

a ($\neq 0$) et b les **coefficients** de l'équation : constants dans toutes les situations traitées i.e. qu'ils ne dépendent pas de la variable t ;

$c(t)$ le **2nd membre** de l'équation.

Rq :

En physique, $\frac{dy}{dt}$, la dérivée 1e d'une grandeur y par rapport à la variable temps t, se note : $\dot{y}$. L'équation (E) s'écrira donc aussi :

$$a \cdot \dot{y} + b \cdot y(t) = c(t) \qquad (E)$$

2°/ Forme générale de la solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$

La solution de (E) s'écrit sous la forme :

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t)}$$

Avec :
- ◆ $y(t)$ la solution générale de (E)
- ◆ $y_h(t)$ la solution **homogène i.e. la solution de l'équation $(\boldsymbol{E_0})$ sans 2nd membre** :

$$a \cdot \frac{dy}{dt} + b \cdot y(t) = 0 \qquad (E_0)$$

- ◆ $y_p(t)$ la solution **particulière** de (E) qui est de la **même forme que le 2nd membre** $c(t)$ de (E).

Etant donné que a et b sont des coefficients constants, la solution homogène s'exprime ainsi :

$$\boxed{y_h(t) = K \cdot \exp\left(-\frac{b}{a} \cdot t\right)}$$

Avec K une constante.

➲ Vérifier que cette expression de $y_h(t)$ est bien solution de (E_0).

Finalement, on a :

$$y(t) = K \cdot \exp\left(-\frac{b}{a} \cdot t\right) + y_p(t)$$

On cherche **$\boldsymbol{y_p(t)}$ <u>de la même forme que le 2nd membre</u>** de (E), cf méthode avec l'équation (E_2) du § I.4.
On détermine la **<u>constante K avec les conditions initiales (CI)</u>** (on connaît par ex. $y(t=0) = y_0$).
On détermine la constante K <u>APRES</u> avoir trouvé la solution particulière !

3°/ Forme canonique de l'équation $(\boldsymbol{E})$

On appelle **forme <u>canonique</u>** d'une équation différentielle l'écriture de l'équation telle que le **<u>coefficient de la dérivée d'ordre maximal est égal à 1</u>**.
La forme canonique de l'équation (E) s'obtient donc en divisant les deux membres par a (rappel : a $\neq 0$) :

$$\frac{dy}{dt} + \frac{b}{a} \cdot y(t) = \frac{c(t)}{a} \qquad (E')$$

On peut poser $A = 1$; $B = \frac{b}{a}$ et $C(t) = \frac{c(t)}{a}$.

Il est évident que la solution de (E') est la même que celle de (E).

4°/ Mise en œuvre – Méthode de détermination de la solution particulière

➲ Résoudre les équations suivantes :

◆ Equation sans second membre : (E_1) $\qquad 2\dot{y} + 5y(t) = 0$ On donne $y(t=0) = 4$	◆ Equation avec second membre constant : → **Méthode de détermination de la <u>solution particulière</u>** (E_2) $\qquad \frac{du}{dt} + \lambda \cdot u(t) = 10$ On donne $u(t=0) = 0$

<u>NB</u> : Il faut savoir appliquer la méthode à des équations similaires, cf Ch.P4 et Ch.C2.

II/ Equations différentielles du 1er ordre, à coefficients constants, homogènes, NON LINEAIRES

1°/ Position du problème

On rencontrera essentiellement ce type d'équation au Ch.C2.

Les équations du 1er ordre non linéaires font intervenir des termes « non linéaires » par ex. :

$\left(\frac{dy}{dt}\right)^n$ ou $\left(y(t)\right)^n$ avec n > 1 ou $\left(y(t)\cdot\frac{dy}{dt}\right)$ ou e^y …

Dans le § suivant, on décrit une méthode qui permet de déterminer la solution de certaines **équations <u>homogènes</u> non linéaires**.

Cette **<u>méthode est nommée « séparation des variables »</u>** : il s'agit de « transformer » l'équation de sorte que d'un côté de l'égalité n'apparaisse que la variable t et que de l'autre côté, n'apparaisse que la « variable » y.

2°/ Méthode de la séparation des variables (sur un exemple)

On cherche la solution de l'équation non linéaire homogène suivante (rappel : équation homogène = équation sans second membre) :

$$\frac{dc}{dt} = \lambda \cdot c(t)^2 \qquad (E)$$

On donne $c(t=0) = c_0$

<u>NB</u> : Il faut savoir appliquer la méthode à des équations similaires, cf Ch.C2.

<u>Rq</u> : Il est possible de déterminer la solution de l'équation (E_1) du § I.4 par la méthode de la séparation des variables.