Programme de colles de mathématiques
ATS Algoud-Laffemas

Semaine 17 : du 10 février au 13 février

Contenus : intégration sur un segment

a) Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Intégrale d'une fonction f continue sur un segment $[a,b]$.	Interpréter géométriquement l'intégrale d'une fonction positive (aire sous la courbe). Modéliser une situation physique par une intégration. La construction est hors programme. Notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. ⇆ *Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur* §3.
Valeur moyenne. Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.	
Inégalité $\left\lvert\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\rvert \leqslant \int_a^b \lvert f(t)\rvert\,\mathrm{d}t$.	Majorer et minorer une intégrale.
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$.
Une fonction continue et positive sur $[a,b]$ (où $a<b$) est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.	
	⇆ I Approximer une intégrale par la méthode des rectangles ou la méthode des trapèzes.

b) Calcul intégral

Si f est une fonction continue sur I et si x_0 est un point de cet intervalle, alors $x \longmapsto \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en x_0. En particulier, toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.	Appliquer ce théorème sur des exemples. Deux primitives d'une fonction continue sur l'intervalle I diffèrent d'une constante.
Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive. Pour f de classe $\mathscr{C}^1$: $\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b)-f(a)$.	
Intégration par parties. Changement de variable : si φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et si f est continue sur $\varphi(I)$, alors, pour tous a et b dans I, $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.	Appliquer ces techniques au calcul de primitives. Tout excès de technicité est exclu.
Primitives des fonctions usuelles.	Savoir reconnaître des primitives usuelles.

Questions de cours et/ou savoir-faire : une QC et un SF parmi

QC :

1. Existence et « unicité » : Toute fonction continue sur un **intervalle** admet des primitives et deux primitives diffèrent d'une constante.

2. Relation de Chasles sur les intégrales et positivité de l'intégrale (= f positive sur [a,b] implique l'intégrale de f entre a et b est positive).

3. Déf valeur moyenne et linéarité de l'intégrale.

SF :

a) Calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{t+i} dt$ où i désigne le complexe habituel.

b) Calculer : $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$ (D.E.S)

c) Calculer (changement var. + IPP) : $\int_1^2 e^{\sqrt{t}} dt$