

■ Formulaire : chapitres MK1 à MK6, THM1 à THM7, MFL1, MFL2

1. ❤️❤️ Enoncer le 1^{er} principe industriel en définissant soigneusement les différentes termes (donner les 2 formes : massique et puissances) ; compléter le tableau ci-dessous.

$$(h_s - h_e) = w_i + q \quad (\text{J/kg})$$

$$D_m [(h_s - h_e)] = P_i + P_{th} \quad (\text{J/s})$$

Avec h_e et h_s enthalpies en entrée et en sortie de l'organe considéré, w_i travail massique indiqué (autre que le travail des forces de pression) et q quantité de chaleur massique reçus par le système entre l'entrée et la sortie de l'organe ;

D_m débit massique de fluide, P_i puissance mécanique indiquée (autre que le travail des forces de pression) et P_{th} puissance thermique reçus par le système entre l'entrée et la sortie de l'organe

Organe	rôle	Echanges d'énergie
Compresseur	augmenter la pression d'un gaz	$w_i > 0 ; q = 0$
Vanne de détente (détendeur)	diminuer la pression d'un fluide	$w_i = 0 ; q = 0$
Turbine	mise en mouvement par le fluide	$w_i < 0 ; q = 0$
Echangeur thermique, chaudière, etc.	Faire varier la température du fluide ou faire un changement d'état	$w_i = 0 ; q \neq 0$

2. ❤️❤️ Le diagramme ci-dessous représente le cycle de fonctionnement d'une machine frigorifique réelle. Indiquer les positions de l'évaporateur et du condenseur, puis déterminer l'efficacité réelle de cette machine ainsi que l'efficacité de Carnot d'une machine frigorifique réversible fonctionnant entre les mêmes températures :

$$T_c = 25^\circ\text{C} \text{ et } T_F = -10^\circ\text{C}.$$

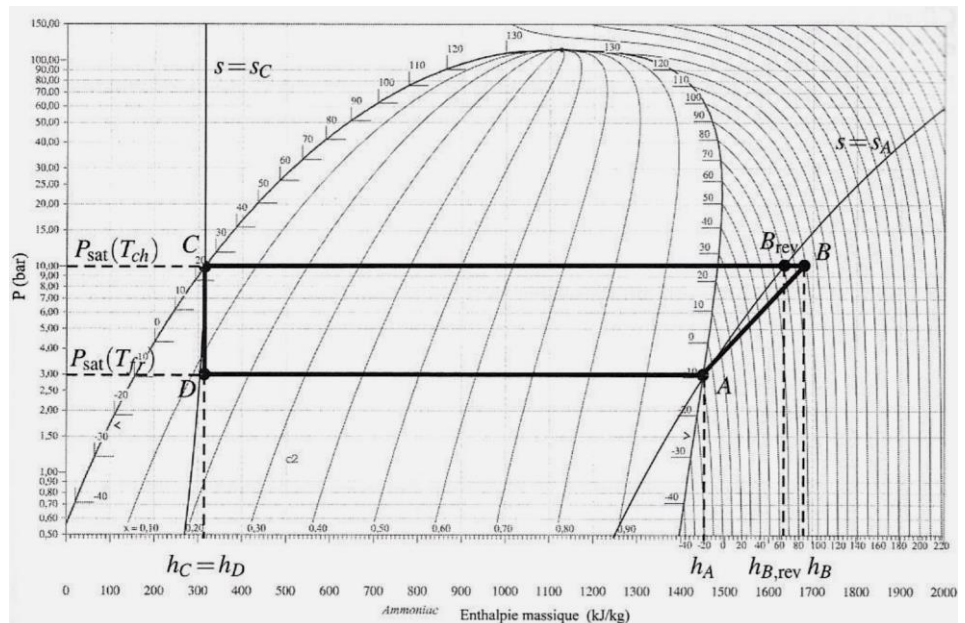


Figure 25.13 – Cycle d'une machine frigorifique : $T_{ch} = 298 \text{ K}$, $T_{fr} = 263 \text{ K}$.

Machines thermiques avec fonctionnement récepteur : $q_{fr} > 0$, évaporateur, étape DA ; $q_c < 0$, condenseur, étape BC ;

$$e_{frigo} = \frac{\text{grandeur utile}}{\text{grandeur de coût}} = \frac{q_{fr}}{w_u} = \frac{q_{\text{évaporateur}}}{w_{u,\text{compresseur}}} = \frac{q_{DA}}{w_{u,AB}}$$

En appliquant le premier principe industriel aux transformations DA et AB :

$$e_{frigo} = \frac{\Delta h_{\text{évaporateur}}}{w_{\text{compresseur}}} = \frac{\Delta h_{DA}}{\Delta h_{AB}} = \frac{h_A - h_D}{h_B - h_A}$$

$$h_A = 1450 \text{ kJ/kg}; \quad h_D = 310 \text{ J/kg}; \quad q_{fr} = 1140 \text{ kJ/kg}; \quad h_B = 1680 \text{ kJ/kg}; \quad w_{\text{compresseur}} = 230 \text{ kJ/kg};$$

$$e_{\text{frigo}} = \frac{q_{fr}}{w_u} = 5; \quad e_{\text{carnot}} = \frac{T_{fr}}{T_c - T_{fr}} = \frac{263}{298 - 263} = 7,5$$

Cycle irréversible ; sources d'irrégularité : compression non isentropique ; détente isenthalpique et échange de chaleur avec gradient de température de B jusqu'à la courbe de rosée irrégularités.

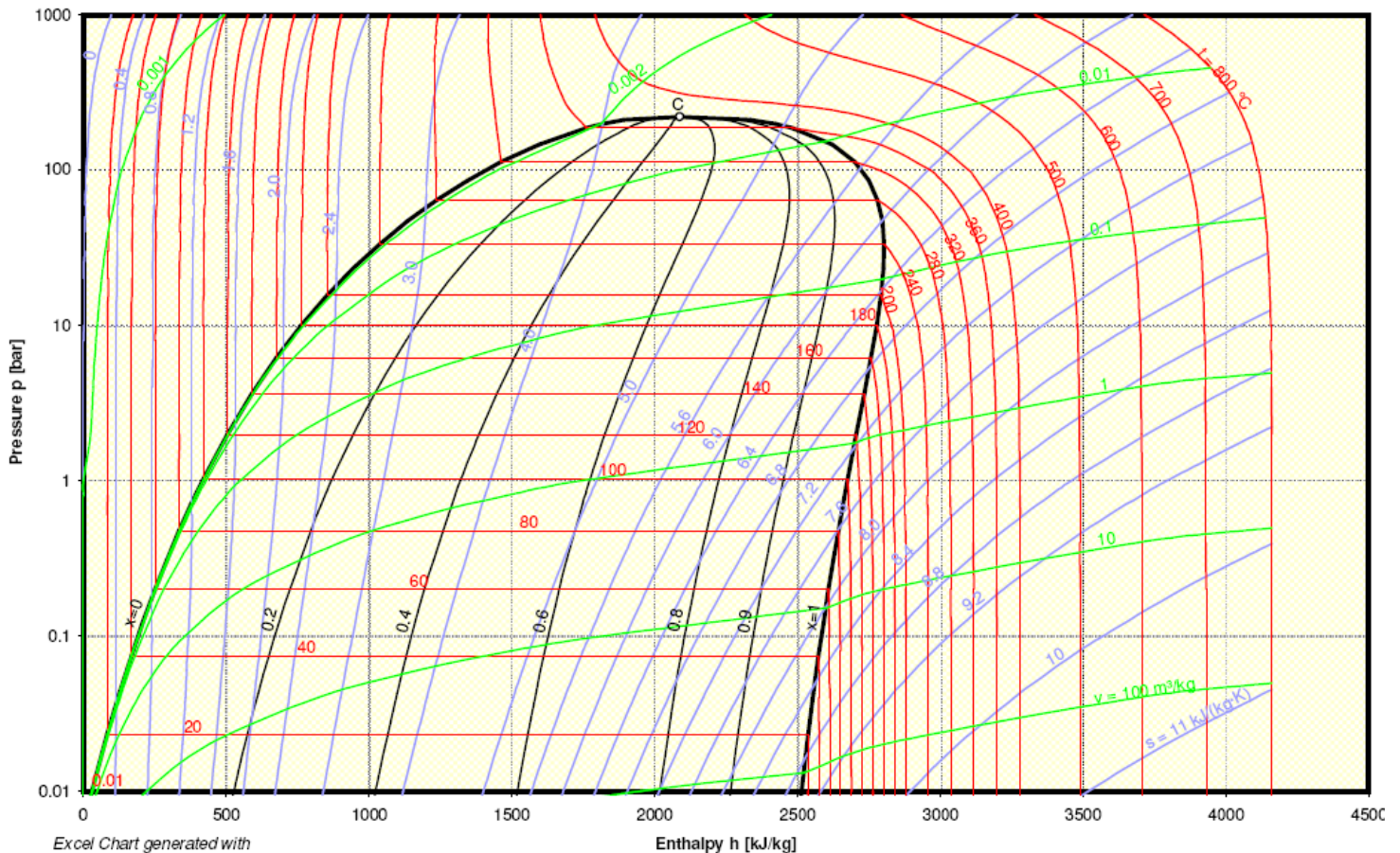
3. ❤ Dans une machine à vapeur, l'eau décrit un cycle de Rankine :

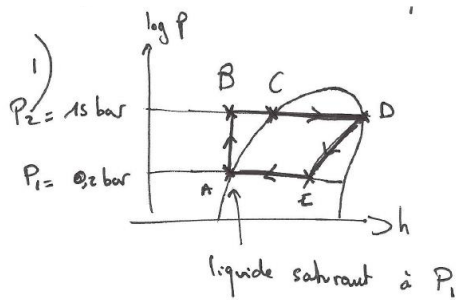
- Dans l'état A l'eau est à l'état de liquide saturant seul, dans les conditions de pression et température $P_1 = 0,2 \text{ bar}$ et $T_1 = 60^\circ\text{C}$;
- Transformation AB : l'eau est comprimée de façon adiabatique réversible dans une pompe, jusqu'à la pression $P_2 = 15 \text{ bar}$;
- Transformation BC : l'eau est injectée dans la chaudière et s'y réchauffe de manière isobare jusqu'à la température $T_2 = 200^\circ\text{C}$, telle que $P_{\text{sat}}(T_2) = P_2$;
- Transformation CD : l'eau se vaporise entièrement à la température T_2 ;
- Transformation DE : l'eau est admise dans le cylindre à T_2 et P_2 et effectue une détente adiabatique réversible jusqu'à la température T_1 ; on obtient un mélange liquide-vapeur ;
- Transformation EA : le piston chasse le mélange diphasique dans le condenseur où il se liquéfie totalement.

1) Représenter ce cycle sur le diagramme des frigorisites de l'eau représenté ci-dessous.

2) Calculer le rendement de ce moteur et le comparer au rendement de Carnot. Quelles sont les causes d'irrégularité ?

logP-H diagram





* AB: isentropique, or modèle 4
condensée incompressible: $is \Leftrightarrow is h \Rightarrow$ verticale.
jusqu'à $P_2 = 15 \text{ bar}$

- * BC: isobare jusqu'à T_2 ; liquide saturant
- * CD: isT donc isP à P_2 et T_2 ; vapeur saturant, $x_v = 1$.
- * DE: isentropique jusqu'à $T_1 = 60^\circ\text{C}$ (dessiné / analogie aux voisines)
- * EA: vaporisation isT à T_1 donc à P_1 (mélange diphasique).

2)

$$q_{AB} = q_{DE} = 0 \text{ (isentropiques adiabatiques)}$$

1^{er} principe pour les fluides en écoulement: $\Delta h = w_{u1} + q$
(massique).

* $q_{BC} = h_c - h_b$ ($w_{u1,BC} = 0$ dans la chaudière)

860 $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ 240 $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ (par lecture graphique.)

$q_{BC} = 620 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

* Idem pour $q_{CD} = h_d - h_c$ A.N.: $q_{CD} = 1940 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
(coût énergétique de la vaporisation).

2800 ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$) 860 ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$)

* Idem pour $q_{EA} = h_a - h_e$ A.N.: $q_{EA} = -1940 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

240 ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$) 2080 ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$)

3) Rendement d'un moteur: $\rho = \frac{-W}{Q_{ch}} = \frac{-W}{q_{chaude}} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C}$

$\rho = 1 + \frac{q_F}{q_C}$ Ici: $q_C = q_{BC} + q_{CD}$ et $q_F = q_{EA}$
dans la chaudière

Soit $\rho = 1 + \frac{q_{EA}}{q_{BC} + q_{CD}}$ A.N.: $\rho = 0,28$

En considérant la source froide à T_1 et la source chaude à $T_2 = T_{max} = 200^\circ C$: cf cours: $\rho_{Carnot} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ A.N.: $\rho_{Carnot} = 0,30$
 $> \rho_{réel}$
↑
irréversibilités

Sources d'irréversibilité: Transf. BC = transfert thermique par contact avec la chaudière à T_2 alors que b(Σ) est à $17^\circ C$.

4. ♥♥ En partant de la relation fondamentale de la statique des fluides, exprimer le champ de pression dans le modèle de l'atmosphère isotherme, faire apparaître la hauteur caractéristique et l'interpréter.

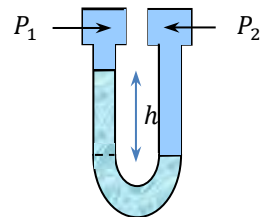
Gaz parfait à T_0 : $Pd\tau = dnRT_0$, de masse volumique: $\mu = \frac{dm}{d\tau} = \frac{dnM}{d\tau} = \frac{PM}{RT_0}$

Relation fondamentale de la statique des fluides avec z altitude: $\frac{dP}{dz} = -\mu g = -\frac{PM}{RT_0} g$

d'où $\frac{dP}{dz} + \frac{Mg}{RT_0} P = 0$ soit avec $H = \frac{RT_0}{Mg}$, $\frac{dP}{dz} + \frac{1}{H} P = 0$, de solution $P(z) = A \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$

Niveau du sol $P(z=0) \equiv P_0 \equiv A$; D'où $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$ avec $H = \frac{RT_0}{Mg}$ distance caractéristique des variations de pression

5. ♥♥ Un tube en U est rempli d'un liquide de masse volumique donnée, chacune de ces extrémités étant en contact avec une zone de pression P_1 pour l'une et P_2 pour l'autre. Etablir l'expression de la hauteur h du dénivelé en fonction de la différence de pression entre les deux zones étudiées et de la masse volumique du fluide utilisé. A.N. pour une différence de pression d'un bar dans le cas du mercure ($d = 13,6$). Donnée: accélération de la pesanteur: $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

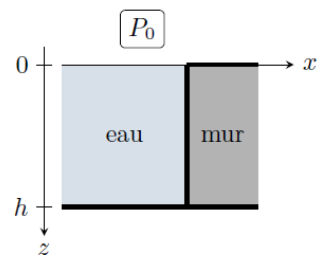


Démarche attendue: Conditions aux limites: $P_A = P_1$; $P_C = P_2$ et $P_C = P_B$ (même fluide, même altitude)

Relation fondamentale de la statique des fluides incompressibles: $P_B = P_A + \rho_{eau} dgh$

$P_2 = P_1 + \rho_{eau} dgh$ ou $h = \frac{P_2 - P_1}{\rho_{eau} dg}$ A.N.: $h_{eau} \approx 10 \text{ m}$; $h_{Hg} \approx 70 \text{ cm}$

6. Exo E. Thibierge: On s'intéresse à un pan de mur droit vertical d'une piscine contenant une hauteur $h = 4 \text{ m}$ d'eau. La largeur du pan de mur est $L = 10 \text{ m}$ dans la direction (Oy). Etablir l'expression de la force de pression subie par le mur en utilisant un découpage mésoscopique bien choisi.



Force de pression: $\vec{F}_{pression} = \iint_{M \in S} p(M) d\vec{S}$, pression à une profondeur z: $P(z) = P_0 + \rho g z$

Surface mésoscopique: $dS = Ldz$; Force élémentaire de pression: $d\vec{F}_{fluide \rightarrow paroi}(M) = p(z)Ldz \vec{e}_x$

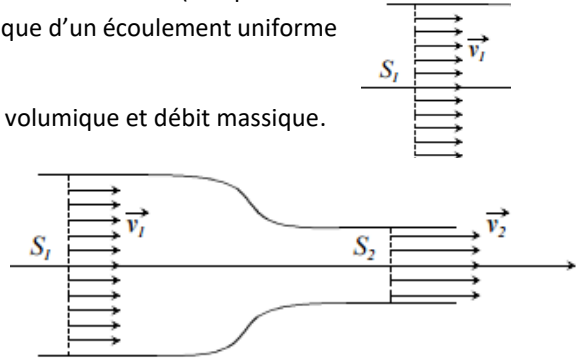
$$\vec{F}_{pression} = \int_{z=0}^{z=h} (P_0) L dz \vec{e}_x + \int_{z=0}^{z=h} (\rho g z) L dz \vec{e}_x = \left[P_0 L h + \rho g L \int_{z=0}^{z=h} z dz \right] \vec{e}_x \text{ avec } \int_{z=0}^{z=h} z dz = \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^h = \frac{h^2}{2} \text{ soit}$$

$$\vec{F}_{pression} = (P_0 L h + \rho g L \frac{h^2}{2}) \vec{e}_x = (P_0 + \rho g \frac{h}{2}) L h \vec{e}_x \text{ Remarque : } P_0 + \rho g \frac{h}{2} = P_{moy} \text{ et } L h = S_{tot}$$

7. ❤ Définir et exprimer le débit volumique et le débit massique à travers une surface S (2 expressions pour chaque débit). Exprimer le débit volumique dans le cas simple classique d'un écoulement uniforme dans une section droite (cf. schéma ci-contre).

Soit un écoulement de fluide incompressible : Donner le lien entre débit volumique et débit massique.

Une conduite possède un rétrécissement avec une section diminuant de S_1 vers S_2 ; la vitesse du fluide est supposée uniforme sur la section, v_1 au niveau de S_1 et v_2 au niveau de S_2 . Quelle est la relation liant v_1 , v_2 , S_1 et S_2 ?



$$\text{Débit volumique } D_v : D_v = \frac{\delta V}{dt} = \iint_{M \in S} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \Phi(\vec{v})$$

$$\text{Débit massique } D_m : D_m = \frac{\delta m}{dt} = \iint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{j}_m \cdot d\vec{S} = \Phi(\vec{j}_m)$$

$$\text{Écoulement uniforme dans une section droite : } D_v = \frac{\delta V}{dt} = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = v S ;$$

$$\text{Si } \rho(M, t) = \rho, D_m = \rho D_v$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

8. ❤❤ Circulation sanguine : À la sortie du cœur, l'aorte peut être considérée comme une conduite cylindrique de rayon $a_0 = 1 \text{ cm}$. Le débit volumique est $D_v = 6 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$ et on suppose que l'écoulement peut être considéré comme stationnaire. La masse volumique du sang est $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Quelle est la vitesse v_0 du sang dans l'aorte ?

Le sang est évacué du cœur dans l'aorte qui se divise ensuite en N_a artères de rayon a_a . Le débit volumique au travers d'une artère est $D_{v,a} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer le nombre N_a d'artères.

Écoulement incompressible : conservation du débit volumique En supposant de plus que les vitesses sont uniformes sur des sections droites : $D_v = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S} = S v_0$ d'où $v_0 = \frac{D_v}{\pi a_0^2} = 0,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

b. Conservation du débit volumique (« loi des nœuds ») : le débit sortant de l'aorte est égal à la somme des débits sortants dans les artères, d'où : $N_a = \frac{D_v}{D_{v,a}} = 50$.

9. **Pour chaque champ de vitesses : s'agit-il d'un écoulement compressible ou incompressible ? tourbillonnaire ou irrotationnel ?

$$\text{On donne : } \vec{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\theta, z} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{z, r} \vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{r, \theta} \vec{e}_z ; \quad \text{div } \vec{a} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r a_r)}{\partial r} \right)_{\theta, z} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} \right)_{z, r} + \left(\frac{\partial a_z}{\partial z} \right)_{r, \theta}$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{a}) = \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial a_z}{\partial \theta} \right)_{z, r} - \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right)_{r, \theta} \right] \vec{e}_r + \left[\left(\frac{\partial a_r}{\partial z} \right)_{r, \theta} - \left(\frac{\partial a_z}{\partial r} \right)_{\theta, z} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} \right)_{\theta, z} - \left(\frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right)_{z, r} \right] \vec{e}_z$$

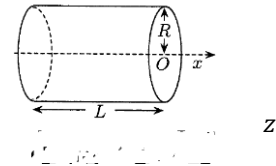
1) $\vec{v}(r, \theta, z) = r\omega \vec{e}_\theta$ où ω constante positive	2) $\vec{v}(x, y, z) = \alpha x \vec{e}_x$ où α est une constante positive	3) $\vec{v}(x, y, z) = (\alpha y + \beta) \vec{e}_x$ où α constante positive, β constante

Démarche attendue :

En coordonnées cartésiennes : $\text{div}(\vec{a}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial y}\right)_{z,x} + \left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)_{x,y}$ et $\text{rot}(\vec{a}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{y,z} & \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{z,x} & \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{x,y} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$

1) $\text{div } \vec{v} = 0$, $\text{rot } \vec{v} = 2\omega \vec{e}_z$ <i>Incompressible, tourbillonnaire</i>	2) $\text{div } \vec{v} = \alpha$, $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ <i>Compressible, irrotationnel</i>	3) $\text{div } \vec{v} = 0$, $\text{rot } \vec{v} = -\alpha \vec{e}_z$ <i>incompressible, tourbillonnaire</i>
--	---	--

10. ** On considère un écoulement d'un fluide visqueux, incompressible et homogène dans un tronçon cylindrique horizontal d'axe (Oz) , de rayon R et de longueur L , illustré sur la figure 1. On notera η la viscosité dynamique du fluide et ρ sa masse volumique.



Le profil de vitesse dans ce tronçon cylindrique de rayon R , de longueur L et d'axe suivant $\vec{e}_z$ est un écoulement de Poiseuille d'expression : $\vec{v} = \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta P}{L} (R^2 - r^2) \vec{e}_z$ où $\Delta P = P(z=0) - P(z=L) > 0$ est la différence de pression entre l'entrée et la sortie du tronçon cylindrique. On note r la coordonnée radiale, c'est-à-dire la distance à l'axe (Oz) .

Exprimer le débit volumique Q_v en fonction de η , R , ΔP et L .

1. Débit volumique qui s'écoule à travers la surface $d\vec{S} = dr \cdot r d\theta \vec{u}_z$, ou directement à travers la surface mésoscopique $\vec{dS} = 2\pi r dr \vec{u}_z$

$$Q_v = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int \frac{R^2}{4\eta} \frac{\Delta P}{L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr = 2\pi \frac{R^2}{4\eta} \frac{\Delta P}{L} \left(\int_0^R r dr - \frac{1}{R^2} \int_0^R r^3 dr\right)$$

$$Q_v = \pi \frac{R^2}{2\eta} \frac{\Delta P}{L} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{1}{R^2} \times \frac{R^4}{4}\right) = \pi \frac{R^2}{2\eta} \frac{\Delta P}{L} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}\right) = \boxed{\pi \frac{R^4}{8\eta} \frac{\Delta P}{L} = Q_v}$$

■ Au programme des exercices

Pas d'exercices avec des calculs de divergence et de rotationnel, ni d'exercices de calcul de débit avec une distribution de vitesse non uniforme

Thermodynamique

✓ Chapitre 7 : Machines thermiques

seulement des exercices avec un fluide en écoulement à travers différents organes

principe de fonctionnement et étude thermodynamique d'un réfrigérateur réel et d'un cycle de Rankine

Utilisation des diagrammes thermodynamiques et du 1^{er} principe appliqué aux systèmes en écoulement (avec énergies massiques ou puissances).

Mécanique des fluides

✓ Chapitre 1 : Statique des fluides

- Pression et forces de pression dans un fluide au repos** : fluide, particule fluide, forces volumiques et surfaciques, cas du poids et de la pression
- Relation fondamentale de la statique des fluides** : équivalent volumique des forces de pression, relation vectorielle de la statique des fluides dans le champ de pesanteur, relation fondamentale de la statique des fluides

3. **Application à la statique des gaz** : masse volumique d'un gaz parfait, méthode générale, cas de l'atmosphère isotherme
4. ♥ ♥ **Application à la statique des fluides incompressibles** : relation fondamentale de la statique des fluides incompressibles, théorème de Pascal, conséquence sur les interfaces (liquide/liquide ou liquide/gaz), application à la mesure des pressions : baromètre à mercure de Torricelli, mesure d'une pression différentielle à l'aide d'un tube en U.
5. **Résultante des forces de pression et ♥ ♥ poussée d'Archimède** **Attention ! dans le cadre du programme, se restreindre à des surfaces planes pour les calculs de résultante des forces de pression.**

✓ Chapitre 2 : Description d'un fluide en écoulement en régime stationnaire

1. **Description eulérienne d'un écoulement** : Approches lagrangienne, eulérienne, lignes de courant, tube de courant
2. ♥ ♥ **Débits massique et volumique** : définition des débits, du flux d'un vecteur quelconque, expression des débits avec les flux des vecteurs vitesse ou densité de flux de masse, lien entre les débits pour un écoulement stationnaire et incompressible (**questions ♥ ♥ : uniquement cas des vitesses uniformes sur la section**).
3. **Ecoulements stationnaires** : bilan global de conservation de la masse, conséquences : conservation du débit massique, loi des nœuds ; opérateur divergence, bilan local de conservation de la masse ; bilan en présence d'une source/d'un puits. **Attention ! les expressions en coordonnées cylindriques / sphériques des opérateurs ainsi que les théorème d'Ostrogradsky et de Stokes doivent être fournis ! seule leur utilisation est exigible.**
4. ****Ecoulements stationnaires et incompressibles** : propriétés caractéristiques : divergence nulle, flux conservatif ; conséquences : conservation du débit volumique, resserrement des lignes de champs dans les zones de vitesse élevée.
5. ****Ecoulements stationnaires et irrotationnels** : opérateur rotationnel, propriétés d'un écoulement irrotationnel : circulation conservative, champ dérivant d'un potentiel dit potentiel des vitesses.