colle N°18 : 12 au 16 Février 2024

▪ Formulaire : chapitres MK1 à MK6, THM1 à THM7, MFL1, MFL2, MFL3

1. ❤️ ❤️ On considère un écoulement parfait, incompressible et stationnaire dans une conduite dont la section varie, telle que $S_1 > S_2$ (cf. figure 1).

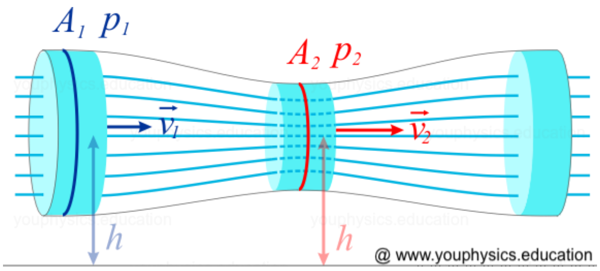


Figure 1

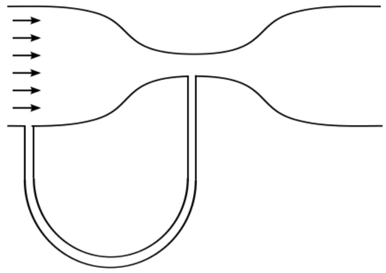


Figure 2

Exprimer la relation entre les vitesses v_1 et v_2 et conclure sur l'évolution de la vitesse dans le rétrécissement. Est-ce cohérent avec les lignes de courant tracées ? Etablir la relation entre les pressions p_1 et p_2, conclure sur l'effet Venturi. Représenter le niveau de liquide dans le manomètre de la figure 2.

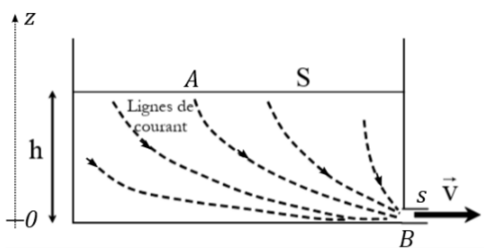
Conservation du débit volumique pour un écoulement incompressible : $D_{v1} = D_{v2}$ soit, pour un écoulement supposé uniforme sur les sections étudiées et des sections droites : $v_1 S_1 = v_2 S_2$

conclusion : $S_1 > S_2$ donne $v_1 < v_2$:

Relation de Bernoulli entre A_1 et A_2, sur la même ligne de courant : $\frac{p1}{\rho} + ½\, v_1{}^2 + gz = cte_{ldc} = \frac{p2}{\rho} + ½\, v_2{}^2 + gz$

conclusion sur les pressions p_1 et p_2 : $p_1 - p_2 = ½\, \rho(v_2{}^2 - v_1{}^2) > 0$: $p_1 > p_2$ ***: dépression au niveau des rétrécissements***

2. Vidange de Torricelli : on s'intéresse à une citerne cylindrique, de section S, contenant liquide, munie d'un orifice en bas de la citerne (point B) par lequel le liquide peut s'écouler, la section s du trou étant très faible devant la section S du récipient ($s << S$). La surface de la citerne est en contact avec de l'air à la pression P_0. On suppose qu'au niveau de l'orifice B, le jet est libre et que toutes les conditions sont réunies pour qu'on puisse appliquer la relation de Bernoulli.



a) ❤️ Exprimer la vitesse d'écoulement v_B en fonction de l'accélération g de la pesanteur et de la hauteur de fluide $h(t)$.

b) ** En déduire le temps T nécessaire pour vider intégralement la citerne.

On suppose que l'écoulement est parfait, homogène et incompressible.
On notera v_l la vitesse du fluide au niveau de la surface libre et v_s la vitesse de sortie du fluide au niveau de l'orifice bas.

Conservation du débit volumique : $v_l S = v_s s$.

*L'écoulement n'est pas stationnaire puisque le réservoir se vide au fil du temps. Cependant, sur une durée courte par rapport à la durée totale de vidange, pour un orifice suffisamment petit ($s \ll S$), on aura $v_l \ll v_s$: l'écoulement à la surface est lent, on peut donc admettre que s'installe un **régime quasi-stationnaire** et que nous sommes dans les conditions d'application de la relation de Bernoulli.*

On considère une ligne de courant joignant la surface du liquide en A et le trou en B. Le long de cette ligne, on applique la relation de Bernoulli (en définissant un axe Oz vertical ascendant) :

$$p_A + ½\, \rho v_A^2 + \rho g z_A = p_B + ½\, \rho v_B^2 + \rho g z_B$$

C.L. : $p_A = p_B = p_0$ soit $\quad p_0 + ½\, \rho v_l^2 + \rho g H = p_0 + ½\, \rho v_s^2 + 0 \approx p_0 + 0 + \rho g H$

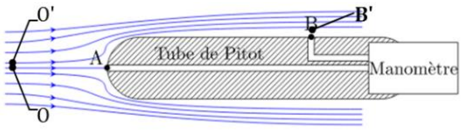
Formule de Torricelli pour la vitesse de vidange : $v_B = \sqrt{2gH}$ *et* $D_v = s\sqrt{2gH}$

Volume d'eau dV sortant du réservoir pendant dt : $dV = D_v dt = S[H(t) - H(t+dt)] = -SdH$ *soit*

$$s\sqrt{2gH} = -S\frac{dH}{dt}$$

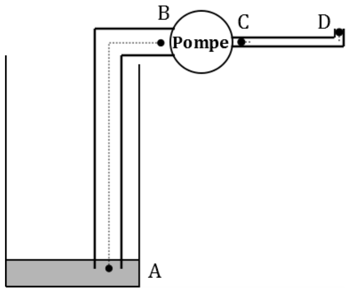
Par séparation des variables, $\int_{H_0}^{0} \frac{dH}{\sqrt{H}} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}\int_0^T dt$ *soit* $T = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2H_0}{g}}$ *A.N. : T = 450 s = 7min 30 s*

3. Sonde de Pitot : Etablir le lien entre la différence de pression entre les points A et B et la vitesse du fluide à l'infini.



On applique la relation de Bernoulli sur deux lignes de courant, en prenant O et O' suffisamment éloignés du tube de pitot pour que l'écoulement ne soit pas perturbé par sa présence :

- *entre O et A (avec* $v_O = v_\infty$*,* $v_A = 0$ *(point d'arrêt) et* $z_O = z_A$*)*
$$p_O + ½\,\rho v_\infty{}^2 = p_A$$
- *entre* O' *et* B'*, très voisin de* B *: en première approximation, on peut considérer que l'écoulement est peu perturbé (avec* $v_{O'} = v_{B'} = v_\infty$ *et* $z_{O'} \approx z_{B'}$*)*
$$p_{O'} = p_{B'} = p_B$$



Les points O et O' sont proches de sorte que

$$p_{O'} = p_O$$

d'où

$$p_A = p_B + ½\,\rho v_\infty{}^2$$

On en déduit la vitesse de l'avion

$$v_\infty = \sqrt{2\frac{p_A - p_B}{\rho}}$$

4. ❤️ ❤️ Ecrire une formule de Bernoulli généralisée sous deux ou trois formes à la demande de l'examinateur : avec ou sans pompe, turbine, et/ou pertes de charges, en termes de pression ou de hauteur, etc.

Par exemple : Pompe + pertes de charge en pression :

$$\left(p_s + ½\,\rho v_s^2 + \rho g z_s\right) - \left(p_e + ½\,\rho v_e^2 + \rho g z_e\right) = \frac{\mathcal{P}_{pompe}}{D_v} - \Delta p_c$$

turbine + pertes de charge en hauteur :

$$\left(\frac{p_e}{\rho g} + ½\frac{v_e^2}{g} + z_e\right) - \left(\frac{p_s}{\rho g} + ½\frac{v_s^2}{g} + z_s\right) = \frac{\mathcal{P}_{turbine}}{gD_m} + \Delta h_c$$

5. ❤️ ❤️ Soit un bloc pompe qui puise de l'eau au fond d'un puits de profondeur AB. On connait les sections des canalisations AB et CD, ainsi que le débit volumique Dv.

La pression atmosphérique est de $1000\ hPa$, la pression de vapeur saturante de l'eau est de 2,3 kPa (à $20°C$).

E est le point le plus haut atteint par le jet d'eau.

a) Que vaut la pression en B ? Quand y a-t-il risque de cavitation ?

b) Quelle puissance actionne la pompe ?

L'écoulement étant incompressible et la section constante, $v_A = v_B$ *par conservation du débit volumique. En appliquant la relation de Bernoulli sur la ligne de courant AB en l'absence de puissance mécanique transférée :*

$$\left(p_s + ½\,\rho v_s^2 + \rho g z_s\right) = \left(p_e + ½\,\rho v_e^2 + \rho g z_e\right)$$

avec écoulement incompressible dans une canalisation à section constante : vitesse constante soit

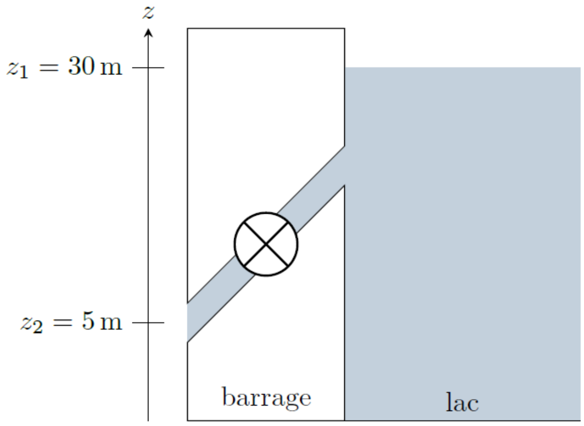
$p_B = p_{atm} - \rho g\ AB = 5.10^4\ Pa > p_{sat}$ *: pas de risque de cavitation.*

b) Bernoulli généralisé entre A et D, avec $v_A = \frac{D_v}{S_A}$ *et* $v_D = D_v/S_D$ *;*

$$D_v\left[\left(p_s + ½\,\rho v_s^2 + \rho g z_s\right) - \left(p_e + ½\,\rho v_e^2 + \rho g z_e\right)\right] = \mathcal{P}_{pompe}$$

$$\mathcal{P}_{pompe} = D_v\left(\frac{1}{2}\rho D_v^2\left(\frac{1}{S_D^2}-\frac{1}{S_A^2}\right)+\rho g\ AB\right) \approx D_v\left(\frac{1}{2}\rho\frac{D_v^2}{S_D^2}+\rho g\ AB\right) \approx 1\ kW$$

6. ❤️❤️ L'eau d'un lac de retenue d'un barrage s'écoule par une conduite où se trouve une turbine. La conduite a un diamètre de sortie D = 2,5m et le débit volumique vaut Q_{vol} = 25 m^3·s^{-1}.



a) Calculer la vitesse en sortie de la conduite.

b) Calculer la puissance maximale disponible sur la turbine.

c) Il y a sur l'installation de la turbine une perte de charge totale $\Delta h_c = 11m$. Déterminer la puissance réelle en sortie de la turbine.

La vitesse à la surface du lac sera quasiment nulle, étant donné la taille très élevée d la surface du lac devant la section de la conduite par laquelle a lieu l'écoulement. Vitesse en sortie de la conduite :

$$v_s = \frac{Q_{vol}}{S} = \frac{4}{\pi}\frac{Q_{vol}}{D^2} = 5{,}1\ m.s^{-1}.$$

En négligeant les pertes de charge pour déterminer la puissance maximale $\mathcal{P}$ disponible sur la turbine, Bernoulli (écoulement PSIH) entre la surface du lac et la sortie de la conduite :

$$\left((P_{atm}+0+\rho g z_1)-\left(P_{atm}+\frac{1}{2}\rho {v_2}^2+\rho g z_2\right)\right)Q_{vol} = \mathcal{P}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{P} = Q_{vol}\left(\rho g(z_1-z_2)-\frac{1}{2}\rho {v_2}^2\right) = 5{,}8\ MW}}$$

*Attention signe !! $\mathcal{P}$ est la puissance **cédée par le fluide** à la turbine, donc $\mathcal{P}_i = -\mathcal{P}$!*

Puissance dissipée sous forme de pertes de charge ici exprimées sous forme de hauteur : $\mathcal{P}_{dissipée} = \boldsymbol{Q_{vol}}\rho g\Delta h_c$

$$\left((P_{atm}+0+\rho g z_1)-\left(P_{atm}+\frac{1}{2}\rho {v_2}^2+\rho g z_2\right)\right)Q_{vol} = \mathcal{P}_{réelle}+\mathcal{P}_{dissipée} = \mathcal{P}_{réelle}+\boldsymbol{Q_{vol}}\rho g\Delta h_c = \mathcal{P}$$

A.N. : $\mathcal{P}_{dissipée} = 2{,}7\ MW$! $\mathcal{P}_{réelle} = \mathcal{P}-\mathcal{P}_{dissipée} = 5{,}8-2{,}7\ MW = 3{,}1\ MW$

7. ❤️ Dans une conduite horizontale d'une longueur de 525 m où circule un fluide de masse volumique $900\ \mathrm{kg.m^{-3}}$ avec un débit de $80\ \mathrm{m^3.h^{-1}}$, les frottements font perdre au fluide l'équivalent en pression de 3 cm de fluide pour une longueur de 2 m de canalisation. Quelle serait la puissance minimale de la pompe qui permettrait de faire circuler le liquide sur la longueur de 525 m ?

Perte de charge régulière ; écoulement PSIH : Bernoulli en présente de pertes de charge et d'un élément actif entre l'entrée et la sortie de la canalisation :

$$(p_s + ½\,\rho v_s^2 + \rho g z_s) - (p_e + ½\,\rho v_e^2 + \rho g z_e) = \frac{\mathcal{P}_{pompe}}{D_v} - \Delta p_{c,tot}$$

or en l'absence de pertes de charge, pour un écoulement horizontal avec une vitesse constante (section constante etécoulement incompressible avec conservation du débit volumique) :

$$(p_s + ½\,\rho v_s^2 + \rho g z_s) - (p_e + ½\,\rho v_e^2 + \rho g z_e) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (p_s)-(p_e) = 0$$

Pour que la pompe compense les pertes de charge, il faut donc : $\frac{\mathcal{P}_{pompe}}{D_v} - \Delta p_{c,tot} = 0$

avec les pertes de charge totales $\Delta p_{c,tot} = \Delta p_{c,l} L_{tot}$ *où* $\Delta p_{c,l} = \frac{\rho g \Delta h_c}{L} = 135\ Pa/m$ *(pertes de charge linéiques)*

$P_{pompe} = \Delta p_{c,l}\, D_v = 3\ W\ pour\ 1\ m\ ;\ P_{pompe} = D_v \Delta p_{c,l} L_{tot} = 1575\ W\ pour\ 525\ m.$

Pour les calculs de champ électrostatique, être particulièrement vigilant quant à la rigueur de la démarche !! étapes attendues :

1) *Choix des coordonnées,*
2) *Choix du point M quelconque &tudié : le représenter, faire apparaître les vecteurs de la base utilisée*
3) *étude des symétries et invariances,*
4) *choix de la surface de Gauss (soigneusement la définir et vérifier qu'elle passe par M)*
5) *Calcul de la charge intérieure avec éventuelle disjonction des cas,*
6) *calcul du flux sortant à travers la surface de Gauss,*
7) *application du théorème de Gauss,*
8) *vérification de l'homogénéité du résultat attendu…*

Distribution	Sphère chargée uniformément en volume (ρ)	Fil infini uniformément chargé (λ)	Cylindre infini chargé en volume (ρ)	Plan $x = 0$ infini chargé (σ)
Champ électrostatique	$r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho\, r}{3\, \varepsilon_0} \vec{e}_r$ $r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho\, R^3}{3\, \varepsilon_0\, r^2} \vec{e}_r$	$r \neq 0 :$ $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\, r} \vec{e}_r$	$r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho\, r}{2\, \varepsilon_0} \vec{e}_r$ $r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho\, R^2}{2\, \varepsilon_0\, r} \vec{e}_r$	$x > 0 : \vec{E} = \frac{\sigma}{2\, \varepsilon_0} \vec{e}_x$ $x < 0 : \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\, \varepsilon_0} \vec{e}_x$

1. ❤️ ❤️ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé par un cylindre infini uniformément chargé.

2. ❤️ ❤️ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé par une sphère uniformément chargée en volume.

3. ❤️ ❤️ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé en surface. (**pour les ❤️ ❤️, guider le calcul du flux).**

Attention à la rigueur de la justification de l'expression du flux sortant !

On décompose le flux à travers la surface de Gauss fermée en une somme de flux à travers les différentes surfaces constituant la surface de Gauss fermée

$$\Phi = \oiint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P).\overrightarrow{dS}(P) = \Phi_{haut} + \Phi_{bas} + \Phi_{lat} = \iint_{P \in S_{haut}} \vec{E}.\overrightarrow{dS_{haut}} + \iint_{P \in S_{bas}} \vec{E}.\overrightarrow{dS_{bas}} + \iint_{P \in S_{lat}} \vec{E}.\overrightarrow{dS_{lat}}$$

Φ_{haut} *:* $\vec{E}$ *et* $\overrightarrow{dS_{haut}}$ *suivant* $\vec{u_z}$. $\vec{E}$ *est constant sur* S_{haut} *:*

$$\Phi_{haut} = \iint_{P \in S_{haut}} \vec{E}.\overrightarrow{dS_{haut}} = \iint E(z)\,\vec{u}_z \cdot dS_{haut}\,\vec{u}_z \underbrace{=}_{\substack{\vec{E}\ et\ \overrightarrow{dS} \\ colinéaires}} \iint E(z).dS_{haut} \underbrace{=}_{\substack{E(z)\ constant \\ sur\ S_{haut}\ à\ z=cte}} E(z) \iint dS_{haut}$$

$$= E(z)\,.S_{haut} = E(z)\,.S$$

Φ_{bas} *:* $\vec{E} = E(-z)\,\vec{u}_z$ *et* $\overrightarrow{dS_{bas}} = dS_{bas}(-\vec{u_z})$*.De plus,* $\vec{E}(-z)$ *est constant sur* S_{bas} *:*

$$\Phi_{bas} = \iint_{P \in S_{bas}} \vec{E}.\overrightarrow{dS_{bas}} = \iint E(-z)(\vec{u}_z) \cdot dS_{bas}(-\vec{u}_z) \underbrace{=}_{\substack{\vec{E}\ et\ \overrightarrow{dS} \\ colinéaires}} \iint -E(-z).dS_{bas} \underbrace{=}_{\substack{E(-z)\ constant \\ sur\ S_{bas}\ à\ -z=cte}} -E(-z) \iint dS_{bas}$$

De plus, $\pi_s = (xOy)$ *étant plan de symétrie de la distribution de charges,* $E(-z) = -E(z)$*, d'où*

$$\Phi_{bas} = -E(-z) \iint dS_{bas} = E(z) \iint dS_{bas} = E(z).S_{bas} = E(z).S = \Phi_{haut}$$

Φ_{lat} *:* $\vec{E}$ *et* $\overrightarrow{dS_{lat}}$ *orthogonaux.*

$$\Phi_{lat} = \iint_{P\in S_{lat}} \vec{E}.\overrightarrow{dS_{lat}} = 0$$

$$\boxed{\Phi = \Phi_{haut} + \Phi_{bas} + \Phi_{lat} = 2\,E(z)\,.S}$$

4. On note V_1et V_2 les potentiels en deux points M_1 et M_2. Une particule chargée de masse m, de charge q, est accélérée de M_1 vers M_2. Quel doit être le signe de la tension U_{12} pour accélérer un électron ?

La particule quittant le point M_1 avec une vitesse faible, calculer la vitesse v_2 acquise en M_2.

Toute particule chargée soumise à un champ $\vec{E}$ subit la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{E}$.

Une particule de charge positive se dirige donc dans le sens du champ $\vec{E}$, or $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$: le champ électrique est dirigé dans le sens des potentiels décroissants, et donc toute particule de charge positive se dirige vers les potentiels décroissants, tandis que toute particule de charge négative se dirige vers les potentiels croissants.

Pour une particule de charge positive, il faut donc $V_2 < V_1$, soit $U_{12} = V_1 - V_2 > 0$, tandis que pour une particule de charge négative, il faut $V_2 > V_1$, soit $U_{12} = V_1 - V_2 < 0$. La tension doit donc être de même signe que la charge : $qU_{12} > 0$.

Théorème de l'énergie mécanique appliqué à la particule chargée, soumise à la seule force électrostatique dérivant d'une énergie potentielle telle que $Ep = qV$:

$$\Delta Ec + \Delta Ep = 0 \qquad \text{soit } \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = -q(V_2 - V_1) = qU_{12} \approx \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \text{soit} \quad v_2 = \sqrt{\frac{2qU_{12}}{m}}$$

Remarque : on retrouve le critère énoncé dans la question 1) : pour que la vitesse v_2 soit définie, il est nécessaire que $\frac{2qU_{12}}{m} > 0$, soit $qU_{12} > 0$

Au programme des exercices

Mécanique des fluides

✓ Chapitre 3 : étude énergétique d'un fluide en écoulement parfait dans une conduite

1. **Bilan d'énergie mécanique pour un écoulement parfait :** Notion d'écoulement parfait ; ❤❤ théorème de Bernoulli ; cas des écoulements parfaits stationnaires incompressibles homogènes ET irrotationnels ; ❤❤ application à l'effet Venturi (cas des débitmètres) ; autres applications (sonde de Pitot, ❤ vidange de Torricelli).
2. ❤❤ **Généralisation de la relation de Bernoulli :** Prise en compte d'un élément actif (pompes et turbines) ; Prise en compte des pertes de charge.

Electromagnétisme

✓ Chapitre 1 : Electrostatique

Notions et contenus	Capacités exigibles
4. Électrostatique du vide	
Description et effets électriques d'une accumulation de charges statiques	Définir et utiliser une fonction densité volumique, surfacique out linéique de charges. Définir le champ électrostatique à l'aide de la force électrostatique ressentie par une charge ponctuelle d'essai placée dans le champ électrostatique d'une autre distribution. Citer quelques ordres de grandeurs de champs électriques. Énoncer le principe de Curie. Repérer les symétries et invariances d'une distribution.

	Définir la notion de ligne de champ électrostatique et prévoir la topographie des lignes de champ associées à une charge ponctuelle, un cylindrique infini, un plan infini uniformément chargés et une sphère chargée uniformément.
Équation de Maxwell-Gauss, théorème de Gauss et équation de Maxwell-Faraday de la statique	Énoncer l'expression du champ créé par une charge ponctuelle. Énoncer le théorème de Gauss et le relier à l'équation de Maxwell-Gauss. Utiliser le théorème de Gauss pour calculer un champ électrostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie (plan, cylindre, sphère).

Attention ! le potentiel électrostatique et les études de condensateurs n'ont pas encore été vus ! seuls les calculs de champ électrostatique à l'aide du théorème de Gauss sont au programme