colle N°19 : 19 au 23 Février 2024

- **Formulaire : chapitres MK1 à MK6, THM1 à THM7, MFL1, MFL2, MFL3, EM1 (sauf q)148, 149, 150), THM8 : q) 184 à 189**

Pour les calculs de champ électrostatique, être particulièrement vigilant quant à la rigueur de la démarche !! étapes attendues :

1) *Choix des coordonnées,*
2) *Choix du point M quelconque &tudié : le représenter, faire apparaître les vecteurs de la base utilisée*
3) *étude des symétries et invariances,*
4) *choix de la surface de Gauss (soigneusement la définir et vérifier qu'elle passe par M)*
5) *Calcul de la charge intérieure avec éventuelle disjonction des cas,*
6) *calcul du flux sortant à travers la surface de Gauss,*
7) *application du théorème de Gauss,*
8) *vérification de l'homogénéité du résultat attendu…*

Distribution	**Sphère chargée uniformément en volume (ρ)**	**Fil infini uniformément chargé (λ)**	**Cylindre infini chargé en volume (ρ)**	**Plan $x = 0$ infini chargé (σ)**
Champ électrostatique	$r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho r}{3\,\varepsilon_0}\vec{e}_r$ $r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\,\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$	$r \neq 0 :$ $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\, r}\vec{e}_r$	$r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho r}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_r$ $r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\,\varepsilon_0\, \mathrm{r}}\vec{e}_r$	$x > 0 : \vec{E} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_x$ $x < 0 : \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_x$

1. ❤️ ❤️ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé par un cylindre infini uniformément chargé.
2. ❤️ ❤️ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé par une sphère uniformément chargée en volume.
3. ❤️ ❤️ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé en surface. (**pour les ❤️ ❤️, guider le calcul du flux).**

Attention à la rigueur de la justification de l'expression du flux sortant !

On décompose le flux à travers la surface de Gauss fermée en une somme de flux à travers les différentes surfaces constituant la surface de Gauss fermée

$$\Phi = \oiint_{P\in\Sigma_G} \vec{E}(P).\overrightarrow{dS}(P) = \Phi_{haut} + \Phi_{bas} + \Phi_{lat} = \iint_{P\in S_{haut}} \vec{E}.\overrightarrow{dS_{haut}} + \iint_{P\in S_{bas}} \vec{E}.\overrightarrow{dS_{bas}} + \iint_{P\in S_{lat}} \vec{E}.\overrightarrow{dS_{lat}}$$

Φ_{haut} *: $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS_{haut}}$ suivant $\overrightarrow{u_z}$. $\vec{E}$ est constant sur S_{haut} :*

$$\Phi_{haut} = \iint_{P\in S_{haut}} \vec{E}.\overrightarrow{dS_{haut}} = \iint E(z)\,\vec{u}_z \cdot dS_{haut}\,\vec{u}_z \underbrace{=}_{\substack{\vec{E}\text{ et }\overrightarrow{dS} \\ \text{colinéaires}}} \iint E(z).dS_{haut} \underbrace{=}_{\substack{E(z)\text{ constant} \\ \text{sur } S_{haut} \text{ à } z=cte}} E(z) \iint dS_{haut}$$

$$= E(z)\,.S_{haut} = E(z)\,.S$$

Φ_{bas} *: $\vec{E} = E(-z)\,\vec{u}_z$ et $\overrightarrow{dS_{bas}} = dS_{bas}(-\overrightarrow{u_z})$.De plus, $\vec{E}(-z)$ est constant sur S_{bas} :*

$$\Phi_{bas} = \iint_{P\in S_{bas}} \vec{E}.\overrightarrow{dS_{bas}} = \iint E(-z)(\vec{u}_z)\cdot dS_{bas}(-\vec{u}_z) \underbrace{=}_{\substack{\vec{E}\text{ et }\overrightarrow{dS} \\ \text{colinéaires}}} \iint -E(-z).dS_{bas} \underbrace{=}_{\substack{E(-z)\text{ constant} \\ \text{sur } S_{bas} \text{ à } -z=cte}} -E(-z) \iint dS_{bas}$$

De plus, $\pi_s = (xOy)$ étant plan de symétrie de la distribution de charges, $E(-z) = -E(z)$, d'où

$$\Phi_{bas} = -E(-z) \iint dS_{bas} = E(z) \iint dS_{bas} = E(z).S_{bas} = E(z).S = \Phi_{haut}$$

Φ_{lat} *: $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS_{lat}}$ orthogonaux.*

$$\Phi_{lat} = \iint_{P \in S_{lat}} \vec{E}.\overrightarrow{dS_{lat}} = 0$$

$$\boxed{\Phi = \Phi_{haut} + \Phi_{bas} + \Phi_{lat} = 2\,E(z).S}$$

4. On note V_1et V_2 les potentiels en deux points M_1 et M_2. Une particule chargée de masse m, de charge q, est accélérée de M_1 vers M_2. Quel doit être le signe de la tension U_{12} pour accélérer un électron ?

La particule quittant le point M_1 avec une vitesse faible, calculer la vitesse v_2 acquise en M_2.

Toute particule chargée soumise à un champ $\vec{E}$ subit la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{E}$.

Une particule de charge positive se dirige donc dans le sens du champ $\vec{E}$, or $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$: le champ électrique est dirigé dans le sens des potentiels décroissants, et donc toute particule de charge positive se dirige vers les potentiels décroissants, tandis que toute particule de charge négative se dirige vers les potentiels croissants.

Pour une particule de charge positive, il faut donc $V_2 < V_1$, soit $U_{12} = V_1 - V_2 > 0$, tandis que pour une particule de charge négative, il faut $V_2 > V_1$, soit $U_{12} = V_1 - V_2 < 0$. La tension doit donc être de même signe que la charge : $qU_{12} > 0$.

Théorème de l'énergie mécanique appliqué à la particule chargée, soumise à la seule force électrostatique dérivant d'une énergie potentielle telle que $Ep = qV$:

$$\Delta Ec + \Delta Ep = 0 \qquad \text{soit } \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = -q(V_2 - V_1) = qU_{12} \approx \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \text{soit} \quad v_2 = \sqrt{\frac{2qU_{12}}{m}}$$

Remarque : on retrouve le critère énoncé dans la question 1) : pour que la vitesse v_2 soit définie, il est nécessaire que $\frac{2qU_{12}}{m} > 0$, soit $qU_{12} > 0$

5. ❤ ❤ Etablir l'expression de la capacité d'un condensateur plan idéal constitué de deux plaques conductrices de surface S, séparées d'une distance $e \ll S$.

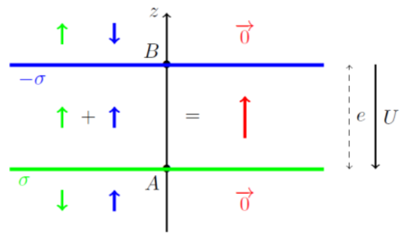
Expression à connaître, ou redonnée par l'examinateur : Cf. calcul du champ créé par un plan infini chargé avec σ : $z > 0$: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$ et $z < 0$: $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$

Champ crée par l'armature 1 :

$$\overrightarrow{E_1} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} & si\ z > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} & si\ z < 0 \end{cases}$$

Champ crée par l'armature 2 :

$$\overrightarrow{E_2} = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} & si\ z > e \\ \dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} & si\ z < e \end{cases}$$



Principe de superposition : $\vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}$

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & si\ z > e\ ou\ z < 0 \\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} & si\ 0 < z < e \end{cases}$$

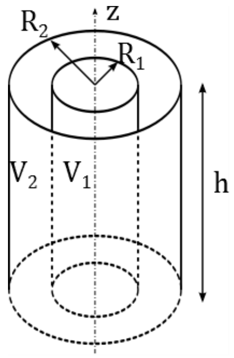
Détermination de V : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$, d'après les symétries, V ne dépend que de z : $-\overrightarrow{grad}\,V = -\frac{dV}{dz}\overrightarrow{u_z}$

$$V = -\int E.dz + cte = -\int \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.dz + cte = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}z + cte$$

Détermination de U : $U = V_1 - V_2 = V(z=0) - V(z=e) = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}$

capacité C définie par : $C = \frac{Q}{U}$ *soit* $C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma\,S\,\varepsilon_0}{\sigma\,e} = \frac{\varepsilon_0\,S}{e}$

6. Capacité d'un condensateur cylindrique



Un condensateur cylindrique idéal est constitué de deux cylindres concentriques conducteurs, de rayons R_1 et $R_2 > R_1$, et de hauteur h supposée infinie (très grande devant les rayons). L'armature interne porte une charge Q répartie sur la surface du cylindre de rayon R_1, tandis que l'armature externe porte une charge $-Q$ répartie sur la surface du cylindre de rayon R_2.

Etablir l'expression de la capacité puis de la capacité linéique d'un tel condensateur cylindrique.

Par application du théorème de Gauss entre les armatures du condensateur (détailler les étapes)

symétries et invariances : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$*, surface de Gauss cylindre de rayon* r *de hauteur* h*,*

flux $\Phi = \oiint_{P\in\Sigma_G} \vec{E}(P).\overrightarrow{dS}(P) = 2\pi r h E(r)$ *charge intérieure* Q*, d'où* $\vec{E} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 r h}\vec{e}_r$ *entre les armatures*

Différence de potentiel entre les armatures :

$$V_1 - V_2 = \int_2^1 dV = \int_2^1 -\vec{E}\cdot d\overrightarrow{OM} = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\overrightarrow{OM} = \int_1^2 \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 r h}\vec{e}_r\cdot d\overrightarrow{OM} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 r h}dr = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}$$

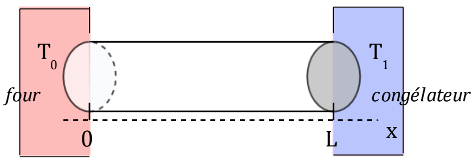
$$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\, ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Calcul de la capacité : $C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{Q_1}{\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h} ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$ *soit* $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

Validation : $[C] = [\varepsilon_0]\, L$ *et* $C > 0$

Capacité linéique *ou capacité par unité de longueur* $\Gamma = \frac{C}{h}$ *:* $\Gamma = \frac{2\pi\varepsilon_0}{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

7. ❤ Considérons une tige calorifugée latéralement, aux extrémités de laquelle on impose une différence de température, considérée comme un système à une dimension cartésienne (cf. ci-contre), étudiée en régime stationnaire en l'absence de source de chaleur interne. A l'aide d'un bilan d'enthalpie, établir l'expression de la température $T(x)$.



Pour les ❤ ❤ : même question mais en admettant la conservation du flux (cette conservation doit être citée par l'étudiant avec la justification régime stationnaire)

- *Ecrire le bilan d'enthalpie pour une tranche d'épaisseur* dx : $d^2H \underbrace{=}_{\substack{1er\ principe \\ monobare}} \delta^2 Q$
- *En régime stationnaire,* $d^2H \underbrace{=}_{stationnaire} 0$ *soit* $\delta^2 Q = 0$
- *En exprimant la quantité de chaleur reçue (entrée en* x *– sortie en* $x + dx$*) à l'aide des flux thermiques :*

  $\delta^2 Q = (\Phi(x) - \Phi(x+dx))\, dt = 0$ *soit* $\Phi(x) = \Phi(x+dx) = cte$
- *En introduisant le vecteur densité de flux et en exploitant la loi de Fourier :*

  $\Phi(x) = \iint_{section} \vec{J_Q}(x)d\vec{S} \underbrace{=}_{loi\ de\ Fourier} \iint_{section} -\lambda\, \overrightarrow{grad}(T)d\vec{S} \underbrace{=}_{\substack{vecteurs\ colinéaires \\ gradient\ uniforme\ sur\ S}} -\lambda\frac{dT}{dx}S = cte$
- *soit* $\frac{dT}{dx} = cte$ *et* $T(x) = ax + b$ *(ou* $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$ *)*
- *Détermination de* a *et* b *à l'aide des conditions aux limites :*

$T(x=0) = T_0$ *et* $T(x=L) = T_1$ *d'où* $T(x) = (\frac{T_1 - T_0}{L})x + T_0$

8. a) ❤ À partir de la loi de Fourier et de l'expression du flux thermique en régime stationnaire, retrouver l'expression de la résistance thermique R_{th} d'un mur d'épaisseur e, de surface S et de conductivité λ, les faces de ce matériau étant maintenues à $T_1 = 273\ K$ et $T_2 = 293\ K$ (on supposera le problème à une seule dimension, et on admettra la variation linéaire de température dans ce cadre). On donne $S = 2\ \mathrm{m}^2$; $e = 10$ cm ; $\lambda = 0{,}9$ SI.

b) ❤️ ❤️ On place sur le premier matériau une épaisseur e' d'un matériau isolant $\lambda' = 0{,}03$ SI. Quelle doit être la valeur de e' pour diviser les pertes thermiques par 10 ?

a) Démarche attendue : En régime stationnaire, en l'absence de source interne, le flux est conservatif, soit $\Phi(x) = \Phi(x+dx) = \Phi$, avec $\Phi = \iint_\Sigma \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = j_{Qx} S$ soit $j_{Qx} = cte$

Loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -\lambda\, \overrightarrow{grad} T$ soit en cartésiennes à 1D : $j_{Qx} = -\lambda \frac{dT}{dx} \underbrace{=}_{j_{Qx}=cte} -\lambda \frac{T_2 - T_1}{e}$;

$\Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{e}(T_1 - T_2)$ soit $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$

b) Avec $\Phi = \frac{\Delta T}{R_{th}}$, pour diviser les pertes thermiques donc Φ par 10, il faut multiplier la résistance thermique $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ par 10.

Association série : $(R_{th})_{tot} = R_{th} + R'_{th} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{e'}{\lambda' S} = 10 R_{th} = 10 \frac{e}{\lambda S} \Rightarrow e' = 9e\, \frac{\lambda'}{\lambda} = 3$ cm

▪ Au programme des exercices

Attention ! les associations de condensateurs ainsi que l'énergie électrostatique n'ont pas encore été vues.

Pour les transferts thermiques, seuls les systèmes en régime stationnaire en coordonnées cartésiennes en l'absence de phénomènes de convection ou de source interne d'énergie thermique sont au programme

Electromagnétisme

✓ Chapitre 1 : Electrostatique

Notions et contenus	Capacités exigibles
4. Électrostatique du vide	
Description et effets électriques d'une accumulation de charges statiques	Définir et utiliser une fonction densité volumique, surfacique out linéique de charges. Définir le champ électrostatique à l'aide de la force électrostatique ressentie par une charge ponctuelle d'essai placée dans le champ électrostatique d'une autre distribution. Citer quelques ordres de grandeurs de champs électriques. Énoncer le principe de Curie. Repérer les symétries et invariances d'une distribution. Définir la notion de ligne de champ électrostatique et prévoir la topographie des lignes de champ associées à une charge ponctuelle, un cylindrique infini, un plan infini uniformément chargés et une sphère chargée uniformément.
Équation de Maxwell-Gauss, théorème de Gauss et équation de Maxwell-Faraday de la statique	Énoncer l'expression du champ créé par une charge ponctuelle. Énoncer le théorème de Gauss et le relier à l'équation de Maxwell-Gauss. Utiliser le théorème de Gauss pour calculer un champ électrostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie (plan, cylindre, sphère).

Conducteur en équilibre électrostatique	Énoncer les propriétés d'un conducteur en équilibre électrostatique. Énoncer le théorème de Coulomb et les relations de passage du champ électrostatique.
Le condensateur	Établir l'expression de la capacité d'un condensateur plan dans le vide en négligeant les effets de bords. Établir l'expression de la capacité linéique d'un condensateur cylindrique dans le vide en négligeant les effets de bords. *Définir la notion de densité volumique d'énergie électrique à l'aide de l'exemple du condensateur plan*.

Thermodynamique

Attention ! les régimes variables n'ont pas encore été vus !

- ✓ **Chapitre 8 : Transfert d'énergie par conduction thermique**

Notions et contenus	Capacités exigibles
3. Transfert d'énergie par conduction thermique	
Densité de flux thermique	Définir et algébriser la puissance thermique échangée à travers une surface.
Loi de Fourier	Relier la non-uniformité de la température à l'existence d'un flux thermique et interpréter son sens. Citer des ordres de grandeur de conductivité thermique pour des matériaux dans le domaine de l'habitat.
Analogie électrique dans le cas du régime stationnaire	Définir la résistance thermique. Exploiter l'analogie électrique lors d'un bilan thermique.
Loi de Newton	Exploiter la loi de Newton fournie pour prendre en compte les échanges conducto-convectifs en régime stationnaire.