colle N°20 : 18 au 22 Mars 2024

- **Formulaire : chapitres MK1 à MK6, THM1 à THM7, MFL1, MFL2, MFL3, EM1 (sauf q)148, 149, 150), THM8**

1. ❤❤ Etablir l'expression de la capacité d'un condensateur plan idéal constitué de deux plaques conductrices de surface S, séparées d'une distance $e \ll S$.

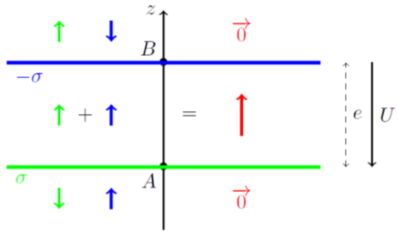
Expression à connaître, ou redonnée par l'examinateur : Cf. calcul du champ créé par un plan infini chargé avec σ : $z > 0$: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$ et $z < 0$: $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$

Champ crée par l'armature 1 :

$$\overrightarrow{E_1} = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} & si\ z > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} & si\ z < 0 \end{array} \right.$$

Champ crée par l'armature 2 :

$$\overrightarrow{E_2} = \left| \begin{array}{ll} -\dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} & si\ z > e \\ \dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} & si\ z < e \end{array} \right.$$



Principe de superposition : $\vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}$

$$\vec{E} = \left| \begin{array}{ll} \vec{0} & si\ z > e\ ou\ z < 0 \\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} & si\ 0 < z < e \end{array} \right.$$

Détermination de V : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$, d'après les symétries, V ne dépend que de z : $-\overrightarrow{grad}\,V = -\frac{dV}{dz}\overrightarrow{u_z}$

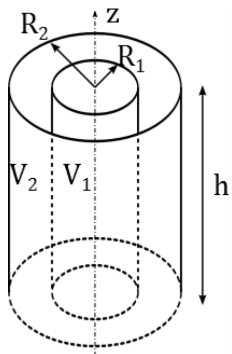
$$V = -\int E.dz + cte = -\int \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.dz + cte = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}z + cte$$

Détermination de U : $U = V_1 - V_2 = V(z=0) - V(z=e) = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}$

capacité C définie par : $C = \frac{Q}{U}$ soit $C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma\, S\, \varepsilon_0}{\sigma\, e} = \frac{\varepsilon_0\, S}{e}$

2. ** Capacité d'un condensateur cylindrique

Un condensateur cylindrique idéal est constitué de deux cylindres concentriques conducteurs, de rayons R_1 et $R_2 > R_1$, et de hauteur h supposée infinie (très grande devant les rayons). L'armature interne porte une charge Q répartie sur la surface du cylindre de rayon R_1, tandis que l'armature externe porte une charge $-Q$ répartie sur la surface du cylindre de rayon R_2.



Etablir l'expression de la capacité puis de la capacité linéique d'un tel condensateur cylindrique.

Par application du théorème de Gauss entre les armatures du condensateur (détailler les étapes)

symétries et invariances : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$, surface de Gauss cylindre de rayon r de hauteur h,

flux $\Phi = \oiint_{P\in\Sigma_G} \vec{E}(P).\overrightarrow{dS}(P) = 2\pi r h E(r)$ charge intérieure Q, d'où $\vec{E} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 r h}\vec{e}_r$ entre les armatures

Différence de potentiel entre les armatures :

$$V_1 - V_2 = \int_2^1 dV = \int_2^1 -\vec{E}\cdot d\overrightarrow{OM} = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\overrightarrow{OM} = \int_1^2 \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 r h}\vec{e}_r\cdot d\overrightarrow{OM} = \int_{R_1}^{R_2}\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 r h}dr = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}$$

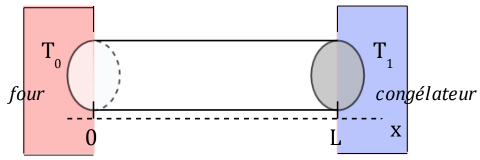
$$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\, ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Calcul de la capacité : $C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{Q_1}{\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h} ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$ soit $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

***Validation :** $[C] = [\varepsilon_0]\,L$ et $C > 0$*

***Capacité linéique** ou capacité par unité de longueur $\Gamma = \frac{C}{h}$: $\Gamma = \frac{2\pi\varepsilon_0}{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$*

3. ❤️ Considérons une tige calorifugée latéralement, aux extrémités de laquelle on impose une différence de température, considérée comme un système à une dimension cartésienne (cf. ci-contre), étudiée en régime stationnaire en l'absence de source de chaleur interne. A l'aide d'un bilan d'enthalpie, établir l'expression de la température $T(x)$.



Pour les ❤️ ❤️ : même question mais en admettant la conservation du flux (cette conservation doit être citée par l'étudiant avec la justification régime stationnaire)

- *Ecrire le bilan d'enthalpie pour une tranche d'épaisseur dx :* $d^2H \underbrace{=}_{\substack{1er\ principe \\ monobare}} \delta^2 Q$
- *En régime stationnaire,* $d^2H \underbrace{=}_{stationnaire} 0$ *soit* $\delta^2 Q = 0$
- *En exprimant la quantité de chaleur reçue (entrée en x – sortie en $x + dx$) à l'aide des flux thermiques :*

$\delta^2 Q = (\Phi(x) - \Phi(x+dx))\,dt = 0$ *soit* $\Phi(x) = \Phi(x+dx) = cte$

- *En introduisant le vecteur densité de flux et en exploitant la loi de Fourier :*

$$\Phi(x) = \iint_{section} \vec{J_Q}(x) d\vec{S} \underbrace{=}_{loi\ de\ Fourier} \iint_{section} -\lambda \overrightarrow{grad}(T) d\vec{S} \underbrace{=}_{\substack{vecteurs\ colinéaires \\ gradient\ uniforme\ sur\ S}} -\lambda \frac{dT}{dx} S = cte$$

- *soit* $\frac{dT}{dx} = cte$ *et* $T(x) = ax + b$ *(ou* $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$ *)*
- *Détermination de a et b à l'aide des conditions aux limites :*

$T(x=0) = T_0$ *et* $T(x=L) = T_1$ *d'où* $T(x) = (\frac{T_1 - T_0}{L})x + T_0$

4. a) ❤️ À partir de la loi de Fourier et de l'expression du flux thermique en régime stationnaire, retrouver l'expression de la résistance thermique R_{th} d'un mur d'épaisseur e, de surface S et de conductivité λ, les faces de ce matériau étant maintenues à $T_1 = 273\ K$ et $T_2 = 293\ K$ (on supposera le problème à une seule dimension, et on admettra la variation linéaire de température dans ce cadre). On donne $S = 2\ \mathrm{m}^2$; $e = 10$ cm ; $\lambda = 0{,}9$ SI.

b) ❤️ ❤️ On place sur le premier matériau une épaisseur e' d'un matériau isolant $\lambda' = 0{,}03$ SI. Quelle doit être la valeur de e' pour diviser les pertes thermiques par 10 ?

a) Démarche attendue : En régime stationnaire, en l'absence de source interne, le flux est conservatif, soit $\Phi(x) = \Phi(x+dx) = \Phi$, *avec* $\Phi = \iint_\Sigma \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = j_{Qx} S$ *soit* $j_{Qx} = cte$

Loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{grad} T$ *soit en cartésiennes à 1D :* $j_{Qx} = -\lambda \frac{dT}{dx} \underbrace{=}_{j_{Qx}=cte} -\lambda \frac{T_2 - T_1}{e}$;

$\Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{e}(T_1 - T_2)$ *soit* $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$

b) Avec $\Phi = \frac{\Delta T}{R_{th}}$, *pour diviser les pertes thermiques donc Φ par 10, il faut multiplier la résistance thermique* $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ *par 10.*

Association série : $(R_{th})_{tot} = R_{th} + R'_{th} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{e'}{\lambda' S} = 10 R_{th} = 10\frac{e}{\lambda S} \Rightarrow e' = 9e\,\frac{\lambda'}{\lambda} = 3\ cm$

5. ❤️ Etablir l'équation de la chaleur dans le cas à une dimension cartésienne en l'absence de source de chaleur interne

- *Premier principe (bilan enthalpique) appliqué au système compris entre x et $x + dx$, entre t et $t + dt$ en l'absence de travail autre que celui des forces de pression, à pression atmosphérique :* $d(\delta H) = d^2H = \delta^2 Q$
- *Dans le cas d'un système monophasé :* $d(\delta H) = \delta m c dT = \rho\, S dx\, c\, dT$ ***; x fixé :*** $dT = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x dt$;

- *$\delta^2 Q$: flux entrant moins flux sortant, soit $\delta^2 Q = \big(\Phi(x,t) - \Phi(x+dx,t)\big)\,dt = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_t dx\,dt$*
- *Avec $\Phi(x) = \iint_{section} \vec{j_Q}(x) d\vec{S} = j_{Qx} S$, $\quad \delta^2 Q = -\left(\frac{\partial j_{Qx}}{\partial x}\right)_t S\,dx\,dt$*
- *Loi de Fourier : $\vec{j_Q}(x) = -\lambda\,\overrightarrow{grad}(T)$, d'où $j_{Qx} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_t$;*
- *finalement : équation de la chaleur $\quad \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x - \frac{\lambda}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t = 0$ avec $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ diffusivité, telle que $\tau \sim \frac{L^2}{D}$*

6. ❤️ A) Considérons un barreau métallique de diffusivité thermique $D \approx 10^{-5}\ \mathrm{m^2.s^{-1}}$. Déterminer le temps caractéristique de diffusion sur 1 cm puis sur 1 m.

b) Un étourdi oublie sa cuillère dans l'eau de cuisson des pâtes. Jusqu'à quelle hauteur le manche va-t-il chauffer pendant la cuisson ? Risque-t-il donc de se brûler en la retirant lorsque les pâtes seront cuites ?

a) Combien de temps (dans une unité adaptée !) faut-il pour que les variations de température se fassent ressentir dans une cave enterrée à 2 m de profondeur ?

Donnée : Donnée : diffusivité du fer $D \sim 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^2{\cdot}s^{-1}}$. diffusivité du sol $D \sim 3 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m^2{\cdot}s^{-1}}$.

1) Temps de diffusion sur 1 cm	$\tau_1 \approx \frac{L_1^2}{D}$	$\tau_1 \approx 10\ s$	
Temps de diffusion sur 1 m	$\tau_2 \approx \frac{L_2^2}{D}$	$\tau_2 \approx 10^5\ s$	$\frac{\tau_2}{\tau_1} \approx 10^4$

2) $L = \sqrt{\tau D}$ avec cuisson des pâtes : $\tau \approx 10\,min = 600\ s$ d'où $L = \sqrt{\tau D} \approx 10\ cm$: mieux vaut avoir pris une longue cuillère, et des pâtes qui cuisent rapidement…

3) $\tau_1 \approx \frac{L_1^2}{D} \approx 150\ jours$

Au programme des exercices

Thermodynamique

Attention ! les ondes thermiques n'ont pas encore été vues !

✓ **Chapitre 8 : Transfert d'énergie par conduction thermique**

Notions et contenus	Capacités exigibles
3. Transfert d'énergie par conduction thermique	
Densité de flux thermique	Définir et algébriser la puissance thermique échangée à travers une surface.
Loi de Fourier	Relier la non-uniformité de la température à l'existence d'un flux thermique et interpréter son sens. Citer des ordres de grandeur de conductivité thermique pour des matériaux dans le domaine de l'habitat.
Analogie électrique dans le cas du régime stationnaire	Définir la résistance thermique. Exploiter l'analogie électrique lors d'un bilan thermique.
Loi de Newton	Exploiter la loi de Newton fournie pour prendre en compte les échanges conducto-convectifs en régime stationnaire.
Équation de la chaleur sans terme source dans le cas d'une conduction thermique unidirectionnelle	Établir l'équation de la diffusion thermique dans le cas unidimensionnel. Interpréter qualitativement l'irréversibilité du phénomène. Relier le temps et la longueur caractéristiques d'un phénomène de diffusion thermique au coefficient de diffusion thermique par une analyse dimensionnelle.