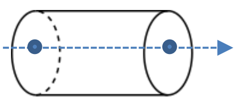
colle N°22 : 02 au 05 Avril 2024

▪ Formulaire : chapitres MK1 à MK6, EM1, EM2, EM3, EM4

1. Un conducteur cylindrique de conductivité γ, de longueur L et de section S, d'axe (Ox) de vecteur unitaire $\overrightarrow{u_x}$, est placé dans un champ électrique $\vec{E}$ parallèle à son axe. Le courant créé est supposé uniforme sur une section du conducteur. Rappeler la forme locale et la forme intégrale de la loi d'Ohm en précisant bien les notations. En déduire la valeur de la résistance du conducteur en fonction des caractéristiques du conducteur.



Loi d'ohm locale : $\vec{j}(x) = \gamma\vec{E}$ *donc* $\vec{j}(x) = j(x)\,\overrightarrow{u_x}$; $I = \iint \vec{j}.\overrightarrow{dS} = \iint j.dS = j(x)S = \gamma E(x)S$;

Or $dV = -\vec{E}.d\overrightarrow{OM}$ *avec* $U = \int_{V2}^{V1} dV = V1 - V2 = \Delta V = -\int_{M2}^{M1} \vec{E}.d\overrightarrow{OM} = +\int_{M1}^{M2} \vec{E}.d\overrightarrow{OM} = EL$;

loi d'Ohm globale : $R = \frac{U}{I} = \frac{EL}{\gamma E(x)S} = \frac{L}{\gamma\, S}$

2. ❤ ❤ Un conducteur cylindrique infini de rayon a est parcouru par un courant d'intensité I uniformément réparti dans toute section du conducteur. Exprimer le vecteur densité de courant volumique $\vec{j}$ en fonction de I et a. Calculer le champ magnétique créé en tout point de l'espace.

a) $I = \iint_{(\Sigma)} \vec{j}.\overrightarrow{dS} = jS = j\pi a^2$, soit $j = \frac{I}{\pi a^2}$ et $\vec{j} = \frac{I}{\pi a^2}\vec{e}_z$

b) Eude des symétries et invariances : $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$

Contour d'Ampère : ici, cercle de rayon r *passant par le point M étudié (attention !l' orienter !) ; calcul de la circulation :*

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B}.d\overrightarrow{OM} = \oint_{(\Gamma)} B(r)\vec{e}_\theta.r\,d\theta\ \vec{e}_\theta = 2\pi r B(r)$$

c) Courant enlacé : si $r \geq a$, $I_{enlacé} = I$; si $r \leq a$, $I_{enlacé} = \iint_{(\Sigma)} \vec{j}.\overrightarrow{dS} = \frac{I}{\pi a^2}\vec{e}_z.\pi r^2\vec{e}_z = \frac{Ir^2}{a^2}$

d) théorème d'Ampère : $\oint_{(\Gamma)} \vec{B}.d\vec{M} = \mu_0\, I_{enlacé}$

si $r \leq a$, *alors* $\vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\frac{r}{a^2}\vec{e}_\theta$; *si* $r \geq a$, *alors* $\vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$.

3. ❤ On considère un solénoïde d'axe Oz et de centre O, de longueur infinie, constitué de spires circulaires jointives enroulées sur un cylindre de rayon R, parcourues par un courant d'intensité I. Soit $n = \frac{N}{L}$ le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde. On admet que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul.

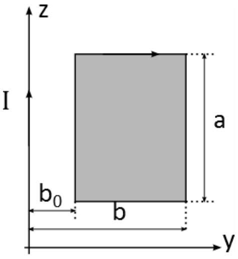
Symétries et invariances : $\vec{B}(M) = B_z(r)\vec{e}_z = B(r)\vec{e}_z$

Contour d'Ampère (attention ! l'orienter !) : ici, théorème d'Ampère deux fois de suite : rectangle de longueur L *quelconque passant par le point M étudié à l'intérieur du solénoïde, de hauteur* h *telle que, dont les deux parties horizontales sont repérées par les distances à l'axe* r_i *et* r_j *:*

Le contour d'Ampère est entièrement à l'intérieur du solénoïde : circulation : $\oint_{(\mathcal{C}_1)} \vec{B}.d\overrightarrow{OM} = \big(B(r_1) - B(r_2)\big)L$ *et* $I_{enlacé} = 0$ *: conclusion : champ intérieur uniforme*

- *Le contour d'Ampère est à cheval entre l'intérieur et l'extérieur du solénoïde ;* $\oint_{(\mathcal{C}_1)} \vec{B}.d\overrightarrow{OM} = (B_{int} - B_{ext})L = B_{int}L$ *et* $I_{enlacé} = \mathrm{nLI}$ *: conclusion :* $\vec{B} = \mu_0 n\, I\, \vec{e}_{axe}$ *à l'intérieur du solénoïde. Champ uniforme, lignes de champ parallèles à l'axe.*

4. Un fil infini $(z'z)$ est parcouru par un courant I qui crée un champ magnétique $\vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$. Un cadre rectangulaire orienté est disposé dans le plan yOz.



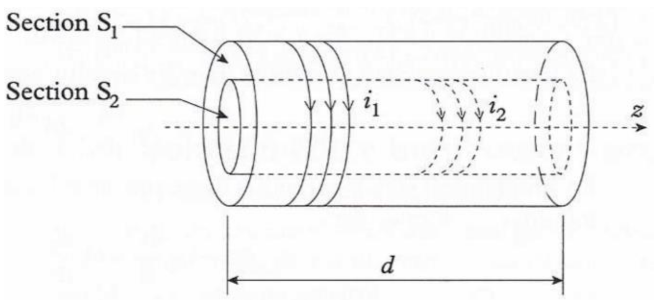
Calculer le flux du champ magnétique créé par le fil à travers le cadre en fonction de μ_0, I, a, b et b_0.

$$\Phi = \iint \vec{B}.\vec{dS} = \int_{b_0}^{b} \frac{\mu_0\, I}{2\pi r}\vec{e}_\theta . a\, dr\vec{e}_\theta = \int_{b_0}^{b} \frac{\mu_0\, I}{2\pi r} a\, dr = +\frac{\mu_0\, I\, a}{2\pi}\, ln\left(\frac{b}{b_0}\right)$$

5. ❤️❤️ Considérons un solénoïde d'axe Oz, de longueur $\ell = 40$ cm, de section $S = 20$ cm^2, contenant $N = 200$ spires, parcouru par un courant I. Il crée un champ magnétique $\vec{B}_{int} = \mu_0 nI\,\vec{e_z}$ à l'intérieur du solénoïde. Exprimer et calculer son inductance propre L. Données : $\mu0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}.

- *Orienter I puis $d\vec{S}$ avec I.*
- *Calcul du flux de $\vec{B}_{int}$ à travers une spire de la bobine :* $\Phi_1 = \iint_{1\ spire} \vec{B}_{int} \cdot d\vec{S} = \mu_0 nIS = \frac{\mu_0 NIS}{\ell}$
- *Calcul du flux à travers les N spires de la bobine :* $\Phi_N = N\Phi_1 = \frac{\mu_0 N^2 IS}{\ell}$
- *L'inductance de la bobine longue est :* $L = \frac{\Phi}{I}$: $\boldsymbol{L = \frac{\mu_0\, N^2\, S}{\ell}}$ *A.N. :* $L = 0{,}25\ mH$

6. ** On considère 2 bobines longues (ou solénoïdes) Γ_1 et Γ_2, de même axe (Oz) et de même longueur d, disposées comme indiqué sur la figure ci-contre. On appelle S_1 et S_2 leurs sections et N_1 et N_2 leurs nombres de spires. Déterminer l'inductance mutuelle M entre les deux circuits.

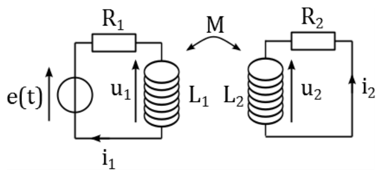


Calcul du flux Φ_{12} du champ créé par le circuit 1 à travers le circuit 2 ou du flux Φ_{21} du champ créé par le circuit 2 à travers le circuit 1 : on a alors $\Phi_{12} = Mi_1$ et $\Phi_{21} = Mi_2$ donnant la même mutuelle ; on choisit donc le calcul le plus simple, ici Φ_{12}.

- *Orienter i_1 et i_2 puis $d\vec{S}_2$ avec i_2.*
- *Calcul du flux de $\vec{B}_1$ à travers une spire de la bobine :* $\varphi_{12} = \iint_{1\ spire\ de\ C2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \mu_0 \frac{N_1 i_1 S}{\ell}$
- *Calcul du flux à travers les N_2 spires de la bobine du circuit 2 :* $\Phi_{12} = N_2\varphi_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 i_1 S}{\ell} = Mi_1$ *d'où* $M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{\ell}$

7. **Considérons les deux circuits couplés suivants : un circuit (R_1, L_1) série alimenté par une source de tension $e(t) = v_1(t)$ couplé par mutuelle avec un circuit (R_2, L_2) série.

La source de tension délivrant une tension sinusoïdale $e(t) = v_1(t) = E\cos(\omega t)$, on suppose le régime sinusoïdal forcé établi. Montrer que le couplage entre les deux circuits est équivalent, vu du circuit 1, à un unique dipôle d'impédance $\underline{Z}$ dans laquelle interviennent les caractéristiques des deux circuits.



En écrivant la loi des mailles en complexes et en exploitant les caractéristiques des dipôles sous forme d'impédances complexes :

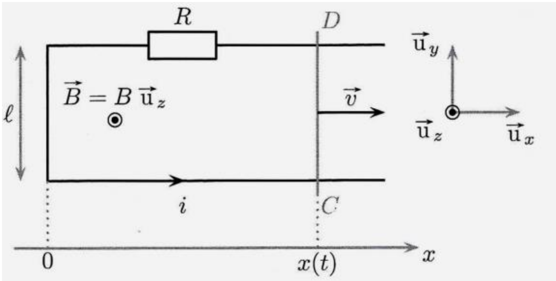
$$\begin{cases} \underline{v_1} = (jL_1\omega + R_1)\underline{i_1} + jM\omega\underline{i_2} & (1) \\ 0 = (jL_2\omega + R_2)\underline{i_2} + jM\omega\underline{i_1} & (2) \end{cases}$$

Avec (2), on obtient : $\underline{i_2} = -\frac{jM\omega\underline{i_1}}{R_2 + jL_2\omega}$; *dans (1) :* $\underline{v_1} = \left(jL_1\omega + R_1 + \frac{(M\omega)^2}{R_2 + jL_2\omega}\right)\underline{i_1} = \underline{Z_1}\ \underline{i_1}$

Par identification : $\underline{Z_1} = jL_1\omega + R_1 + \frac{(M\omega)^2}{R_2+jL_2\omega}$

- *dans laquelle interviennent : Les caractéristiques du circuit (1) (R_1, L_1), mais aussi celles du circuit (2) (R_2, L_2) et du couplage inductif (M); la fréquence délivrée par le générateur (pulsation ω)*

8. ❤❤ On considère une barre métallique posée sur deux rails conducteurs ; la distance entre les 2 points de contact est ℓ = CD.



On note R la résistance du circuit électrique, supposée constante.
La barre [CD] est la seule partie mobile du circuit. Elle est mise en mouvement par un opérateur qui exerce une force $\overrightarrow{F_{op}} = F_{op}\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{cte}$.
L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{e_z}$ orthogonal au plan des rails. On négligera les phénomènes d'auto-induction ainsi que les frottements.

Effectuer une analyse qualitative des phénomènes mis en jeu, puis établir l'équation électrique et l'équation mécanique vérifiées par le système.

⇨ ***Analyse qualitative :*** *la force exercée par l'opérateur met en mouvement la barre, ce qui augmente la surface du circuit donc le flux de $\overrightarrow{B_0}$: d'après la loi de Faraday, apparition d'une fém induite donc d'un courant induit dans le circuit ; la barre est alors soumise à une force de Laplace qui vient, selon la loi de modération de Lenz, s'opposer à la force de l'opérateur (force de freinage)*

⇨ ***Equation électrique***

1. *Orienter i : Choix orientation : Orientation arbitraire de i.*
2. *Orienter la surface*
3. *Calcul du flux :* $\Phi = \iint \vec{B}.\overrightarrow{dS} = Bax$
4. *Loi de Faraday :* $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ *or* $\Phi = BS = Bax$, *donc* $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bav = e$
5. *Schéma électrique équivalent, puis équation électrique :*

Loi des mailles et caractéristique des dipôles : $e - Ri = 0$ *soit* $Ri = -Bav$ *(E.E.)*

⇨ ***Equation mécanique***

1. *Système ;* 2. *Bilan des actions mécaniques extérieures : poids $\vec{P}$; réactions des rails $\vec{R}$ (normale car pas de frottements) ; Force $\overrightarrow{Fop}$; Force de Laplace : $\overrightarrow{F_{Laplace}} = iBa\,\overrightarrow{u_x}$ (attention !!! se déplacer dans le sens de i le long de la tige !!)*

3. PFD appliqué à la tige 4. projeté sur $\overrightarrow{ux}$: $m\frac{dv}{dt} = Fop + iBa$ *(E.M.)*

9. ❤❤ Suite des rails de Laplace générateur (question précédente). On donne les équations électrique et mécanique obtenues : $Ri = -Bav$ *(E.E.)* et $m\frac{dv}{dt} = Fop + iBa$ *(E.M.)* établir l'expression de la vitesse de la barre ; commenter.

On découple le système : $m\frac{dV}{dt} = F_{op} - (B^2a^2/R)v$

La fem induite génère une force (de Laplace) de type frottement fluide $-(B^2a^2/R)v$ *(cf loi de modération de Lenz : elle s'oppose au mouvement lui ayant donné naissance)*

Equation différentielle en v : $\dot{v} + \frac{v}{\tau} = \frac{Fop}{m}$ *avec* $\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{mR}}{(\boldsymbol{Ba})^2}$

Résolution en supposant la vitesse initiale nulle : $v = v_{lim}(1 - \exp(-t/\tau))$ *avec* $v_{lim} = F_{op}\tau/m = F_{op}R/(\boldsymbol{Ba})^2$.

10. Suite des rails de Laplace générateur (question précédente). On donne les équations électrique et mécanique obtenues : $Ri = e = -Bav$ (E.E.) et $m\frac{dv}{dt} = Fop + iBa$ (E.M.) établir le bilan énergétique associé ; commenter.

Méthode :

- *Multiplier (EE) par i : puissances électriques*
- *Multiplier (EM) par v : puissances mécaniques*
- *Elimination du terme de couplage*

On multiplie (EE) par i : $ei = Ri^2 = -Ba\,\dot{x}\,i$

On multiplie (EM) par $\dot{x}$: $m\ddot{x}\dot{x} = F\dot{x} + F_{Lx}\dot{x} = \frac{d\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)}{dt} = F\dot{x} + Bia\,\dot{x}$

- ***Terme de couplage $Ba\dot{x}i$***

$ei = -Ba\dot{x}i$ *puissance fournie par le générateur induit*

$F_{Lx}\dot{x} = Ba\dot{x}i$ *puissance fournie par les forces de Laplace (négative, force opposée au déplacement)*

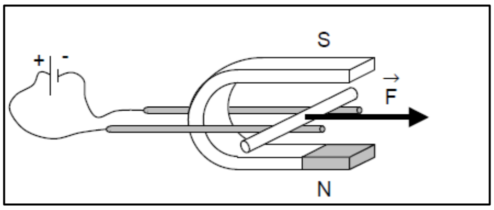
*La somme de ces deux puissances est nulle. Il y a c**onversion de la puissance mécanique apportée par l'opérateur en puissance cinétique (qui met la tige en mouvement) et en puissance électrique, dissipée par effet Joule.***

On admettra que cette propriété est toujours vraie : $\mathcal{P}_{induction} + \mathcal{P}_{Laplace} = 0$

D'où $\frac{d\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)}{dt} = F\dot{x} - Ri^2 = \frac{dEc}{dt}$

La puissance mécanique apportée par l'opérateur est convertie en puissance cinétique (qui met la tige en mouvement) et en puissance électrique, dissipée par effet Joule.

11. ❤️ On reprend le dispositif de rail de Laplace décrit dans la question 8 « rail de Laplace générateur », le dispositif étant cette fois-ci alimenté par un générateur de tension continue E à partir de l'instant initial, sans intervention d'un opérateur extérieur. On négligera à nouveau les phénomènes d'auto-induction ainsi que les frottements. Faire une analyse qualitative des phénomènes mis en jeu puis établir les équations électrique et mécanique vérifiées par le système.



⇨ ***Analyse qualitative :*** *Le générateur permet la circulation d'un courant électrique qui, en présence du champ magnétique, va générer une force de Laplace sur la tige. Cette force sur la barre la met en mouvement, ce qui augmente la surface du circuit donc le flux de $\overrightarrow{B_0}$: d'après la loi de Faraday, apparition d'une fém induite (venant compenser E selon la loi de modération de Lenz) donc d'un courant induit dans le circuit venant s'ajouter (compenser) à celui imposé par le générateur.*

⇨ ***Equation électrique***

6. *Orienter i : Choix orientation : Orientation arbitraire de i, ici de préférence de manière à ce que la source de tension soit en convention générateur*
7. *Orienter la surface*
8. *Calcul du flux :* $\Phi = BS = Bax$
9. *Loi de Faraday :* $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ *or* $\Phi = BS = Bax$, *donc* $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bav = e$
10. *Schéma électrique équivalent*
11. *équation électrique :*

Loi des mailles : $E + e = Ri$ *soit* $Ri = E - Bav$ *(E.E.)*

⇨ ***Equation mécanique***

La tige subit : *poids $\vec{P}$*

réaction des rails $\vec{R}$ (normale car pas de frottements)

Force de Laplace : $\overrightarrow{F_{Laplace}} = iBa\,\overrightarrow{u_x}$ *(attention !!! se déplacer dans le sens de i le long de la tige !!)*

PFD appliqué à la tige projeté sur $\overrightarrow{ux}$ *:* $m\frac{dv}{dt} = iBa$ *(E.M.)*

Système d'équations différentielles couplées :

(force de laplace exercée sur la barre $\propto$ *i, avec i reliée au déplacement de la barre (cf induction) d'où couplage)*

Equation électrique : $i = \frac{E-Bav}{R}$ (EE)

Equation mécanique : $\frac{mdv}{dt} = Bia$ (EM)

Vitesse de la tige : $v = \frac{E}{Ba}\left(1 - exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$ $avec\ \tau = \frac{mR}{(Ba)^2}$

Intensité dans le circuit : $i = \frac{E}{R}exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

Au programme des exercices

Electromagnétisme

✓ Chapitre 2 : Conduction électrique Attention !!! pas d'exercices sur ce chapitre pour les ❤

Notions et contenus	Capacités exigibles
5. Conduction électrique	
Courant dans un conducteur	Définir le vecteur densité de courant. Établir l'équation de conservation de la charge à une dimension en régime variable. Énoncer sa généralisation à trois dimensions puis expliquer que le vecteur densité de courant est à flux conservatif en régime stationnaire. Énoncer la loi d'Ohm locale. Expliquer l'effet Joule, définir la résistance électrique dans un conducteur et présenter le lien avec la conduction thermique en régime stationnaire. Exprimer la condition d'application de l'ARQS en fonction de la taille du circuit et de la fréquence des signaux.

✓ Chapitre 3 : Magnétostatique

Notions et contenus	Capacités exigibles
6. Magnétostatique du vide	
Effets magnétiques d'un courant de charges	Décrire un dispositif permettant de réaliser un champ magnétique quasi uniforme. Citer des ordres de grandeur de champs magnétiques : au voisinage d'aimants, dans une machine électrique, dans un appareil d'IRM, dans le cas du champ magnétique terrestre. Définir la notion de ligne de champ magnétostatique. Énoncer la relation donnant la force de Laplace s'exerçant sur un élément de circuit filiforme parcouru par un courant et placé dans un champ magnétostatique. Identifier les propriétés de symétrie et d'invariance d'une distribution de courant. Tracer l'allure des cartes de champs magnétiques pour un aimant droit, un fil rectiligne, une spire circulaire, une bobine longue et un tore.
Équation de Maxwell-Ampère de la statique, théorème d'Ampère et équation de Maxwell relative au flux du champ magnétique	Énoncer le théorème d'Ampère et le relier à l'équation de Maxwell-Ampère de la statique. Énoncer l'équation de Maxwell relative au flux du champ magnétique. Utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie (fil infini, câble coaxial, nappe de courant supposée « infinie », tore, solénoïde « infini » en admettant que le champ magnétique est nul à l'extérieur).

	Énoncer les relations de passage du champ magnétostatique.

✓ Chapitre 4 : Phénomènes d'induction

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
7. Lois de l'induction	
Flux d'un champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté	Évaluer le flux d'un champ magnétique uniforme à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté plan.
Loi de Faraday Courant induit par le déplacement relatif d'une boucle conductrice par rapport à un aimant ou un circuit inducteur. Sens du courant induit	**Décrire, mettre en œuvre et interpréter des expériences illustrant les lois de Lenz et de Faraday.**
Loi de modération de Lenz	Utiliser la loi de Lenz pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés.
Force électromotrice induite, loi de Faraday	Utiliser la loi de Faraday en précisant les conventions d'algébrisation.
8. Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps	
Auto-induction Flux propre et inductance propre Étude énergétique	Différencier le flux propre des flux extérieurs. Utiliser la loi de modération de Lenz. Évaluer l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur, le champ magnétique créé par la bobine est admis comme étant équivalent à celui déterminé en régime stationnaire. **Mesurer la valeur de l'inductance propre d'une bobine.** Conduire un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent. Définir la notion de densité volumique d'énergie magnétique à l'aide de l'exemple du solénoïde infini. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental permettant de mesurer l'énergie emmagasinée par une bobine.**
Induction mutuelle entre deux bobinages	Définir les flux mutuels. Indiquer l'égalité des inductances mutuelles. Conduire un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction et d'induction mutuelle en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent. Définir le couplage parfait de deux circuits. **Mettre en œuvre un protocole expérimental utilisant un transformateur utilisé en transformateur de tensions, de courants et adaptateur d'impédance.**
Applications	Expliquer le principe du chauffage inductif, le principe d'une détection ampèremétrique, le fonctionnement d'un alternateur.
9. Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire	
Circuit en translation rectiligne dans un champ magnétique stationnaire. Rail de Laplace	Interpréter qualitativement les phénomènes observés dans le cas du rail de Laplace. Établir les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe.