CHAPITRE MK.7. : ONDES MECANIQUES

I) GENERALITES SUR LES ONDES

A) Les signaux

■ **Signal :** phénomène physique décrit par une ou des grandeurs physiques a priori variables dans le temps dont la donnée fournit une **information**, et ce par le biais de la **modification** de certaines **propriétés de l'espace** (**perturbation**) en un point S correspondant à la **source** du signal (signaux mécaniques, sonores, électriques, etc.).

La source du signal (de la perturbation) dépend de la nature de ce dernier.

La **durée du signal** peut être variable :

- **ébranlement** : émission de durée limitée qui ne se répète pas dans le temps (par ex. secousse unique sur une corde, clap de mains)
- **signal entretenu** (dont les **signaux périodiques**) : émission de longue durée

Dans certains milieux, un **signal** peut **se propager** : après émission du signal en S (source) à l'instant t_0, d'autres points M du milieu ressentent les mêmes modifications de certaines propriétés quelques instants plus tard : le signal s'est propagé de S vers M, la perturbation se propage de proche en proche.

- Cette propagation nécessite du « temps », la grandeur physique y associée au signal va alors dépendre à la fois du temps t et du point M de l'espace considéré (notion de champ) : $y(M, t)$.

B) Les ondes

1) Notion d'onde

■ **Onde** : **propagation** (transport) d'un **signal** (d'une perturbation locale), avec **transport d'énergie et d'information dans l'espace** (de S vers M) **sans déplacement macroscopique (sans transport) de matière**.

La grandeur physique associée à l'onde varie :

- **dans le temps** : à 2 instants différents en un point précis de l'espace, la grandeur physique peut varier
- **dans l'espace** : en 2 points différents de l'espace et au même instant, la grandeur physique peut varier

Il s'agira donc a priori d'une **fonction de plusieurs variables : de l'espace et du temps**.

2) Différents types d'ondes

■ **Nature du phénomène physique mis en jeu**

Ondes mécaniques (dont les ondes sonores), ondes électromagnétiques, ondes de matière et ondes gravitationnelles, ces 2 dernières sortant du cadre de la physique classique.

■ **Caractère longitudinal ou transversal d'une onde**

- **Onde transversale :** la grandeur caractérisant le phénomène est **perpendiculaire** à la direction de propagation de l'onde.
- **Onde longitudinale :** la grandeur caractérisant le phénomène est **parallèle** à la direction de propagation de l'onde.

- ### Autres caractéristiques de la propagation

La propagation d'une onde peut avoir lieu selon **une ou plusieurs directions de l'espace ;** une dimension : ondes unidimensionnelles (corde)**.**

On supposera l'absence de pertes d'énergie, donc d'amortissement ou d'absorption. **L'amplitude du signal** est alors c**onstante** pour une propagation à **1 dimension** (et d**écroissante par atténuation** pour une propagation à **2 ou 3 D**).

II) EQUATION DE PROPAGATION

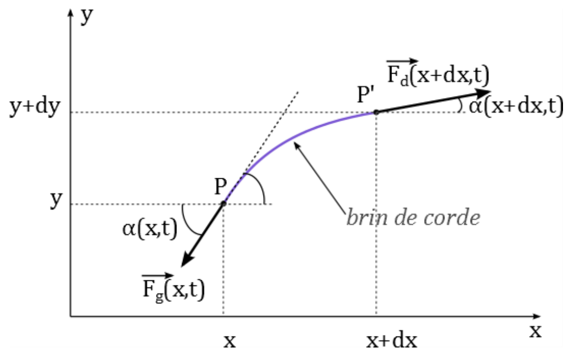
A) Ondes transversales sur une corde vibrante

1) Hypothèses du modèle

- On s'intéresse à la propagation d'une onde sur une corde « idéale », supposée :
  - **Inextensible** (aucune élasticité) **sans raideur** (infiniment souple) ;
  - **homogène,** de masse linéique μ (masse par unité de longueur de la corde) ;
  - **tendue horizontalement** avec une force constante F_0 et **excitée verticalement** à son extrémité A.
- Le **poids de la corde est négligé** devant la tension de la corde (hypothèse valable pour une corde bien tendue), de telle sorte qu'**à l'équilibre elle est horizontale** (position $x'x$).

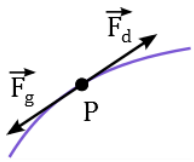
Un point P de la corde est repéré par son abscisse x (fixe) et son ordonnée y, susceptible de varier au cours du temps. **La déformation du milieu est caractérisée par la fonction :** $y(x,t)$**.**

Nous allons étudier les petits mouvements au voisinage de cet équilibre selon le modèle suivant :



- On **néglige tout amortissement** ;
- L'élément de corde situé au point $P_0(x, y = 0)$ à l'équilibre se trouve à un instant t quelconque de la propagation au point $P(x, y(x,t))$, c'est-à-dire qu'on néglige son déplacement selon (Ox). Les **déplacements** des points de la corde sont alors dits **transversaux**.
- On ne considère que des **déplacements de faible amplitude.** En notant $\alpha(x,t)$ l'angle que fait la tangente à la corde en P avec l'horizontale, les mouvements étant de faible amplitude, α est faible et on limite son développement limité à l'ordre 1 : $cos(\alpha) \approx 1$ et $sin(\alpha) \approx tan(\alpha) \approx \alpha$
- L'hypothèse d'une **corde sans raideur** (infiniment souple) implique que si on considère un point d'abscisse x de la corde, l'action exercée par la partie gauche de la corde sur la partie droite se réduit à une force tangente à la corde et opposée à l'action exercée par la partie droite sue la partie gauche.

  Si on note $\vec{F}$ la tension de la corde orientée de gauche à droite, on peut écrire, en un point P, à la date t :

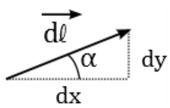


$$\boldsymbol{\overrightarrow{F_g}(x,t) = -\vec{F}(x,t) \qquad \overrightarrow{F_d}(x,t) = +\vec{F}(x,t)}$$

2) Détermination de l'équation de propagation

- **Système étudié :** Brin de corde compris entre les points P et P', soit entre les abscisses x et $x + dx$, de longueur élémentaire $d\ell$ et de masse dm.

On introduit la **masse linéique** μ de la corde (masse par unité de longueur) : $\boxed{\mathbf{dm} = \mu\, dl}$



On a $\quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}\ell \cos\alpha \approx \mathrm{d}\ell \;$ (avec $\alpha \ll 1$), soit $\mathrm{d}m \approx \mu\, \mathrm{d}x$

- **Bilan des forces exercées sur le système :**
  - Tension du reste de la corde côté gauche, $\overrightarrow{F_g}(x,t) = -\vec{F}(x,t)$, en x
  - Tension du reste de la corde côté droit, $\overrightarrow{F_d}(x+\mathrm{d}x,t) = +\vec{F}(x+\mathrm{d}x,t)$ en $x+\mathrm{d}x$
  - Le poids de la corde est négligé.

- **Relation fondamentale de la dynamique** dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

$$\mathrm{d}m\,\vec{a} = \overrightarrow{F_g} + \overrightarrow{F_d}$$
$$\mu\,dx\,\vec{a} = -\vec{F}(x,t) + \vec{F}(x+\mathrm{d}x,t)$$

En coordonnées cartésiennes, l'accélération $\vec{a}$ s'écrit dans le cas général : $\vec{a} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\overrightarrow{u_z}$

- **Projection sur Ox de vecteur unitaire $\overrightarrow{u_x}$**

Le mouvement étant par hypothèse considéré transversal (mouvement vertical, pas de mouvement selon $\overrightarrow{u_x}$) : $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$ d'où en projetant sur l'axe Ox : $\vec{a}.\overrightarrow{u_x} = 0$.

Projection du PFD : $0 = -F(x,t)\cos\big(\alpha(x,t)\big) + F(x+\mathrm{d}x,t)\cos\big(\alpha(x+dx,t)\big)$

soit dans l'approximation des petits angles, en limitant les calculs à l'ordre 1 (soit $cos(\alpha) \approx 1$) :

$$0 = -F(x,t) + F(x+dx,t) \quad \text{ou} \quad F(x,t) = F(x+dx,t)$$

La tension du fil est uniforme (indépendante de la position x le long de la corde).

La condition aux limites imposée au bout de la corde par l'opérateur qui la tend impose $\boldsymbol{F(x,t) = F_0}$**,** de telle sorte que cette tension **ne dépend pas non plus du temps.**

$\boldsymbol{F(x,t) = F_0}$**, indépendante de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{t}$**

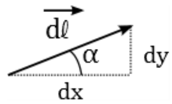
- **Projection sur Oy de vecteur unitaire $\overrightarrow{u_y}$**

$$\mu\,dx\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -F(x,t)\sin\big(\alpha(x,t)\big) + F(x+dx,t)\sin\big(\alpha(x+dx,t)\big)$$

soit dans l'approximation des petits angles, en limitant les calculs à l'ordre 1 (soit $sin(\alpha) \approx \alpha$):

$$\mu\,dx\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -F_0\,\alpha(x,t) + F_0\,\alpha(x+dx,t) = F_0\,[\alpha(x+dx,t) - \alpha(x,t)]$$

Or $\alpha(x+dx,t) - \alpha(x,t) = \frac{\partial \alpha}{\partial x}dx$ D'où $\mu\,dx\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_0\frac{\partial \alpha}{\partial x}dx$, soit $\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_0\frac{\partial \alpha}{\partial x}$



En remarquant que $\alpha \approx \tan\alpha \approx \frac{\partial y}{\partial x}$ est la pente de la corde, on a $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

Et on obtient une équation qui pilote l'évolution de la déformation de la corde $y(x,t)$: $\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

- **Equation d'onde de d'Alembert :**

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F_0}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

Avec μ la **masse linéique** de la corde (masse par unité de longueur, en kg.m^{-1}) : $\boxed{\mathbf{dm} = \mu\,dl}$ $[\mu] = \frac{M}{L}$

- **Célérité de l'onde :** $\boxed{c = \sqrt{\frac{F_0}{\mu}}}$ **. en $m.s^{-1}$.**

La célérité c augmente avec la tension de la corde et diminue lorsque la masse linéique de la corde augmente.

Application 3 :

B) Généralisation

1) Forme générale de l'équation d'onde de d'Alembert

De nombreux autres phénomènes physiques mènent à une équation d'onde de d'Alembert de ce type ; on peut par exemple citer la propagation d'ondes sonores longitudinales dans un solide.

- Forme générale de **l'équation d'onde de d'Alembert scalaire à une dimension** :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

c célérité de l'onde en $m.s^{-1}$.

Elle peut également être à plusieurs dimensions ou vectorielle, comme on le verra en électromagnétisme.

2) Célérité de l'onde

La célérité c peut s'interpréter comme la vitesse de propagation de l'onde pour des ondes planes progressives.

Lorsqu'une onde se propage avec une **célérité c constante**, chaque point M à la distance d de la source dans la direction de propagation reproduit le signal de la source avec un **retard (terme de propagation) $\theta = d/c$.**

3) Réponse d'un milieu linéaire : Principe de superposition linéaire

- **Principe de superposition linéaire :** dans le cas d'un milieu linéaire (caractérisé par des équa. diff. linéaires), l'**onde résultante en un point est la somme algébrique des contributions de chaque onde en ce point.**
- Pour des ondes scalaires, soient s_T la fonction d'onde résultante et s_i les fonctions d'ondes individuelles :

  $s_T = \sum_{i=1}^{N} s_i$. **Superposition de 2 ondes :** $s_M(t) = s_{M1}(t) + s_{M2}(t)$

III) SOLUTIONS DE L'EQUATION DE PROPAGATION

A) Propagation unidimensionnelle d'un ébranlement

1) Onde plane progressive

Pour modéliser le phénomène de propagation, on se restreindra à l'étude d'**ondes progressives planes**, qui se propagent **sans atténuation ni déformation à vitesse constante** dans la direction d'un axe (Ox) dans un milieu infini et homogène (dans la suite une corde).

- **Onde progressive** se propageant dans la direction de l'axe des x : qui se propage **dans une direction et un sens bien déterminé (pas de « retour ») ;**
- **Onde plane :** La grandeur caractéristique de l'onde (fonction d'onde) est ∀ point M de l'espace uniquement fonction de **x (direction de propagation) et t**, et non des coordonnées y et z du point M.

Une telle onde est représentée mathématiquement par une fonction $s(x,t)$; elle représente **la valeur du signal** mesurée à l'abscisse x, à l'instant t.

2) Première expression de l'onde progressive : étude temporelle

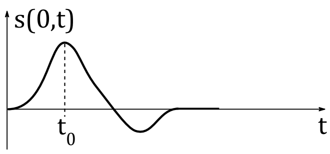
a) Présentation et évolution temporelle à la source

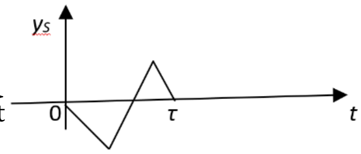
Notations : Soient Ox la direction de propagation, $y(x,t)$ (ou $f_x(t)$ ou $s(x,t)$ sur les figures) la grandeur correspondant à la perturbation.

S : point source d'abscisse $\boldsymbol{x_S}$ (en général $\boldsymbol{x_S} = 0$) ;

M_i : point quelconque le long de l'axe, d'abscisse x_i.

Graphe $y\,(x = x_S, t) = y_S\,(t)$: caractérise le signal à la source (enregistrement (**film**) de l'évolution de la perturbation au point S**.**





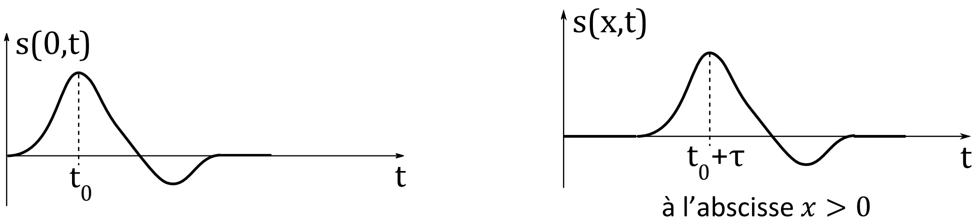
Largeur temporelle τ du signal : durée de la perturbation.

b) *Evolution temporelle en un point M quelconque*

■ Cas d'une onde se propageant dans le sens des x croissants

On considère une onde progressive, se propageant avec la célérité c dans la direction de l'axe (Ox) et dans le sens des x croissants. La figure 1 représente le signal mesuré à l'abscisse 0, en fonction du temps, ainsi que le signal mesuré en un point M d'abscisse $x > 0$.

à l'abscisse 0



à l'abscisse $x > 0$

Onde se propageant sans atténuation ni déformation dans le sens positif de (Ox), en deux points différents.

Le signal observé en $\boldsymbol{0}$ au cours du temps est observé ensuite en $\boldsymbol{x}$, mais avec un retard $\boldsymbol{\tau}$, qui correspond au temps nécessaire pour que l'onde se propage de 0 à x, et parcoure donc cette distance.

La propagation de l'onde se faisant à la célérité c, la durée de propagation de l'onde de 0 à x est $\boldsymbol{\tau = \frac{x}{c}}$.

Signal observé en $x = 0$ à l'instant t : $s(x = 0, t) = s(0, t)$

Signal observé en x : identique à celui observé en $x = 0$, mais observé à $t + \tau$; soit $s(0, t) = s(x, t + \tau)$,

Ou encore : le signal observé à l'instant t en x s'est propagé depuis $x = 0$ en un temps τ; on pouvait donc l'observer en $x = 0$ à $t - \tau$, ce qui s'écrit :

$$s(x, t) = s(0, t - \tau) \qquad \text{soit} \qquad \boldsymbol{s(x, t) = s\left(0, t - \frac{x}{c}\right)}$$

$\boldsymbol{s\left(0, t - \frac{x}{c}\right)}$ est finalement une fonction d'une seule variable, $\boldsymbol{t - \frac{x}{c}}$, notée $f\left(t - \frac{x}{c}\right) = \boldsymbol{s(x, t) = s\left(0, t - \frac{x}{c}\right)}$.

Le signal dépend bien des 2 variables x et t d'espace et de temps, mais ces 2 variables sont couplées par le biais du phénomène de propagation de l'onde.

.

Une **onde progressive se propageant dans la direction de l'axe $(\boldsymbol{Ox})$, dans le sens positif de cet axe,** sans atténuation ni déformation, est de la forme mathématique suivante : $\boldsymbol{s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)}$**,** où f est une fonction quelconque caractéristique de la forme de l'onde, dont l'argument a la dimension d'un temps**.**

Réciproquement, toute fonction de ce type correspond à une onde plane progressive dans le sens des x croissants.

Remarque : Cette expression reste **valable pour $\boldsymbol{x < 0}$:** Le signal observé en $x < 0$ se propage vers 0 où il arrive plus tard, avec un retard $\boldsymbol{\tau = \frac{x}{c}}$.

■ Cas d'une onde se propageant dans le sens des x décroissants

Une **onde progressive se propageant dans la direction de l'axe $(\boldsymbol{Ox})$, dans le sens négatif de cet axe (onde régressive),** sans atténuation ni déformation, est de la forme mathématique suivante : $\boldsymbol{s(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)}$ **,** où g est une fonction quelconque dont l'argument a la dimension d'un temps**.**

3) Seconde expression de l'onde progressive : étude spatiale

L'étude spatiale de l'onde correspond à **une photo du milieu à un instant donné.**

- A l'instant t, la perturbation s'est propagée et perturbe une zone caractérisée par **sa largeur spatiale δ.**
- A un instant ultérieur t', le graphe $y(x)$ est le même décalé vers la droite d'une distance $c(t' - t)$

La fig. 2 représente les valeurs du signal à 2 instants différents 0 et $t_1 > 0$ pour la même onde que sur la figure 1.

Figure 2 : Onde se propageant sans atténuation ni déformation dans le sens positif de (Ox), à deux instants différents.

Entre les instants 0 et t, l'onde qui progresse dans le sens positif de l'axe (Ox) se déplace d'une distance δ.

Ainsi la valeur observée à l'instant 0 en x est observée à l'instant t en $x + \delta$: $s(x,t) = s(x - \delta, 0)$

L'onde se propageant à la vitesse c, on a : $\delta = ct$; On peut donc écrire : $\boldsymbol{s(x,t) = s(x - ct, 0)}$

Une **onde progressive se propageant dans la direction de l'axe** (Ox) sans atténuation ni déformation :
- **dans le sens positif de cet axe :** est de la forme $\boldsymbol{s(x,t) = F(x - ct)}$**,** où F est une fonction quelconque dont l'argument a la dimension d'une longueur**.**
- **dans le sens négatif de cet axe (onde régressive) :** est de la forme : $\boldsymbol{s(x,t) = G(x + ct)}$**,** où G est une fonction quelconque dont l'argument a la dimension d'une longueur**.**

C) Commentaires et conséquences

On peut montrer (H.P.) que la **solution la plus générale de l'équation de d'Alembert à une dimension** s'écrit comme la somme d'une onde progressive (vers les $x > 0$) et d'une onde régressive (vers les $x < 0$):

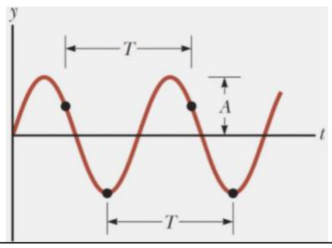
$$\boldsymbol{s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) = F(x - ct) + G(x + ct)}$$

Le passage d'une représentation spatiale à une représentation temporelle implique un renversement de la représentation, soit une courbe qui est la symétrique de la représentation spatiale.

B) Ondes progressives sinusoïdales (ou harmoniques)

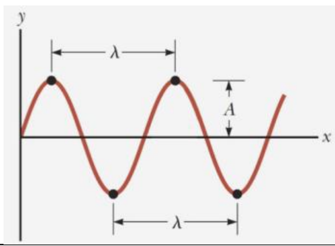
1) Double périodicité des ondes progressives périodiques

Périodicité temporelle T imposée par la source



Evolution au cours du temps d'un point fixe de l'onde sinusoïdale (film de l'onde en un point).

Périodicité spatiale imposée par le milieu



Evolution de l'onde sinusoïdale dans l'espace à un instant *t* donné (photographie à *t* de l'onde).

- **Périodicité temporelle**

La **période temporelle** de l'onde est T (minimale) telle que $\boldsymbol{s(x, t + T) = s(x,t)}$ pour tout (x,t), On définit également la **fréquence (temporelle)** ν ou $\boldsymbol{f} = \frac{1}{T}$ de l'onde.

Pulsation propre : $\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}}$

Périodicité spatiale

La **période spatiale** de l'onde, appelée **longueur d'onde**, est λ telle que $\boldsymbol{s(x+\lambda, t) = s(x,t)}$ pour tout (x, t).

De la même manière que pour la période temporelle, on a $\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$

On introduit parfois également une **fréquence spatiale**, σ, appelée **nombre d'onde**, telle que $\boxed{\sigma = \frac{1}{\lambda}}$.

Analogie

	Période	Fréquence	Pulsation
Périodicité temporelle	T	f ou ν	ω
Périodicité spatiale	$\boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{\sigma}$	$\mathbf{k}$

Dimensions, unités

	$\boldsymbol{\varphi_0}$	T	ω	ν	c	x	k	σ
Dimension	0	T	T^{-1}	T^{-1}	L. T^{-1}	L	L^{-1}	L^{-1}
Unité (SI)	rad	s	Rad. s^{-1}	s^{-1}	m. s^{-1}	m	Rad.m^{-1}	m^{-1}

2) Aspect mathématique de la propagation d'une onde plane progressive harmonique

a) Expression générale

Dans ce paragraphe on considère une onde progressive se propageant dans le sens positif de l'axe (Ox), sans déformation ni atténuation. On parle d'**onde sinusoïdale** (ou **harmonique)**, quand le signal mesuré en tout point est une fonction sinusoïdale du temps.

Une onde plane progressive harmonique (OPPH) ou **sinusoïdale a la forme mathématique suivante :**

$$\boldsymbol{s(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)}$$

- A est l'**amplitude** de l'onde
- $\psi(t,x) = \omega t - kx + \varphi_0$ est la phase instantanée à l'abscisse x et
- φ_0 est la **phase initiale de l'onde à l'origine $\boldsymbol{O}$.**
- ω est la **pulsation** de l'onde
- c est la **célérité** de l'onde
- k est appelé **vecteur d'onde** (en fait, k est la norme du vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}_x$ qui sera défini de façon plus générale)

b) Lien entre les grandeurs spatiales et temporelles

Relation de dispersion

Dans le cas d'une onde plane progressive sinusoïdale, on peut associer au signal $s(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ une grandeur complexe instantanée qu'on peut introduire dans l'équation d'onde de d'Alembert, donnant le résultat suivant :

$$\boxed{|k| = \frac{\omega}{c}}$$

- **Lien entre les périodes spatiales et temporelles**

$\boxed{\lambda = c\,T}$ équivalente à la relation de dispersion : $|k| = \frac{\omega}{c}$

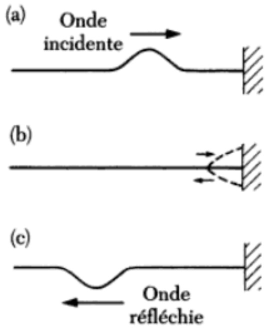
Le signal peut être écrit en fonction de T et λ :

$$s(x,t) = A\cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right)$$

IV) SUPERPOSITION D'ONDES PROGRESSIVES - ONDES STATIONNAIRES

A) Conditions aux limites et ondes stationnaires

1) Phénomène de réflexion à une extrémité fixe

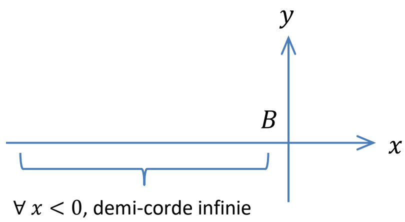


La présence d'une discontinuité dans le milieu de propagation génère un phénomène de réflexion ; ainsi, une corde vibrante attachée à l'une de ses extrémités se réfléchira. Considérons une onde progressive sinusoïdale se propageant sur la corde avec une pulsation ω et une célérité c : la déformation en un point quelconque de la corde peut s'écrire : $y_i\,(x,t) = A_i \cos(\omega t - kx)$.

Caractéristiques de l'onde réfléchie : elle est de même pulsation et de même célérité que l'onde incidente, mais la réflexion introduit un déphasage qui dépend de l'obstacle : $y_r\,(x,t) = A_r \cos(\omega t + kx + \varphi)$.

2) Formulation mathématique de l'onde résultante

a) *Cadre de l'étude*



On considère un milieu unidimensionnel (une corde) délimitée par un point B à son extrémité droite correspondant à un obstacle (corde attachée en B, choisi comme origine des axes).

- Expression de la **condition aux limites** associée à l'obstacle en B :

$$\forall \boldsymbol{t}, \boldsymbol{y}(\mathbf{0}, \boldsymbol{t}) = \mathbf{0}$$

- **Onde incidente :** $y_i(x,t) = A_i \cos(\omega t - kx)$
- **Onde réfléchie :** $y_r(x,t) = A_r \cos(\omega t + kx + \varphi)$ (elle se propage dans le sens indirect, avec un déphasage par rapport à l'onde incidente choisie comme origine des phases introduit par la réflexion)
- **Perturbation totale** en un point M d'abscisse x quelconque :

$$y(x,t) = y_i(x,t) + y_r(x,t) = A_i \cos(\omega t - kx) + A_r \cos(\omega t + kx + \varphi)$$

b) *Exploitation de la condition aux limites*

D'après la condition aux limites (point B fixe), $\forall t, y(0,t) = 0 = A_i \cos(\omega t) + A_r \cos(\omega t + \varphi)$

Soit $\forall t, A_i \cos(\omega t) = -A_r \cos(\omega t + \varphi) = A_r \cos(\omega t + \varphi + \pi)$

Pour que cette égalité soit vraie à tout instant t, nécessairement

$$\begin{cases} A_r = A_i \\ \varphi + \pi = 0\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_r = A_i \\ \varphi = -\pi\ [2\pi] \end{cases}$$

D'où $$y(x,t) = y_i(x,t) + y_r(x,t) = A_i\,[\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx - \pi)]$$

Soit avec $\cos(\alpha - \pi) = -\cos(\alpha)$: $$y(x,t) = A_i\,[\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)]$$

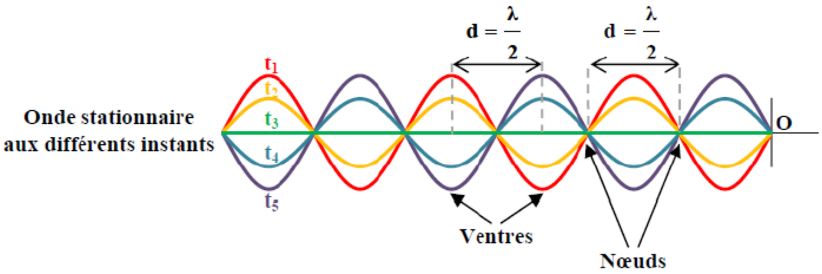
De plus, avec : $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et $\sin(-x) = -\sin x$:

$$y(x,t) = A_i\,[-2\sin(\omega t).\sin(-kx)]$$

$$\boxed{y(x,t) = 2A_i \sin(\omega t).\sin(kx)}$$

Les **variables x et t sont découplées**, on ne retrouve plus le terme caractéristique des ondes progressives.

Une telle équation est caractéristique d'une **onde dite stationnaire**



3) Propriétés de l'onde stationnaire

a) Définition et caractéristiques générales des ondes stationnaires

- **Onde stationnaire unidimensionnelle :** toute onde de la forme $s(x,t) = f(x).g(t)$, dont les **variables** t **et** x **sont séparées**. Une telle onde **ne se propage pas ;** expérimentalement, les extrema par exemple varient de valeur dans le temps mais sont toujours au même endroit.
- La fonction $f(x)$ correspond à **l'enveloppe spatiale** de l'onde tandis que $g(t)$ caractérise sa dépendance temporelle.

- **Cas des ondes stationnaires sinusoïdales :**

La forme la plus générale d'onde stationnaire solution de l'équation de d'Alembert est la suivante :

$$s(x,t) = A\cos(kx + \psi)\cos(\omega t + \varphi)$$

- **Lien entre onde stationnaire et ondes progressives**

Il est également possible de mener la démarche inverse.

Considérons l'onde stationnaire : $s(x,t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)$

A l'aide d'un peu de trigonométrie : $\boldsymbol{s(x,t) = \frac{1}{2} A\cos(\omega t + kx + \varphi + \psi) + \frac{1}{2} A\cos(\omega t - kx + \varphi - \psi)}$

Une onde stationnaire peut donc se décomposer en une **somme de deux ondes de même amplitude se propageant en sens inverses.**

b) Allure des ondes stationnaires

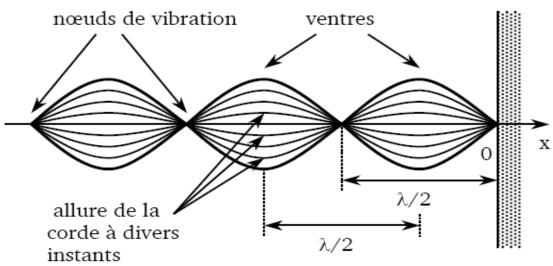
On peut introduire **l'enveloppe spatiale** $\boldsymbol{\mathcal{A}(x)} = |A\cos(kx + \psi)|$: $s(x,t) = \pm\mathcal{A}(x)\cos(\omega t + \varphi)$

La perturbation en un point M d'abscisse x est une fonction sinusoïdale du temps, de même pulsation ω que l'onde qui la fait apparaitre, d'amplitude $\mathcal{A}(x)$ qui dépend de x, donc de sa position dans le milieu.

Cas d'une corde : tout point M oscille « sur place » (perpendiculairement à la corde et la même abscisse x) avec l'amplitude $\boldsymbol{\mathcal{A}(x)} = |A\cos(kx + \psi)|$.

c) Nœuds et ventres

Image de la corde à différents instants :



- **Nœuds de vibration :** points du milieu tels que la perturbation soit nulle à tout instant. Il s'agit de points de la corde ne bougeant jamais, caractérisés par une amplitude d'oscillations nulle $\forall t$.

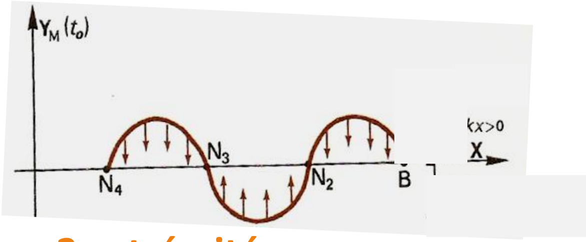
- **Position x_N des nœuds :**

Il y a nécessairement un **nœud en $x = 0$** de par la **condition aux limites ; distance entre 2 nœuds :** $\frac{\lambda}{2}$

Fuseau : zone comprise entre 2 nœuds consécutifs, de taille $\frac{\lambda}{2}$.

- **Ventres** : points du milieu tels que la perturbation a une amplitude d'oscillations maximale.
- **Position des ventres :** Deux ventres successifs sont distants de $\frac{\lambda}{2}$, tandis qu'un ventre et un nœud successifs sont distants de $\frac{\lambda}{4}$. Un ventre se trouve donc au milieu d'un fuseau.

Deux points situés dans un même fuseau (entre deux nœuds consécutifs) vibrent en phase alors que deux points situés de part et d'autre d'un même nœud vibrent en opposition de phase.



B) Oscillations libres d'une corde fixée aux 2 extrémités : modes propres

1) Présentation

On s'intéresse maintenant aux vibrations d'une corde **fixée entre 2 points** D et B fixes (par ex. **instruments à corde**). Elle constitue un milieu de propagation fermé en ses 2 extrémités.

On la perturbe et on la lâche ; la corde est mise en vibration et effectue alors des oscillations dites **libres** (absence de vibreur) à des fréquences qui lui sont propres.

Les conditions aux limites sont incompatibles avec une onde progressive, mais particulièrement bien adaptées à une onde stationnaire, pour laquelle les extrémités seraient des nœuds.

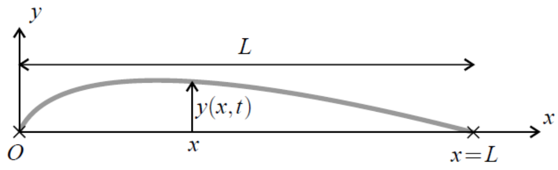
Les **ondes stationnaires** qui peuvent exister en régime libre sont appelées **modes propres de la corde**.

2) Ondes stationnaires sur une corde de longueur L finie

Conditions aux limites

Cherchons la solution sous la forme générale : $y(x,t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)$

Le vibreur est positionné en $x = 0$, l'extrémité de la corde sur la poulie est fixe en $x = L$.



Corde vibrante fixée à ses deux extrémités.

On en déduit **deux conditions aux limites** : $\forall t, y(0,t) = 0$

$\forall t, y(L,t) = 0$

Avec $y(x,t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)$, les conditions aux limites donnent : $\cos(\psi) = 0$ (1)

$\cos(kL + \psi) = 0$ (2)

$(1) \Rightarrow \psi = \pm\frac{\pi}{2}$

$(2) \Rightarrow \cos\left(kL \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(kL) = 0 \quad \Rightarrow k_n L = n\pi,$ avec n entier

Modes propres

Les seules valeurs de k envisageables sont les valeurs $\boldsymbol{k_n = n\frac{\pi}{L}}$, avec n **entier.** La norme du **vecteur d'onde** est donc **quantifiée.**

On en déduit que **la pulsation et la fréquence** sont également **quantifiées,** les valeurs admissibles étant :

$$\omega_n = n\frac{\pi c}{L} \text{ et } f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n\frac{c}{2L}, \quad \text{avec } n \text{ entier}$$

Les modes propres (solutions stationnaires possibles) sont donc donnés par :

$$y_n(x,t) = A_n \cos\left(\boldsymbol{n\frac{\pi c}{L}}\mathbf{t} + \varphi_n\right)\sin\left(\boldsymbol{n\frac{\pi}{L}}x\right) \text{ ; } n \text{ étant un entier.}$$

■ Relation entre L et λ

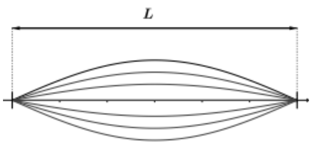
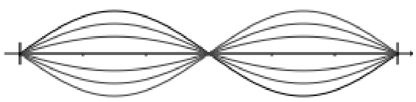
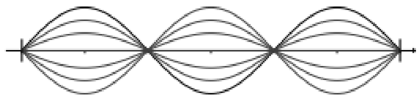
$k_n = n\frac{\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_n}$; On en déduit : $\boldsymbol{L = n\,\frac{\lambda_n}{2}}$

Le **mode fondamental** correspond à $n = 1$: $\boldsymbol{f_1 = \frac{c}{2L}}$, **les** suivants sont des **harmoniques** : $\boldsymbol{f_n = nf_1}$

La longueur de la corde est un multiple entier de la demi-longueur d'onde : $\boldsymbol{L = n\,\frac{\lambda_n}{2}}$.
Le premier mode propre envisageable, dit mode fondamental, correspond au cas de figure où la corde présente un unique fuseau, les 2 nœuds aux extrémités correspondant aux 2 points fixes (conditions aux limites). Il y a ensuite nécessairement un nombre entier de fuseaux pour que les 2 extrémités coïncident avec des nœuds.

$k_n = n\frac{\pi}{L}$	avec n entier
$\omega_n = n\frac{\pi c}{L}$	avec n entier
$f_n = n\frac{c}{2L}$	avec n entier
$L = n\frac{\lambda_n}{2}$	avec n entier

■ Les premiers modes :

		
$\boldsymbol{f_1 = \frac{c}{2L}}$ $\boldsymbol{L = \frac{\lambda_1}{2}}$	$\boldsymbol{f_2 = 2f_1}$ $\boldsymbol{L = 2\,\frac{\lambda_2}{2} = \lambda_2}$	$\boldsymbol{f_3 = 3f_1}$ $\boldsymbol{L = 3\,\frac{\lambda_3}{2}}$

3) Forme générale, superposition de modes propres

Le mouvement le plus général de la corde est obtenu par **superposition linéaire de tous ses modes propres** :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi_n\right)$$

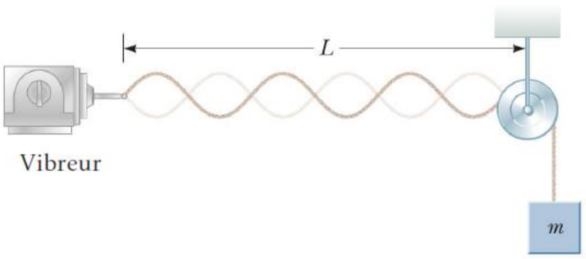
Où A_n et φ_n amplitude et phase à l'origine associées au mode propre n, sont définies en tout point de la corde par les conditions initiales : $y(x,0)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)$.

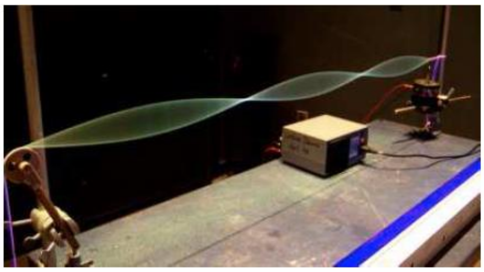
Remarque : Le fondamental définit la fréquence fondamentale du son, et donc la note associée ; plus cette fréquence est faible, plus le son est grave, plus son amplitude est élevée, et plus le son est intense. D'après l'expression ci-dessus, nous avons pour fréquence du fondamental $f_1 = \frac{c}{2L}$: plus la longueur de la corde est élevée, plus la note associée est grave (les cordes d'une contrebasse sont plus longues que celle d'un violon !).

D) Excitations forcées de la corde de Melde

Le dispositif expérimental que l'on va utiliser est constitué d'une corde tendue :

- Un vibreur excite périodiquement D, l'extrémité gauche d'une corde horizontale, qui a donc un mouvement sinusoïdal d'amplitude a et de fréquence f. Le vibreur forçant la corde à vibrer, il s'agit d'**oscillations forcées.**

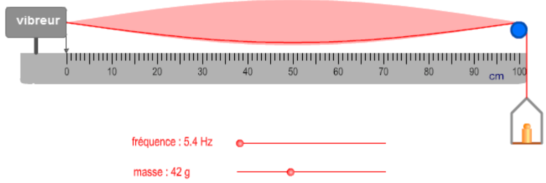




- L'extrémité droite B est considérée fixe (tendue avec une masse accrochée à cette extrémité) : il y a réflexion.
- **Caractéristiques modifiables de la corde :** Longueur L, tension T (liée au poids appliqué), fréquence f du vibreur.

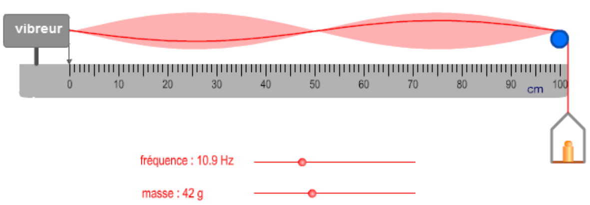
Pour certaines fréquences particulières, on observe un mouvement d'amplitude très supérieure à l'amplitude du vibreur (l'amplitude des fuseaux devient grande) : on dit qu'il y a **résonance**. (**Résonance** : phénomène général correspondant à un maximum de l'amplitude d'une grandeur en cas d'oscillations forcées).

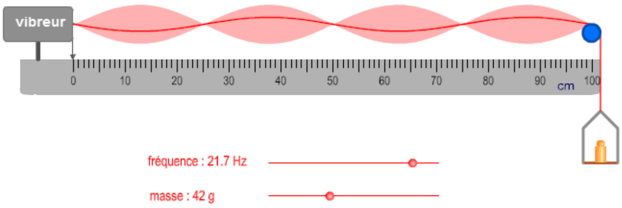
La fréquence de résonance la plus basse, f_1, conduit à un unique fuseau, d'amplitude importante.



$k_n = n\dfrac{\pi}{L}$	avec n entier
$\omega_n = n\dfrac{\pi c}{L}$	avec n entier
$f_n = n\,\dfrac{c}{2L}$	avec n entier
$L = n\dfrac{\lambda_n}{2}$	avec n entier

Pour des fréquences nf_1 avec n entier, n fuseaux apparaissent sur la corde : il y a **résonance pour les multiples de f_1,** qui correspondent aux **fréquences propres** étudiées sur la corde fixée aux deux extrémités.





E) Tuyaux sonores

Un tuyau sonore contient une colonne d'air et constitue un milieu de propagation limité pour les vibrations sonores. **L'extrémité** peut être **ouverte ou fermé**e et à l'embouchure le joueur provoque l'excitation de la colonne d'air.

Il émet le son désiré lorsqu'il est le siège d'ondes sonores stationnaires qui résultent de la superposition d'ondes incidentes et d'ondes réfléchies sur ses extrémités ouvertes ou fermées, et qui s'observent (s'entendent) pour certaines fréquences seulement caractéristiques du tuyau et appelées « **fréquences de résonance** » ou « harmoniques ».

- grandeur étudiée : non pas l'altitude $y(M,t)$ de la corde, mais la surpression $\Delta P(M,t)$ de l'air, ou le déplacement latéral $\Delta x(M,t)$ des tranches d'air.
- Attention ! la surpression et le déplacement latéral sont en quadrature : lorsque l'un est extrêmal, l'autre s'annule !
- Dans le tuyau sonore d'un instrument à vent, l'existence d'une onde sonore stationnaire se traduit par l'existence de maxima de surpression appelés « ventres ».
- Une extrémité ouverte correspond à une surpression nulle : « **nœud** » (N sur les figures) ; une extrémité fermée à un déplacement latéral nul donc à une surpression d'amplitude maximale : « **ventre** »
- Comme pour la corde fixée aux 2 extrémités, la distance séparant 2 nœuds de vibration (ou 2 ventres) est égale à une demi-longueur d'onde λ/2.

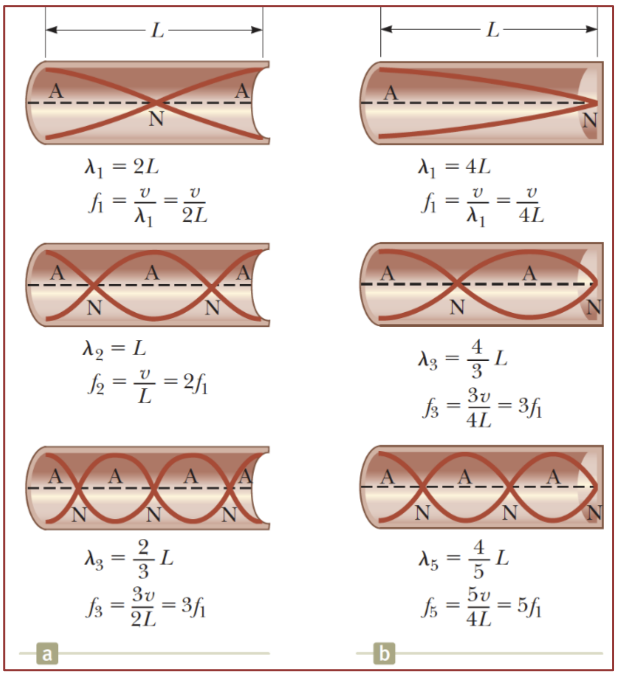


Schéma relatifs à la surpression :

Dans le cas des tuyaux sonores, on peut décrire les ondes stationnaires en utilisant la grandeur déplacement : un noeud de déplacement correspondant à un ventre de surpression.

Cas a) : tuyau fermé aux deux extrémités
Cas b) : tuyau fermé à une seule extrémité