TD CHAPITRE MK.7 : ONDES MECANIQUES – ELEMENTS DE CORRECTION

VRAI FAUX

1) Vrai (par exemple, onde sur une corde dépend de la nature de la corde via sa masse linéique ou sa tension ; idem, le son dans un gaz ou un solide n'a pas la même célérité).
2) Faux (renversement de l'allure du signal).
3) Faux (décomposition en série de Fourier pour tout signal périodique).
4) Vrai : $\cos\left(2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) = \cos(\omega t - kx) = \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$; on retrouve la forme caractéristique des signaux se propageant vers les x croissants ; idem pour le terme en $x - ct$.
5) Vrai, l'amplitude est une constante indépendante de la variable d'espace x.
6) Faux ($\lambda = cT$).
7) Faux (condition pour des signaux en phase : la distance les séparant doit être un multiple entier de λ : $|x_M - x_N| = m\lambda; \quad m \in \mathbb{N}$).

A SAVOIR FAIRE

Exercice 1. Vocabulaire (Oral ATS – A. Leuridan)

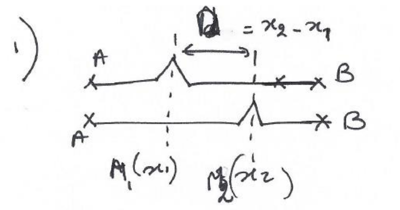
onde transversale (déplacement du point perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde) ;
onde progressive ; onde plane loin de la source, circulaire près de la source.

Exercice 2. Célérité d'une onde sur une corde

$c = 370\ m.s^{-1}$

Exercice 3. Célérité d'une onde progressive

1)



La distance D est parcourue en $\Delta t = t_2 - t_1$

avec $D = c\Delta t$ soit $\boxed{c = \frac{D}{\Delta t}}$

A.N. : $c = 10\ m.s^{-1}$

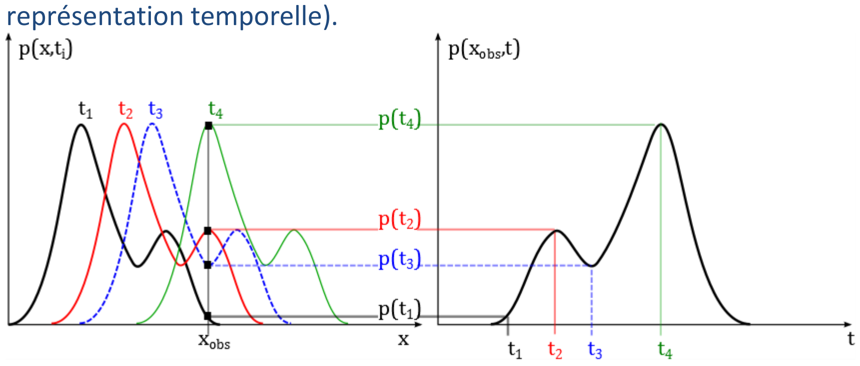
Exercice 4. Passage d'une représentation spatiale à une représentation temporelle

Longueur de la perturbation, entre front et queue de perturbation : $L = x_f - x_i$ (cf échelle 1 m sur schéma)

Durée de la perturbation : $\Delta t = \frac{L}{v}$ avec $v = 1{,}5.10^3\ m.s^{-1}$.

Évolution temporelle

Le front de la perturbation (à droite sur la représentation spatiale) arrive en premier (à gauche sur la représentation temporelle).



Exercice 5. Nœuds et ventres

Positions x_N des nœuds telles que $\forall t, y(0,t) = 0$ avec $y(x,t) = A\, sin(\omega t + \varphi)\, sin(kx)$, soit $\sin(kx_N) = 0$

d'où $kx_N = 0[\pi]$

Les différents nœuds ont alors comme positions $kx_{N,p} = p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$ soit $\frac{2\pi}{\lambda}\, x_{N,p} = p\pi$ ou encore $x_{N,p} = \frac{p\lambda}{2}$

Distance entre deux nœuds successifs : $x_{N,p+1} - x_{N,p} = \frac{\lambda}{2}$. Tout fuseau a une taille de $\frac{\lambda}{2}$.

Positions x_v des ventres telles que l'amplitude $\mathcal{A}(x) = |A\, sin(kx)|$ soit maximale soit $sin(kx_v) = \pm 1$,

d'où $kx_v = \frac{\pi}{2}[\pi]$

Les différents nœuds ont alors comme positions $kx_{v,p} = \frac{\pi}{2} + p\pi = \frac{\pi}{2}(1+2p)$ avec $p \in \mathbb{Z}$ soit $\frac{2\pi}{\lambda}\, x_{v,p} = \frac{\pi}{2}(1+2p)$ ou encore $x_{v,p} = \frac{\lambda}{4} + \frac{p\lambda}{2}$

Distance entre deux ventres successifs : $x_{v,p+1} - x_{v,p} = \frac{\lambda}{2}$.

Distance entre un nœud et une ventre successifs : $\frac{\lambda}{4}$

Exercice 6. Modes propres

Deux conditions aux limites : $\boldsymbol{\forall t, y(0,t) = 0}$ **et** $\boldsymbol{\forall t, y(L,t) = 0}$

Avec $y(x,t) = A\, cos(\omega t + \varphi)\, cos(kx + \psi)$, les conditions aux limites donnent : $cos(\psi) = 0$ (1) *et* $cos(kL + \psi) = 0$ (2)

(1) $\Rightarrow \psi = \pm\frac{\pi}{2}$ et (2) $\Rightarrow cos\left(kL \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$ $\Rightarrow sin(kL) = 0$ $\Rightarrow k_n L = n\pi$, avec n entier

Modes propres : avec $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{L = n\frac{\lambda_n}{2}}$; $\boldsymbol{k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = n\frac{\pi}{L}}$; $\boldsymbol{\lambda_n = cT_n = \frac{c}{f_n} = \frac{2L}{n}}$; $\boldsymbol{f_n = n\,\frac{c}{2L}}$; $\boldsymbol{\omega_n = 2\pi f_n = n\frac{\pi c}{L}}$;

Exercice 7. Caractéristiques d'une onde stationnaire

$y(x,t) = Y_0(x)\sin(\omega t)$ doit être solution de l'équation de d'Alembert : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Y_0(x)\sin(\omega t)) = \frac{d^2 Y_0}{dx^2}\sin(\omega t)$ et $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(Y_0(x)\sin(\omega t)) = -\omega^2 Y_0(x)\sin(\omega t)$ d'où

$$\frac{d^2 Y_0}{dx^2}\sin(\omega t) - \frac{1}{v^2}\times(-\omega^2)Y_0(x)\sin(\omega t) = 0$$

soit

$$\left(\frac{d^2 Y_0}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2}Y_0(x)\right)\sin(\omega t) = 0$$

ceci devant être vrai à chaque instant, on en déduit que $\boldsymbol{Y_0(x)}$ **est solution de l'équation**

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{d^2 Y_0(x)}{dx^2} + k^2 Y_0(x) = 0 \ \text{ avec } k = \frac{\omega}{v}}}$$

Les solutions de l'équation précédente sont de la forme : $Y_0(x) = A\cos(kx + \varphi)$ avec A et φ deux constantes.

Exercice 8. Corde de guitare * ou **

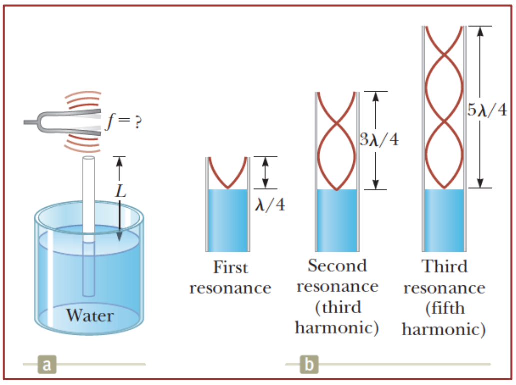
Note la plus grave donnée par la fréquence du fondamental, tel que $L = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{c}{2f_1}$ avec $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{TL}{m}}$ et $m = \rho V = \frac{\rho L \pi \Phi^2}{4}$

$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{TL}{m}} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4T}{\rho\pi\Phi^2}}$ AN : $f_1 \approx 330\ Hz$: Mi3

Exercice 9. Modes de la corde de Melde

4 fuseaux pour $f = 44\ Hz = f_4 = 4f_1$ d'où **fondamental (1 fuseau)** $f_1 = 11$ Hz **:** 5 fuseaux pour $f_5 = 55\ Hz$

Exercice 10. Mesure de la fréquence d'un diapason



Cf. Schéma : représentation des variations de déplacement latéral ou de vitesse : tuyau fermé (fermé à une extrémité et ouverte à l'autre)

Remarque : un mode dont la fréquence serait un multiple pair de la fréquence fondamentale ne pourrait présenter à la fois un nœud de déplacement à une extrémité et un ventre de déplacement à une autre extrémité ; un tel instrument ne peut donc admettre que des harmoniques de rang impair.

Ainsi, le 3ème mode d'un tuyau fermé correspond au 5ème harmonique.

ouvert à l'au

Le 1er mode : va correspondre à $L = \frac{\lambda_1}{4} = \frac{c}{4f_1}$

soit $\boxed{f_1 = \frac{c}{4L}}$

Puis le 2nd mode : $L = \lambda_2 + \frac{\lambda_2}{4} = \frac{3}{4}\lambda_2 = c \times \frac{3}{4f_2}$ et $\boxed{f_2 = \frac{c \times 3}{4L}}$

fréquences de résonance d'1 tuyau fermé : $\boxed{f_n = \frac{nc}{4L}}$

avec $n = 1; 3; 5; \dots$

(ou $n = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}$)

(le deuxième mode correspond alors à la 3ème harmonique).

Rmq : cas d'1 tuyau ouvert : fréquence fondamentale tq $\frac{\lambda_1}{2} = L$ soit $f_1 = \frac{c}{2L}$

la fréquence fondamentale est le double de celle d'1 tuyau fermé !

De plus, tous les harmoniques sont possibles : $\boxed{f_n = \frac{nc}{2L}}$, $n \in \mathbb{N}$

($n\frac{\lambda_n}{2} = L$)

bien faire la distinction entre harmoniques n, tq $f_n = nf_1$, et modes, numérotés successivement à partir de 1.

Remarques : *1) atténuation très rapide en l'absence de source d'excitation (cf. réflexion très partielle aux extrémités ouvertes). 2) La réflexion a en réalité lieu légèrement à l'extérieur.*

1ère résonance = mode 1 = mode fondamental : $h_1 = \frac{\lambda_1}{4}$

Soit $\boxed{f_1 = \left(\frac{4h_1}{c}\right)^{-1}}$ A.N. $f_1 \simeq 450$ Hz avec $h_1 = 18{,}5$ cm $= \frac{c}{4f_1}$

Idem : avec la 2ème résonance : $h_2 = \frac{\lambda_2}{4} + \frac{\lambda_2}{2} = \frac{3}{4}\lambda_2 = \frac{3}{4}\frac{c}{f_2}$

Soit $\boxed{f_2 = \frac{3c}{4h_2}}$ $f_2 \simeq 443$ Hz avec $h_2 \simeq 57{,}5$ cm.

=> solutions approchées (cf corrections d'extrémités)

+ précis : $\frac{\lambda}{2} = h_2 - h_1 = \frac{c}{2f}$ soit $\boxed{f = \frac{c}{2(h_2 - h_1)}}$ A.N. : $f \simeq 440$ Hz

EXERCICES

Exercice 11. Vitesses du son * ou **

L'explosion a lieu à une distance d du dispositif d'écoute.

Le son met dans l'air un temps t_1 pour arriver au dispositif d'écoute tel que $t_1 = \frac{d}{c_1}$, et il met dans l'eau un temps t_2 tel que $t_2 = \frac{d}{c_2}$.

Le décalage de temps $\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{d}{c_1} - \frac{d}{c_2} = d\left(\frac{c_2 - c_1}{c_1 c_2}\right)$, soit $\boxed{\boldsymbol{d = \Delta t\left(\frac{c_1 c_2}{c_2 - c_1}\right)}}$ **A.N.** $\boldsymbol{d = 1{,}1\ km}$

Exercice 12. Propagation d'une onde

2) a) $c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ μ = masse linéique (par unité de longueur) en kg·m^{-1}

$[c] = [L].[T]^{-1}$ et $\left[\frac{F}{\mu}\right] = \frac{[F]}{[M]}[L] = \frac{[M][L]^2[T]^{-2}}{[M]}$

d'où $\left[\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right] = [L].[T]^{-1}$: homogène.

b) $c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \boxed{\sqrt{\frac{F}{m/L}} = c}$ A.N. : $c = \sqrt{\frac{10{,}0}{0{,}5 \times \frac{1}{5}}} = 10$ m·s^{-1} $= c$

La valeur déterminée expérimentalement concorde avec celle donnée via la théorie.

3) a) La durée de la perturbation $\tau = 30$ ms (largeur temporelle)

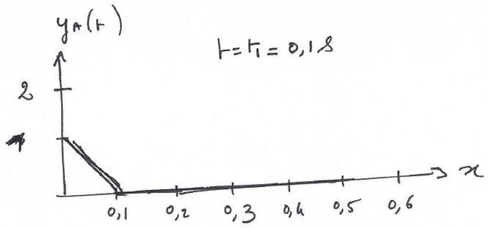
Cette largeur temporelle se traduit par une largeur spatiale δ tq

$\boxed{\delta = c\tau}$ (distance parcourue sur la corde pendant τ).

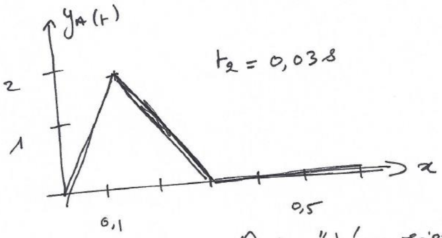
A.N. : $\delta = 10 \times 30.10^{-3} = 0{,}3$ m $= \delta$.

b) à $t_1 = 0{,}01$ s, la perturbation a "parcouru" la longueur $L_1 = ct_1 = 0{,}1$ m

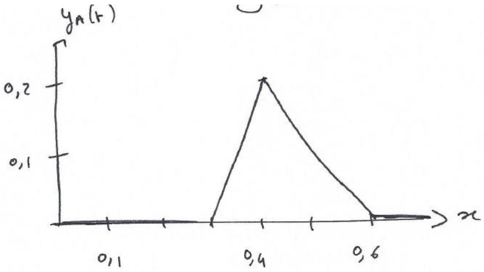
On a donc :



$L_2 = c t_2 = 0,3$ m
$= \delta$

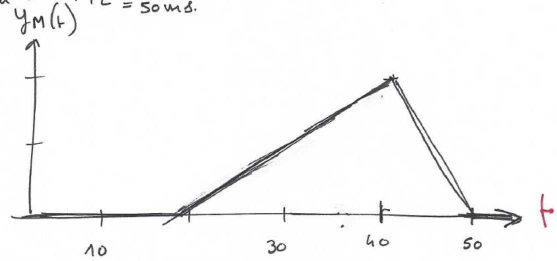


⚠ à "l'inversion" !



$L_3 = c t_3$
$= 0,6$ m

c) Au point M à $x_M = 0,20$ m de A : le début de la perturbation arrive avec un retard $\boxed{\Delta t = \frac{x_M}{c}} = 0,02\,s$ soit avec $\tau = 30$ ms
fin de la perturbation à $\Delta t + \tau = 50$ ms.



Exercice 13. Onde sinusoïdale le long d'une corde **

1) et 4) A $t > 0$, l'onde progresse, donc le premier sommet se dirige de P vers Q, soit P ↘, tandis que Q ↗ (variations dans la direction verticale : onde transversale). De la même manière, on a R, S ↗, T, U, V, ↘, W ↗.

2) P correspond à un maximum ; par conséquent, la distance entre P et la position d'équilibre de la corde correspond à l'amplitude, d'où $A = 1$ cm.

   La longueur d'onde étant la période spatiale, $\lambda = 2RT = 10\ cm$.

3) $\lambda = cT_0$ soit $T_0 = 20\ ms$ et $f_0 = \frac{1}{T_0} = 50\ Hz$

5) Points qui vibrent en phase : En un point $M(x)$, on a $y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$.

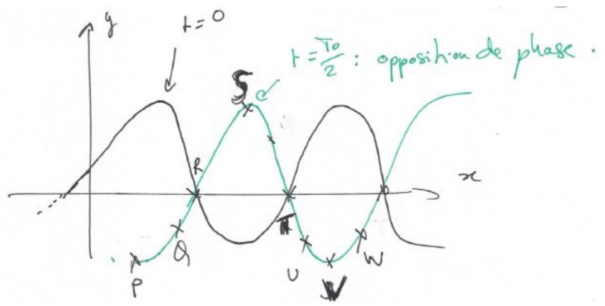
   Déphasage entre deux points : $\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_0 - kx_2 - \varphi_0 + kx_1 = k(x_1 - x_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x)$

   Points en phase si $\Delta\varphi_{2/1} = k \times 2\pi$ soit $\lambda = k(x_1 - x_2)$ avec $k \in \mathbb{Z}$, d'où Q et W, P et V, sont en phase (R et T en opposition de phase)

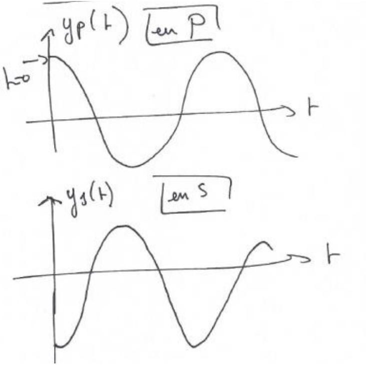
6) Points P et S tels que $(x_1 - x_2) = \frac{\lambda}{2}$ soit $\Delta\varphi_{2/1} = \pi$: vibration en opposition de phase

7) $\tau = \frac{T}{2}$; la corde s'est déplacée de $\delta = c\tau = \frac{cT}{2} = \frac{\lambda}{2}$

Soit

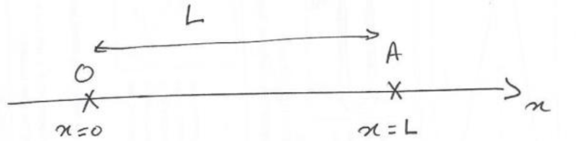


8)



(P et S en opposit. de phase).

Exercice 14. Instruments à corde * ou **



$$y(x,t) = b \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right) \sin(\omega t)$$

1) Equation d'une onde stationnaire, avec séparation des variables x et t, forme $\boxed{y(x,t) = F(x)\, G(t)}$.

$y(x,t) = \pm A(x) \sin(\omega t)$ avec $A(x) = \left| b \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)\right|$

fonction sinusoïdale avec modulation de l'amplitude en fonction de la position dans l'espace (abscisse x)

Conditions aux limites : $\forall t$, 1) $y(0,t) = 0$ et 2) $y(L,t) = 0$.

Condition 1) : pour $x = 0$, $\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right) = 0$ $\forall t$, soit $y(0,t) = 0$ $\forall t$: elle est bien vérifiée.

Condition 2) : pour $x = L$, $y(L,t) = b \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \sin(\omega t)$,

et $y(L,t) = 0$ $\forall t$ ssi valeurs particulières de ω :

elle n'est pas vérifiée a priori avec la simple donnée de $y(x,t)$.

---

2) Pulsations propres ω_n possibles : celles vérifiant la condition 2)

soit ω_n tq $\forall t$ $y(L,t) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\omega_n L}{c}\right) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\frac{\omega_n L}{c} = 0\,[\pi] = n.\pi}$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$

Soit $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$ $\quad \omega_2 = \frac{2\pi c}{L}$ $\quad \boxed{\omega_n = n\pi \frac{c}{L}}$ $n \in \mathbb{N}^*$

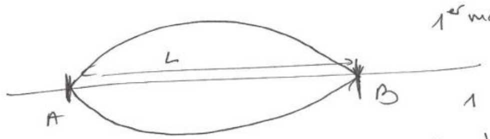
3) a) $\boxed{c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$ or $T = 100\ N$, $\quad \mu = \frac{m}{L} = \frac{\rho V}{L} = \rho \frac{L \times \pi d^2}{4L}$

soit $\boxed{\mu = \rho \frac{\pi d^2}{4}}$ d'où $\mu = 0,556\ g.m^{-1}$

et $c = 424\ m.s^{-1}$

b) Mode fondamental : $n = 1$; $\quad \omega_1 = \frac{\pi c}{L} = 2\pi f_1 \qquad f_1 = \frac{c}{2L} \qquad et \qquad L = \frac{\lambda_1}{2}$ (un seul fuseau sur la longueur totale L)
A.N. : $f_1 = 330\ Hz \qquad \lambda_1 = \frac{c}{f_1} = 2L = 1{,}28\ m$

c)



1er mode possible vérifiant les 2 C.L. : 1 unique fuseau correspondant à L total, or longueur d'1 fuseau : $\frac{\lambda}{2}$

($\frac{\lambda}{2}$ distance entre 2 noeuds).

4) On a vu que la fréquence fondamentale était $f_1 = \frac{c}{2L}$

Donc plus la longueur L diminue, plus la fréquence fondamentale f_1 augmente, plus l'instrument joue des notes aigues ; or les cordes d'un violon sont nettement plus courtes que celles d'une contrebasse.

Exercice 15. Corde vibrante et rayon d'une sphère *(A. Leuridan)*

Premier cas : tension de la corde $F_0 = mg$, avec célérité de l'onde $c = \sqrt{\frac{F_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}$. De plus, mode propre de rang 2 tel que $L = \lambda = cT$ avec T période de la lame vibrante.
Sphère totalement immergée dans l'eau ; en raison de la poussée d'Archimède, $F_0' = \left(m - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{eau}\right) g$.

mode propre de rang 5, soit $L = 5\frac{\lambda'}{2} = \frac{5}{2}c'T$ avec T période de la lame vibrante inchangée, et $c' = \sqrt{\frac{F_0'}{\mu}} = \sqrt{\frac{\left(m - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{eau}\right) g}{\mu}}$.

Finalement, $\frac{L}{T} = cte \implies c = \frac{5}{2}c' \iff \sqrt{\frac{mg}{\mu}} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{\left(m - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{eau}\right) g}{\mu}}$ d'où $r = \left(\frac{3}{4\pi}\frac{21}{25}\frac{m}{\rho_{eau}}\right)^{1/3} = 7{,}4\ cm$

■ EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 16. Vibrations en phase

$|x_M - x_N|$ doit être un multiple de λ.

Exercice 17. Autour des équations d'onde * ou **

1) $y(x,t) = 0{,}05 sin\left[\frac{\pi}{2}(10x - 40t) - \frac{\pi}{4}\right] = 0{,}05 sin\left[(5\pi x - 20\pi t) - \frac{\pi}{4}\right]$;
de la forme $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \varphi)$ forme caractéristique d'une onde sinusoïdale progressive (unidimensionnelle dans le sens des x croissants)

Par identification : $\begin{cases} k = 5\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \\ \omega = 20\pi = 2\pi f \end{cases}$ d'où $\lambda = 0{,}4\ m$ et $f = 10\ Hz$

Vitesse de propagation : $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = 4\ m/s$

2) A) $\sigma = \frac{f}{v} = 0{,}25\ m^{-1} = 2{,}5.10^{-3} cm^{-1}$ $\quad \omega = 2\pi f = 31{,}4 \frac{rad}{s}$.

b) Onde unidirectionnelle progressive dans le sens des x croissants, équation de la forme : $y(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \varphi_0)$ et $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma$: $y(x,t) = A\sin(2\pi(ft - \sigma x) + \varphi_0)$

De plus, à $t = 0$ en $x = 0, y = 0 \Rightarrow \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0\ [\pi]$

Et $y(x,t) = 0{,}12 \sin\left(10\pi\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) = 0{,}12\sin\left(10\pi\left(t - \frac{x}{20}\right)\right)$

Exercice 18. Battements

Le signal résultant est :

$A\cos(2\pi f_1 t) + A\cos(2\pi f_2 t) = A\cos\left(2\pi\frac{(f_1+f_2)}{2}t\right)\cos\left(2\pi\frac{(f_1-f_2)}{2}t\right) = A\cos(2\pi f_s t)\ \cos(\pi f_m t)$

$12\ T_s \approx 0{,}025\ s \Rightarrow f_s \approx 480\ Hz$; $f_m = \frac{1}{0{,}025} = 40\ Hz = f_2 - f_1$: cohérent

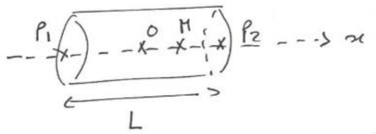
$f_m = \frac{1}{0{,}25} = 4\ Hz$: donc $f_2 = 440 \pm 4\ Hz$.

Exercice 19. Observation stroboscopique d'une corde *(A. Leuridan)*

1) $\lambda = v/N = 20\ cm$.
2) Immobilité apparente si $N_e = N/n$, avec n entier
3) Sinusoïde (avec λ)
4) $\Delta x = v\ T_e = v/N_e = 20{,}2\ cm$ distance parcourue par l'onde entre deux éclairs consécutifs.
5) Distance apparente parcourue entre deux éclairs consécutifs = $\Delta x - \lambda = 2\ mm$.
6) Célérité apparente : $c_{app} = (\Delta x - \lambda)/T_e = 0{,}40\ m.s^{-1}$
7) Si $N_e = 202\ Hz$, alors déplacement apparent analogue au précédent mais en sens contraire du déplacement réel de l'onde

---

Exercice 20. Ondes stationnaires dues à 2 hauts parleurs



Alimentation par le même générateur : mêmes amplitudes pulsations, phases à l'origine.

Au niveau des sources : $s_1(P_1,t) = A\cos(\omega t)$ $\quad p_1 = \Delta P_1$

$s_2(P_2,t) = A\cos(\omega t)$.

Propagation à l'intérieur du tube (point M d'abscisse x quelconque) :

$s_1(M,t) = A\cos\left(\omega t - k\left(x + \frac{L}{2}\right)\right) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x + \frac{L}{2}}{c}\right)\right]$ propagation dans le sens direct

$s_2(M,t) = A\cos\left(\omega t - k\left(\frac{L}{2} - x\right)\right) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{(L/2 - x)}{c}\right)\right]$ propagation dans le sens indirect.

1) a) en O : $s(O,t) = s_1(O,t) + s_2(O,t)$

$= A\left[\cos\left(\omega t - k\frac{L}{2}\right) + \cos\left(\omega t - k\frac{L}{2}\right)\right]$

$= 2A \cos(\omega t - kL/2)$

en O $\rightarrow$ ventre, en $\pm\frac{\lambda}{4}$ nœuds

formule trigo : $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

b) en $x \simeq 0$ $s(x,t) = A\left[\cos\left[\omega t - k\left(\frac{L}{2}+x\right)\right] + \cos\left[\omega t - k\left(\frac{L}{2}-x\right)\right]\right]$

$= 2A\cos\left(\omega t - k\frac{L}{2}\right)\cos kx$ onde stationnaire

2) A un instant t donné, (nœuds et ventres) les amplitudes sont $\mathcal{A}(x) = \pm 2A\cos kx$

$OM_1 = -\frac{\lambda}{8} = x_1$ $\quad \mathcal{A}(x) = \left|2A\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right| = A\sqrt{2}$ et $2A\cos kx > 0$

$OM_2 = \frac{\lambda}{8} = x_2$ $\quad \mathcal{A}(x) = A\sqrt{2}$ et $2A\cos kx > 0$) en phase, un fuseau

$OM_3 = \frac{3\lambda}{8} = x_3$ $\quad \mathcal{A}(x) = \left|2A\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right| = A\sqrt{2}$ change de π

Exercice 21. Houle

Exercice 22. Antenne demi-onde

1) $\vec{j}(z,t) = j(z,t)\overrightarrow{u_z} = \frac{i(z,t)}{S}\overrightarrow{u_z} = \frac{I_0}{S}\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)\cos(\omega t)\,\overrightarrow{u_z}$; $j_{max} = \frac{I_0}{S} = 1{,}0.10^6\ \mathrm{A.m^{-2}}$

2) Onde stationnaire (corde de guitare, corde de Melde) ; nœuds : $\forall t, \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) = 0$ pour $\frac{\pi z}{L} = 0[\pi]$, soit $z = 0$ et $z = L$;
Ventres : $\forall t, \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) = 1$ pour $\frac{\pi z}{L} = \frac{\pi}{2}[\pi]$, soit $z = \frac{L}{2}$

3) Equation de conservation de la charge : $\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, avec $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial z} = -\frac{I_0}{S}\frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)\cos(\omega t)$

En intégrant : $\rho = -\frac{I_0}{\omega S}\frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)\sin(\omega t)$: onde stationnaire, ventres et nœuds inversés par rapport à j.

4) $Q(t) = \iiint \rho\,\mathrm{d}V = -\frac{I_0}{\omega}\frac{\pi}{L}\sin(\omega t)\int_0^L \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)dz = -\frac{I_0}{\omega}\sin(\omega t)\left[\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)\right]_0^L = 0 = Q_1(t) + Q_2(t)$.

$Q_1(t) = -\frac{I_0}{\omega}\sin(\omega t)$ et $Q_2(t) = +\frac{I_0}{\omega}\sin(\omega t) = -Q_1(t)$: OK