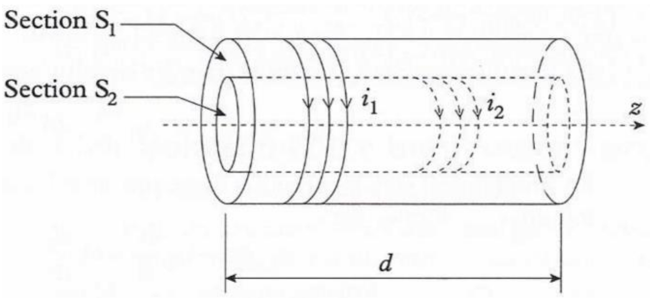
colle N°23 : 08 au 12 Avril 2024

▪ Formulaire : chapitres MK1 à MK6, EM1, EM2, EM3, EM4

1. ❤️❤️ Considérons un solénoïde d'axe Oz, de longueur $\ell = 40$ cm, de section $S = 20$ cm², contenant $N = 200$ spires, parcouru par un courant I. Il crée un champ magnétique $\vec{B}_{int} = \mu_0 n I\,\vec{e_z}$ à l'intérieur du solénoïde. Exprimer et calculer son inductance propre L. Données : $\mu 0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m⁻¹.

- *Orienter I puis $d\vec{S}$ avec I.*
- *Calcul du flux de $\vec{B}_{int}$ à travers une spire de la bobine : $\Phi_1 = \iint_{1\,spire} \vec{B}_{int} \cdot d\vec{S} = \mu_0 n I S = \frac{\mu_0 N I S}{\ell}$*
- *Calcul du flux à travers les N spires de la bobine : $\Phi_N = N\Phi_1 = \frac{\mu_0 N^2 I S}{\ell}$*
- *L'inductance de la bobine longue est : $L = \frac{\Phi}{I}$: $\boldsymbol{L = \frac{\mu_0\, N^2\, S}{\ell}}$ A.N. : $L = 0{,}25\ mH$*

2. ** On considère 2 bobines longues (ou solénoïdes) Γ_1 et Γ_2, de même axe (Oz) et de même longueur d, disposées comme indiqué sur la figure ci-contre. On appelle S_1 et S_2 leurs sections et N_1 et N_2 leurs nombres de spires. Déterminer l'inductance mutuelle M entre les deux circuits.

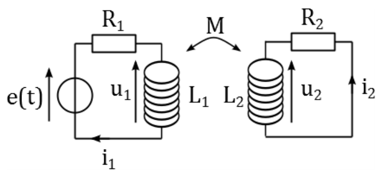


Calcul du flux Φ_{12} du champ créé par le circuit 1 à travers le circuit 2 ou du flux Φ_{21} du champ créé par le circuit 2 à travers le circuit 1 : on a alors $\Phi_{12} = Mi_1$ et $\Phi_{21} = Mi_2$ donnant la même mutuelle ; on choisit donc le calcul le plus simple, ici Φ_{12}.

- *Orienter i_1 et i_2 puis $d\vec{S}_2$ avec i_2.*
- *Calcul du flux de $\vec{B}_1$ à travers une spire de la bobine : $\varphi_{12} = \iint_{1\,spire\,de\,C2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \mu_0 \frac{N_1 i_1 S}{\ell}$*
- *Calcul du flux à travers les N_2 spires de la bobine du circuit 2 : $\Phi_{12} = N_2\varphi_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 i_1 S}{\ell} = Mi_1$ d'où $M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{\ell}$*

3. **Considérons les deux circuits couplés suivants : un circuit (R_1, L_1) série alimenté par une source de tension $e(t) = v_1(t)$ couplé par mutuelle avec un circuit (R_2, L_2) série.

La source de tension délivrant une tension sinusoïdale $e(t) = v_1(t) = E\cos(\omega t)$, on suppose le régime sinusoïdal forcé établi. Montrer que le couplage entre les deux circuits est équivalent, vu du circuit 1, à un unique dipôle d'impédance $\underline{Z}$ dans laquelle interviennent les caractéristiques des deux circuits.



En écrivant la loi des mailles en complexes et en exploitant les caractéristiques des dipôles sous forme d'impédances complexes :

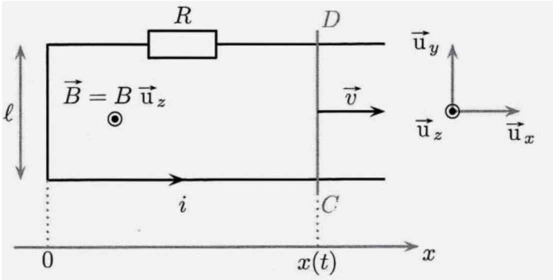
$$\begin{cases} \underline{v_1} = (jL_1\omega + R_1)\underline{i_1} + jM\omega\underline{i_2} & (1) \\ 0 = (jL_2\omega + R_2)\underline{i_2} + jM\omega\underline{i_1} & (2) \end{cases}$$

Avec (2), on obtient : $\underline{i_2} = -\frac{jM\omega\underline{i_1}}{R_2 + jL_2\omega}$; *dans (1) :* $\underline{v_1} = \left(jL_1\omega + R_1 + \frac{(M\omega)^2}{R_2 + jL_2\omega}\right)\underline{i_1} = \underline{Z_1}\ \underline{i_1}$

Par identification : $\underline{Z_1} = jL_1\omega + R_1 + \frac{(M\omega)^2}{R_2 + jL_2\omega}$

- *dans laquelle interviennent : Les caractéristiques du circuit (1) (R_1, L_1), mais aussi celles du circuit (2) (R_2, L_2) et du couplage inductif (M); la fréquence délivrée par le générateur (pulsation ω)*

4. ❤️ ❤️ On considère une barre métallique posée sur deux rails conducteurs ; la distance entre les 2 points de contact est ℓ = CD.



On note R la résistance du circuit électrique, supposée constante.
La barre [CD] est la seule partie mobile du circuit. Elle est mise en mouvement par un opérateur qui exerce une force $\overrightarrow{F_{op}} = F_{op}\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{cte}$.
L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{e_z}$ orthogonal au plan des rails. On négligera les phénomènes d'auto-induction ainsi que les frottements.

Effectuer une analyse qualitative des phénomènes mis en jeu, puis établir l'équation électrique et l'équation mécanique vérifiées par le système.

⇨ ***Analyse qualitative :*** *la force exercée par l'opérateur met en mouvement la barre, ce qui augmente la surface du circuit donc le flux de $\overrightarrow{B_0}$: d'après la loi de Faraday, apparition d'une fém induite donc d'un courant induit dans le circuit ; la barre est alors soumise à une force de Laplace qui vient, selon la loi de modération de Lenz, s'opposer à la force de l'opérateur (force de freinage)*

⇨ ***Equation électrique***

1. *Orienter i : Choix orientation : Orientation arbitraire de i.*
2. *Orienter la surface*
3. *Calcul du flux :* $\Phi = \iint \vec{B}.\overrightarrow{dS} = Bax$
4. *Loi de Faraday :* $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ *or* $\Phi = BS = Bax$, *donc* $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bav = e$
5. *Schéma électrique équivalent, puis équation électrique :*

Loi des mailles et caractéristique des dipôles : $e - Ri = 0$ *soit* $Ri = -Bav$ *(E.E.)*

⇨ ***Equation mécanique***

1. *Système ;* 2. *Bilan des actions mécaniques extérieures : poids $\vec{P}$; réactions des rails $\vec{R}$ (normale car pas de frottements) ; Force $\overrightarrow{Fop}$; Force de Laplace :* $\overrightarrow{F_{Laplace}} = iBa\,\overrightarrow{u_x}$ *(attention !!! se déplacer dans le sens de i le long de la tige !!)*

3. *PFD appliqué à la tige* 4. *projeté sur $\overrightarrow{ux}$:* $m\frac{dv}{dt} = Fop + iBa$ *(E.M.)*

5. ❤️ ❤️ Suite des rails de Laplace générateur (question précédente). On donne les équations électrique et mécanique obtenues : $Ri = -Bav$ *(E.E.)* et $m\frac{dv}{dt} = Fop + iBa$ *(E.M.)* établir l'expression de la vitesse de la barre ; commenter.

On découple le système : $m\frac{dV}{dt} = F_{op} - (B^2a^2/R)v$

La fem induite génère une force (de Laplace) de type frottement fluide $-(B^2a^2/R)v$ *(cf loi de modération de Lenz : elle s'oppose au mouvement lui ayant donné naissance)*

Equation différentielle en v : $\dot{v} + \frac{v}{\tau} = \frac{Fop}{m}$ *avec* $\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{mR}}{(\boldsymbol{Ba})^2}$

Résolution en supposant la vitesse initiale nulle : $v = v_{lim}\,(1 - \exp(-t/\tau))$ *avec* $v_{lim} = F_{op}\tau/m = F_{op}R/(\boldsymbol{Ba})^2$.

6. Suite des rails de Laplace générateur (question précédente). On donne les équations électrique et mécanique obtenues : $Ri = e = -Bav$ *(E.E.)* et $m\frac{dv}{dt} = Fop + iBa$ *(E.M.)* établir le bilan énergétique associé ; commenter.

Méthode :

- *Multiplier (EE) par i : puissances électriques*
- *Multiplier (EM) par v : puissances mécaniques*

- *Elimination du terme de couplage*

On multiplie (EE) par i : $ei = Ri^2 = -Ba\,\dot{x}\,i$

On multiplie (EM) par $\dot{x}$: $m\ddot{x}\dot{x} = F\dot{x} + F_{Lx}\dot{x} = \frac{d\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)}{dt} = F\dot{x} + Bia\,\dot{x}$

- ***Terme de couplage $Ba\dot{x}i$***

$ei = -Ba\dot{x}i$ *puissance fournie par le générateur induit*

$F_{Lx}\dot{x} = Ba\dot{x}i$ *puissance fournie par les forces de Laplace (négative, force opposée au déplacement)*

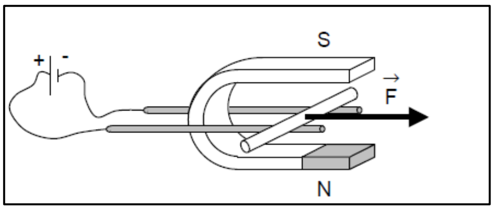
*La somme de ces deux puissances est nulle. Il y a c**onversion de la puissance mécanique apportée par l'opérateur en puissance cinétique (qui met la tige en mouvement) et en puissance électrique, dissipée par effet Joule.***

On admettra que cette propriété est toujours vraie : $\mathcal{P}_{induction} + \mathcal{P}_{Laplace} = 0$

D'où $\frac{d\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)}{dt} = F\dot{x} - Ri^2 = \frac{dEc}{dt}$

La puissance mécanique apportée par l'opérateur est convertie en puissance cinétique (qui met la tige en mouvement) et en puissance électrique, dissipée par effet Joule.

7. ❤ On reprend le dispositif de rail de Laplace décrit dans la question 8 « rail de Laplace générateur », le dispositif étant cette fois-ci alimenté par un générateur de tension continue E à partir de l'instant initial, sans intervention d'un opérateur extérieur. On négligera à nouveau les phénomènes d'auto-induction ainsi que les frottements. Faire une analyse qualitative des phénomènes mis en jeu puis établir les équations électrique et mécanique vérifiées par le système.



⇨ ***Analyse qualitative :*** *Le générateur permet la circulation d'un courant électrique qui, en présence du champ magnétique, va générer une force de Laplace sur la tige. Cette force sur la barre la met en mouvement, ce qui augmente la surface du circuit donc le flux de $\overrightarrow{B_0}$: d'après la loi de Faraday, apparition d'une fém induite (venant compenser E selon la loi de modération de Lenz) donc d'un courant induit dans le circuit venant s'ajouter (compenser) à celui imposé par le générateur.*

⇨ ***Equation électrique***

6. *Orienter i : Choix orientation : Orientation arbitraire de i, ici de préférence de manière à ce que la source de tension soit en convention générateur*
7. *Orienter la surface*
8. *Calcul du flux :* $\Phi = BS = Bax$
9. *Loi de Faraday :* $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ *or* $\Phi = BS = Bax$*, donc* $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bav = e$
10. *Schéma électrique équivalent*
11. *équation électrique :*

Loi des mailles : $E + e = Ri$ *soit* $Ri = E - Bav$ *(E.E.)*

⇨ ***Equation mécanique***

La tige subit : *poids* $\vec{P}$

réaction des rails $\vec{R}$ (normale car pas de frottements)

Force de Laplace : $\overrightarrow{F_{Laplace}} = iBa\,\overrightarrow{u_x}$ *(attention !!! se déplacer dans le sens de i le long de la tige !!)*

PFD appliqué à la tige projeté sur $\overrightarrow{ux}$: $m\frac{dv}{dt} = iBa$ *(E.M.)*

Système d'équations différentielles couplées :

(force de laplace exercée sur la barre ∝ i, avec i reliée au déplacement de la barre (cf induction) d'où couplage)

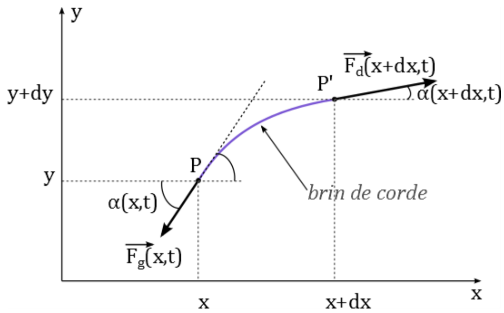
Equation électrique : $i = \frac{E - Bav}{R}$ (EE)

Equation mécanique : $\frac{mdv}{dt} = Bia \quad (EM)$

Vitesse de la tige : $v = \frac{E}{Ba}\left(1 - exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \quad avec\ \tau = \frac{mR}{(Ba)^2}$

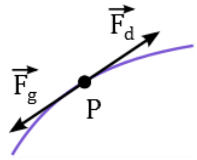
Intensité dans le circuit : $i = \frac{E}{R} exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

8. ** Considérons une onde sur une corde « idéale », supposée inextensible (aucune élasticité), sans raideur (infiniment souple), homogène, de masse linéique μ, tendue horizontalement avec une force constante F_0 et excitée verticalement à son extrémité A. Le poids de la corde est négligé devant la tension de la corde, de telle sorte qu'à l'équilibre elle est horizontale, selon la direction (Ox).

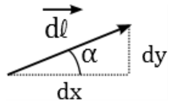


On néglige tout amortissement, et on considère de petits mouvements transversaux selon (Oy). En appliquant la relation fondamentale de la dynamique sur un brin de corde de longueur dl compris entre les points P et P' (cf. schéma), et en la projetant sur les axes (Ox) et (Oy), établir l'équation de propagation d'une onde transversale sur cette corde.

Méthode attendue :



- *Hypothèse d'une corde sans raideur : Si on note $\vec{F}$ la tension de la corde orientée de gauche à droite,* $\vec{F_g}(x,t) = -\vec{F}(x,t) = -\vec{F_d}(x,t)$
- *Système de longueur élémentaire $d\ell$ et de masse* $dm = \mu\, d\ell$ *avec* $dx = d\ell\, cos\alpha \approx dx$
- *Forces exercées sur le système :* $\vec{F_g}(x,t) = -\vec{F}(x,t)$ *et* $\vec{F_d}(x+dx,t) = +\vec{F}(x+dx,t)$



- *Relation fondamentale de la dynamique :* $dm\, \vec{a} = \vec{F_g} + \vec{F_d}$ *soit* $\mu\, dx\, \vec{a} = -\vec{F}(x,t) + \vec{F}(x+dx,t)$
- *Projection sur Ox avec* $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$ *soit* $\vec{a}.\vec{u_x} = 0$: $0 = -F(x,t)\cos(\alpha(x,t)) + \vec{F}(x+dx,t)\cos(\alpha(x+dx,t))$

soit à l'ordre 1 : $F(x,t) = F(x+dx,t) = F_0$

- *Projection sur Oy :* $\mu\, dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -F(x,t)\sin(\alpha(x,t)) + F(x+dx,t)\sin(\alpha(x+dx,t))$

soit à l'ordre 1 : $\mu\, dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_0\,[\alpha(x+dx,t) - \alpha(x,t)]$ *ou* $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x}$

avec $\alpha \approx \tan\alpha \approx \frac{\partial y}{\partial x}$ *est la pente de la corde, on a* $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

- *Equation d'onde de d'Alembert :* $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F_0}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

9. ❤️ Rappeler l'équation d'onde de d'Alembert scalaire. Donner l'expression d'une onde plane progressive unidimensionnelle se propageant (dans le sens direct puis indirect) sans atténuation ni déformation, ❤️ ❤️ Cas particulier des ondes sinusoïdales ; relations entre les différentes grandeurs caractéristiques (préciser leurs noms et leurs unités)

Equation d'onde de d'Alembert : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F_0}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

Onde progressive se propageant dans la direction de l'axe (Ox), dans le sens positif de cet axe, sans atténuation ni déformation : $s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = F(x - ct)$ *; dans le sens négatif :* $s(x,t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right) = G(x + ct)$

Cas sinusoïdal dans le sens direct : $s(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$; *$A$ amplitude, ω pulsation ; c célérité de l'onde ; k norme du vecteur d'onde ; φ_0 la phase initiale de l'onde à l'origine O.*

1. *Analogie et relations*

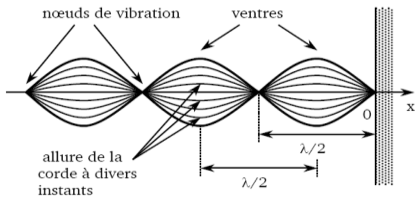
	Période	*Fréquence*	*Pulsation*	*Relations*

Périodicité temporelle	T	f *ou* ν	ω	$\boldsymbol{\omega} = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$	$\lvert k\rvert = \dfrac{\omega}{c}$
Périodicité spatiale	λ	σ	k	$k = 2\pi\sigma = \dfrac{2\pi}{\lambda}$	$\boldsymbol{\lambda = c\,T}$

2. Dimensions, unités

	φ_0	T	ω	ν	c	x	k	σ
Dimension	*0*	*T*	T^{-1}	T^{-1}	$L.\,T^{-1}$	*L*	L^{-1}	L^{-1}
Unité (SI)	*rad*	*s*	*Rad.* s^{-1}	s^{-1}	*m.* s^{-1}	*m*	*Rad.*m^{-1}	m^{-1}

10. ❤️ Donner l'expression d'une onde stationnaire (cas à 1D) ; Cas particulier des ondes sinusoïdales : donner l'expression de l'onde, représenter en expliquant l'allure associée. Etablir l'expression de la position des nœuds.



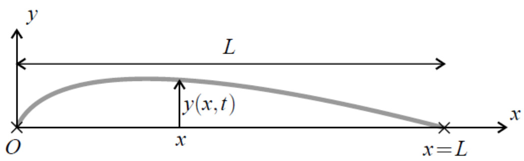
- *Onde stationnaire unidimensionnelle :* $s(x,t) = f(x).\,g(t)$*, dont les variables t et x sont séparées ; ne se propage pas (/ex., les extrema varient de valeur dans le temps mais sont toujours au même endroit).*
- *Cas sinusoïdal :* $s(x,t) = A\cos(kx+\psi)\cos(\omega t+\varphi)$ *; modulation spatiale de l'amplitude :* $\mathcal{A}(x) = \lvert A\cos(kx+\psi)\rvert$*. cf. schéma ci-contre : fuseaux de longueur* $\frac{\lambda}{2}$.
- ***Positions*** $\boldsymbol{x_N}$ ***des nœuds*** *telles que* $\forall t, y(0,t) = 0$ *avec* $y(x,t) = A\sin(\omega t+\varphi)\sin(kx)$*, soit* $\sin(kx_N) = 0$

d'où $kx_N = 0[\pi]$

Les différents nœuds ont alors comme positions $kx_{N,p} = p\pi$ *avec* $p \in \mathbb{Z}$ *soit* $\frac{2\pi}{\lambda}\,x_{N,p} = p\pi$ *ou encore* $x_{N,p} = \frac{p\lambda}{2}$

Distance entre deux nœuds successifs : $x_{N,p+1} - x_{N,p} = \frac{\lambda}{2}$*. Tout fuseau a une taille de* $\frac{\lambda}{2}$*.*

11. Dans le cas d'une corde de longueur $\boldsymbol{L}$ fixée aux deux extrémités (en $\boldsymbol{x = 0}$ et en $\boldsymbol{x = L}$) oscillant selon $\boldsymbol{y(x,t) = A\cos(kx+\psi)\cos(\omega t+\varphi)}$, 🖤 🖤 donner les caractéristiques des modes propres en rappelant le lien entre les différentes grandeurs caractéristiques. 4

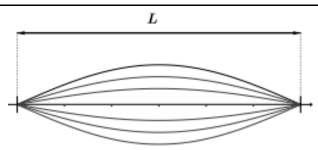
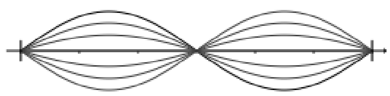
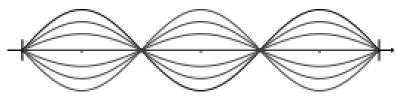


Corde vibrante fixée à ses deux extrémités.

🖤 Faire la démonstration.

💙💙 ***Modes propres :*** *avec* $\boldsymbol{n}$ *entier* $\boldsymbol{L = n\frac{\lambda_n}{2}}$ *;* $\boldsymbol{k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = n\frac{\pi}{L}}$ *;* $\boldsymbol{\lambda_n = cT_n = \frac{c}{f_n} = \frac{2L}{n}}$ *;* $\boldsymbol{f_n = n\,\frac{c}{2L}}$ *;* $\boldsymbol{\omega_n = 2\pi f_n = n\frac{\pi c}{L}}$ *;*

Les premiers modes :

 $f_1 = \dfrac{c}{2L}$ $\quad L = \dfrac{\lambda_1}{2}$	 $f_2 = 2f_1$ $\quad L = 2\,\dfrac{\lambda_2}{2} = \lambda_2$	 $f_3 = 3f_1$ $\quad L = 3\,\dfrac{\lambda_3}{2}$

💙*Démonstration : Exploitation des deux conditions aux limites :* $\quad \boldsymbol{\forall t, y(0,t) = 0}$ ***et*** $\boldsymbol{\forall t, y(L,t) = 0}$

Avec $y(x,t) = A\cos(\omega t+\varphi)\cos(kx+\psi)$*, les conditions aux limites donnent :* $\cos(\psi) = 0$ *(1) et* $\cos(kL+\psi) = 0$ *(2)*

(1) $\Rightarrow \psi = \pm\frac{\pi}{2}$ *et (2)* $\Rightarrow \cos\left(kL \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$ $\quad \Rightarrow \sin(kL) = 0$ $\quad \Rightarrow k_n L = n\pi$*, avec n entier*

12. ❤️ ❤️ Établir l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide pour le champ électrique ou magnétique. Identifier à l'aide d'une analyse dimensionnelle la célérité c.

a) Équation pour le champs électrique $\vec{E}$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}\right) \underbrace{=}_{\text{formule d'analyse vectorielle}} \overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{E}\right) - \Delta\,\vec{E} \underbrace{=}_{\substack{M.G.\\ div(\vec{E})=0}} -\Delta\,\vec{E}$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}\right) \underbrace{=}_{\substack{MF.\\ \overrightarrow{rot}\,(\vec{E})=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}} \overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{B}\right)}{\partial t} \underbrace{=}_{\substack{MA.\\ \overrightarrow{rot}\,(\vec{B})=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}} -\frac{\partial\left(\varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)}{\partial t} = -\varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

En égalisant les deux termes : $\Delta\,\vec{E} = \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\,\vec{E} - \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

Par analyse dimensionnelle : $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ *donc* $\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

b) Équation pour le champ magnétique $\vec{B}$

$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,(\vec{B})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\,(\vec{B})\right) - \Delta\vec{B}$

Avec ***(MΦ)*** *:* $div\,(\vec{B}) = 0$ *soit* $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,(\vec{B})\right) = -\Delta\vec{B}$

Avec ***(MA)*** *dans le vide :* $\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,(\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ *d'où* $\overrightarrow{rot}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = -\Delta\vec{B}$ *ou*

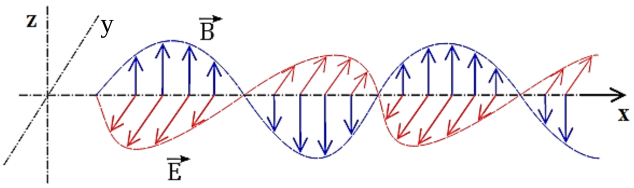
$$\mu_0\varepsilon_0\overrightarrow{rot}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = -\Delta\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}\right)}{\partial t}$$

Or selon ***(MF)*** *:* $\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,(\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ ***d'où*** $\Delta\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$ *D'où* $\Delta\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$

$[\Delta\vec{a}] = [\vec{a}] \times \frac{1}{L^2}$ $\left[\frac{\partial^2\vec{a}}{\partial t^2}\right] = [\vec{a}] \times \frac{1}{t^2}$ *Donc* $[\varepsilon_0\mu_0] = \frac{1}{c^2} = \frac{T^2}{L^2}$ ***c*** *célérité de l'onde en m/s*

13.

a) ❤️ ❤️ On donne l'allure du champ électromagnétique d'une onde plane progressive monochromatique. Le champ électrique est contenu dans un plan horizontal tandis que le champ magnétique est dans le plan vertical. Trouver le sens de propagation de l'onde.



b) ❤️ ❤️ Le champ électrique d'une onde électromagnétique plane est donné par : $\vec{E} = E_0\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)\vec{e}_z$. Donner l'expression du champ magnétique associé à cette onde.

1) *Cf. relation de structure :* $\vec{B} = \frac{\vec{e}_{propagation}\wedge\vec{E}}{c}$, *D'OU* $\vec{e}_{propagation} = -\vec{e}_x$ *: propagation vers les x décroissants.*

2) *Variable* $t - \frac{x}{c}$ *: propagation selon +* $\vec{e}_x$ *puis relation de structure :* $\vec{B} = \frac{\vec{e}_x\wedge\vec{E}}{c}$ $\vec{B} = -\frac{E_0}{c}\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)\vec{e}_y$

14. ❤️ Dans le cas d'une OemPPH polarisée rectilignement selon $\vec{e}_y$, se propageant dans le sens direct dans la direction $\overrightarrow{e_x}$, donner l'expression du champ électrique et établir la relation de dispersion associée (relation entre $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{\omega}$).

$\vec{E} = E_0\,\cos(\omega t - kx + \varphi)\,\vec{e}_y$ *; propagation selon* $\overrightarrow{e_x}$*:* $\vec{k} = k\overrightarrow{e_x}$*, relation de structure :*

Relation de dispersion à démontrer en exploitant l'expression de l'OPPH : calcul des dérivées partielles par rapport au temps et à x, qu'il faut injecter dans l'équation de d'Alembert : $\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

Ici, $\Delta\vec{E} = \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} = -k^2E_0\,\cos(\omega t - kx + \varphi)\,\vec{e}_y$ *et* $\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2E_0\,\cos(\omega t - kx + \varphi)\,\vec{e}_y$

D'où $\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \Leftrightarrow \forall t,\ k^2E_0\,\cos(\omega t - kx + \varphi)\,\vec{e}_y = \frac{1}{c^2}\omega^2E_0\,\cos(\omega t - kx + \varphi)\,\vec{e}_y$

En simplifiant, on trouve $k^2 = \frac{1}{c^2}\omega^2$ *soit en définissant* ω *et* $k > 0$ *:* $k = \frac{\omega}{c}$

15. **Pour une OemPPH, donner les équations de Maxwell dans le vide en notation complexe et en déduire la relation de structure des ondes électromagnétiques planes progressives.

Maxwell-Gauss : $\vec{\underline{k}}.\vec{\underline{E}} = 0$ *Maxwell-Faraday :* $\vec{\underline{k}} \wedge \vec{\underline{E}} = \omega \vec{\underline{B}}$

d'où relation de structure pour les OemPPH : $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{e}_{propagation} \wedge \vec{E}}{c}$ *avec* $k = \frac{\omega}{c}$ *et pour les OemPP :* $\vec{B} = \frac{\vec{e}_{propagation} \wedge \vec{E}}{c}$

Maxwell-Flux : $\vec{\underline{k}}.\vec{\underline{B}} = 0$ *Maxwell-Ampère :* $\vec{\underline{k}} \wedge \vec{\underline{B}} = -\omega \varepsilon_0 \mu_0 \vec{\underline{E}} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{\underline{E}}$

16. Etablir l'expression de la densité volumique d'énergie $\boldsymbol{u_{em}}$ associée à une OemPPH dont le champ électrique s'écrit : $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$, puis sa valeur moyenne temporelle

Par définition $u_{em}(M,t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(M,t) + \frac{1}{2}\frac{B^2(M,t)}{\mu_0}$

Pour l'OemPPH (cf. relation de structure), les normes des champs $\vec{E}$ *et* $\vec{B}$ *sont liées par la relation* $E = Bc$ *; et avec* $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$*, on en déduit*

$$u_{em} = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

moyenne temporelle : $\langle u_{em} \rangle = \langle \varepsilon_0 E^2 \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \langle cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \rangle$

D'où avec $\langle cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{B_0^2}{2\mu_0}$$

▪ Au programme des exercices

Electromagnétisme

✓ Chapitre 4 : Phénomènes d'induction

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
7. Lois de l'induction	
Flux d'un champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté	Évaluer le flux d'un champ magnétique uniforme à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté plan.
Loi de Faraday Courant induit par le déplacement relatif d'une boucle conductrice par rapport à un aimant ou un circuit inducteur. Sens du courant induit	**Décrire, mettre en œuvre et interpréter des expériences illustrant les lois de Lenz et de Faraday.**
Loi de modération de Lenz	Utiliser la loi de Lenz pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés.
Force électromotrice induite, loi de Faraday	Utiliser la loi de Faraday en précisant les conventions d'algébrisation.
8. Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps	
Auto-induction Flux propre et inductance propre Étude énergétique	Différencier le flux propre des flux extérieurs. Utiliser la loi de modération de Lenz. Évaluer l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur, le champ magnétique créé par la bobine est admis comme étant équivalent à celui déterminé en régime stationnaire. **Mesurer la valeur de l'inductance propre d'une bobine.**

	Conduire un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent. Définir la notion de densité volumique d'énergie magnétique à l'aide de l'exemple du solénoïde infini. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental permettant de mesurer l'énergie emmagasinée par une bobine.**
Induction mutuelle entre deux bobinages	Définir les flux mutuels. Indiquer l'égalité des inductances mutuelles. Conduire un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction et d'induction mutuelle en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent. Définir le couplage parfait de deux circuits. **Mettre en œuvre un protocole expérimental utilisant un transformateur utilisé en transformateur de tensions, de courants et adaptateur d'impédance.**
Applications	Expliquer le principe du chauffage inductif, le principe d'une détection ampèremétrique, le fonctionnement d'un alternateur.
9. Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire	
Circuit en translation rectiligne dans un champ magnétique stationnaire. Rail de Laplace	Interpréter qualitativement les phénomènes observés dans le cas du rail de Laplace. Établir les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe.