CHAPITRE EM.5 : PROPAGATION D'ONDES ELECTROMAGNETIQUES

I) LES EQUATIONS DE MAXWELL

■ Champ électromagnétique

Considérons une distribution volumique de charges et de courants de densités $\{\rho(P,t);\vec{j}(P,t)\}$.

Force de Lorentz : Force subie par toute particule ponctuelle de charge q et de vitesse $\vec{v}(M,t)$ située au point M à l'instant t :

$$\vec{F}(M,t) = q\left(\vec{E}(M,t) + \vec{v}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t)\right)$$

Par définition, $\{\vec{E}(M,t);\vec{B}(M,t)\}$ constitue le **champ électromagnétique** créé au point M par la distribution $\{\rho(P,t);\vec{j}(P,t)\}$, défini par son action sur une particule chargée, la partie indépendante de la vitesse $\vec{v}$ de la particule définissant le champ électrique $\vec{E}(M,t)$ *et* la partie dépendant de $\vec{v}$ le champ magnétique $\vec{B}(M,t)$.

■ Les 4 équations de Maxwell en régime variable

Soit une distribution de charges caractérisée dans un référentiel galiléen par les densités de charge et de courant : $\rho(\vec{r},t)$) et $\vec{j}(\vec{r},t)$.

Cette distribution est source d'un champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$ qui satisfait aux 4 équations suivantes :

		Régime variable	Statique	Interprétation
Maxwell-Gauss	MG	$\mathbf{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	**valable**	Lien entre $\vec{E}$ et l'une de ses sources (présence de charges, soit $\rho(\vec{r},t)$)
Maxwell-Faraday	MF	$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Non : $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,(\vec{E}) = \vec{0}$	Propriété intrinsèque du champ électromagnétique : un champ magnétique variable est source d'un champ électrique.
Maxwell-Ampère	MA	$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,(\vec{B}) = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$	Non : $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,(\vec{B}) = \mu_0\vec{j}$	Lien entre $\vec{B}$ et ses sources (présence de courants électriques, soit $\vec{j}(\vec{r},t)$, ou d'un champ électrique variable).
Maxwell-flux (ou Maxwell-Thomson)	MΦ	$\mathbf{div}(\vec{B}) = 0$	**valable**	Propriété intrinsèque du champ électromagnétique.

En régime variable, champ électrique et champ magnétique sont indissociables : ensemble $\{\vec{E};\vec{B}\}$ couplé.

La linéarité des équations de Maxwell autorise le **principe de superposition** et la notation complexe.

■ Equations de Maxwell en régime variable dans le vide (en l'absence de charge ou de courant)

Lorsqu'on se place « dans le vide », $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$; les équations de Maxwell deviennent alors :

		Régime variable dans le vide
Maxwell-Gauss	MG	$\mathbf{div}(\vec{E}) = 0$
Maxwell-Faraday	MF	$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell-Ampère	MA	$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,(\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Maxwell-flux (ou Maxwell-Thomson)	MΦ	$\mathbf{div}(\vec{B}) = 0$

À connaître !!

II) ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS LE VIDE

A) Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

1) Equation de propagation et onde électromagnétique

Nous allons étudier les champs électrique et magnétique dans une zone vide de charge et de courants : on ne se préoccupe pas de la source de ces champs, mais seulement de ce qu'ils deviennent à l'extérieur de cette source.

■ **Méthode** pour obtenir **l'équation de propagation** de $\vec{a}$, où $\vec{a}$ sera $\vec{E}$ ou $\vec{B}$

- Écrire $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\vec{a}\right)\right)$
- Appliquer la relation d'analyse vectorielle (fournie) : $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\vec{a}\right)\right) = \overrightarrow{\mathbf{grad}}\left(\mathbf{div}\left(\vec{a}\right)\right) - \vec{\Delta}\vec{a}$
- A l'aide des équations de Maxwell, exprimer successivement $\mathbf{div}\left(\vec{a}\right) = \mathbf{0}$ (dans le vide), puis $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\vec{a}\right)$ qui fait apparaître $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}$ où $\vec{b}$ est l'autre champ.
- Inverser les opérateurs : $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{b}}{\partial t}$, puis exploiter une 3ème équation de Maxwell pour exprimer $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{b}$.

a) Équation pour le champs électrique $\vec{E}$

$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{E}\right)\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\left(\vec{E}\right)\right) - \vec{\Delta}\vec{E}$ *Espace 1*

Avec **(MG)** dans le vide : $\text{div}\left(\vec{E}\right) = 0$ soit $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{E}\right)\right) = -\vec{\Delta}\vec{E}$

Avec **(MF)** : $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\vec{E}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ **soit** $\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\vec{\Delta}\vec{E}$ ou $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \vec{\Delta}\vec{E} = \frac{\partial\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}\right)}{\partial t}$

Or selon **(MA)** dans le vide : $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\vec{B}\right) = \boldsymbol{\mu_0 \varepsilon_0}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ **d'où** $\vec{\Delta}\vec{E} = \boldsymbol{\mu_0 \varepsilon_0}\,\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Finalement $\boxed{\vec{\Delta}\vec{E} - \boldsymbol{\mu_0 \varepsilon_0}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

b) Équation pour le champ magnétique $\vec{B}$

$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{B}\right)\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\left(\vec{B}\right)\right) - \vec{\Delta}\vec{B}$ *Espace 2*

Avec **(MΦ)** : $\text{div}\left(\vec{B}\right) = 0$ soit $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{B}\right)\right) = -\vec{\Delta}\vec{B}$

Avec **(MA)** dans le vide : $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\vec{B}\right) = \boldsymbol{\mu_0 \varepsilon_0}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ **d'où** $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\boldsymbol{\mu_0 \varepsilon_0}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\vec{\Delta}\vec{B}$ ou

$$\boldsymbol{\mu_0 \varepsilon_0}\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\vec{\Delta}\vec{B} = \boldsymbol{\mu_0 \varepsilon_0}\frac{\partial\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}\right)}{\partial t}$$

Or selon **(MF)** : $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\vec{E}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ **d'où** $\vec{\Delta}\vec{B} = \boldsymbol{\mu_0 \varepsilon_0}\,\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$ D'où $\boxed{\vec{\Delta}\vec{B} - \boldsymbol{\mu_0 \varepsilon_0}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

c) Ondes électromagnétiques

■ **Onde électromagnétique**

Onde électromagnétique : ensemble de deux champs $\left(\vec{E}, \vec{B}\right)$ se propageant simultanément dans l'espace, potentiellement **dans le vide** (contrairement aux ondes mécaniques ou sonores), en vérifiant des **équations de d'Alembert de la même forme** $\vec{\Delta}\vec{a} - \boldsymbol{\mu_0 \varepsilon_0}\frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial t^2} = \vec{0}$:

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\Delta}\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

■ **Dimension de $\varepsilon_0\mu_0$:** *Espace 3*

$[\vec{\Delta}\vec{a}] = [\vec{a}] \times \frac{1}{L^2}$ $\left[\frac{\partial^2\vec{a}}{\partial t^2}\right] = [\vec{a}] \times \frac{1}{t^2}$ Donc $[\varepsilon_0\mu_0] = \frac{1}{c^2} = \frac{T^2}{L^2}$

■ **Célérité de l'onde électromagnétique dans le vide :**

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3{,}00.10^8 \text{ m.s}^{-1} \quad \text{ou} \quad \varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$$

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont tous deux solutions de l'**équation (vectorielle) de d'Alembert :** $\vec{\Delta}\vec{a} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{a}}{\partial t^2} = \vec{0}$

Equation **invariante par rapport au temps** (dérivée seconde) : **propagation d'une onde électromagnétique réversible**.

B) Ondes planes, ondes planes progressives

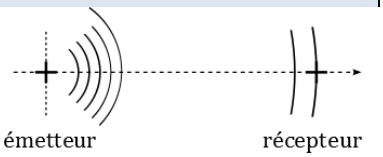
1) Notion d'onde plane

■ **Surface d'onde (ou front d'onde)**

Surface continue de l'espace sur laquelle le champ électromagnétique est **uniforme** à tout instant.

■ **Ondes plane et sphérique**

- **Onde plane :** dont les surfaces d'ondes sont des plans parallèles appelés **plans d'onde ;**
- **Onde sphérique :** si ses surfaces d'ondes sont des sphères concentriques.
- Une onde sphérique modélise une onde émise depuis une source ponctuelle (par exemple un point lumineux), tandis qu'une onde plane modélise une onde sphérique à grande distance de la source (on approxime la sphère par son plan tangent).



■ **Caractéristiques d'une onde plane (OP)**

■ **Onde électromagnétique plane (OP)**

Les champs d'une onde plane ne **dépendent** que d'**une unique variable d'espace** en coordonnées cartésiennes, par exemple notée x, correspondant à la coordonnée le long de la direction de propagation. **L**es **surfaces d'onde** sont des **plans d'équations** '$x = cte$'**.**

Une onde électromagnétique plane est donc telle que $\vec{E}(x,t)$ et $\vec{B}(x,t)$.

Chaque composante de l'un des champs vérifie l'équation : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ (équation de d'Alembert).

■ **Forme générale des solutions**

La **solution générale** de l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ s'écrit :

$$f(x,t) = f_+\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_-\left(t + \frac{x}{c}\right) = g_+(x - ct) + g_-(x + ct)$$

Superposition d'une onde plane progressive $f_+\left(t - \frac{x}{c}\right) = g_+(x - ct)$ se dirigeant suivant les x croissants (+ $\overrightarrow{u_x}$) à la célérité c et d'une onde plane progressive $f_-\left(t + \frac{x}{c}\right) = g_-(x + ct)$ se dirigeant suivant les x décroissants (- $\overrightarrow{u_x}$) à la célérité c (**vitesse de propagation de l'onde dans le vide** ; $c \approx 3{,}00.10^8$ m.s^{-1}).

2) Structure des ondes planes progressives (OPP) électromagnétiques

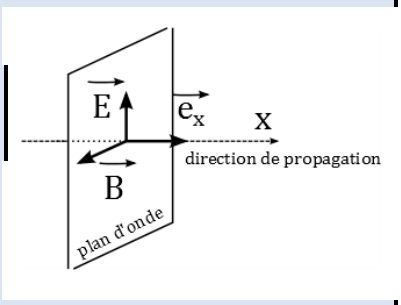
Démontrée à l'aide des équations de Maxwell pour des ondes planes progressives

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \text{et} \quad \vec{B}(x,t) = \vec{B}\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

■ Relation de structure de l'onde plane progressive électromagnétique (OemPP) dans le vide

Pour une onde plane de direction de propagation $x'x$, de vecteur unitaire $\vec{e}_x = \vec{e}_{propag}$, la **relation de structure** liant les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ est :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{e}_{propag} \wedge \vec{E}}{c}} \quad \textbf{ou} \quad \boxed{\vec{E} = \vec{B} \wedge c\,\vec{e}_{propag}}$$



Cette relation implique que

- Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont **transversaux (orthogonaux à la direction de propagation), l'onde électromagnétique est transversale.**
- Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont **orthogonaux entre eux.**
- **Le trièdre** $\left(\vec{E}, \vec{B}, \vec{e}_{propag}\right)$ **est direct.**
- $\|\vec{E}\| = c\,\|\vec{B}\|$

- Ces propriétés sont vérifiées par toute OemPP, mais faux pour les sommes d'OemPP se propageant en sens différents, et en particulier pour les ondes stationnaires.

C) Onde électromagnétique plane progressive harmonique

1) Présentation et caractéristiques des ondes électromagnétiques planes progressives et harmoniques (OemPPH)

■ Onde électromagnétique plane progressive harmonique (OemPPH)

L'onde électromagnétique plane et progressive sera dite harmonique ou monochromatique (OemPPH ou OemPPM) ou sinusoïdale si les composantes des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont **sinusoïdales**, avec une double périodicité spatiale et temporelle, de **période (temporelle)** T et de **longueur d'onde (période spatiale)** λ , de la forme :

$$f(x,t) = f_m \cos(\omega t \pm kx + \varphi)$$

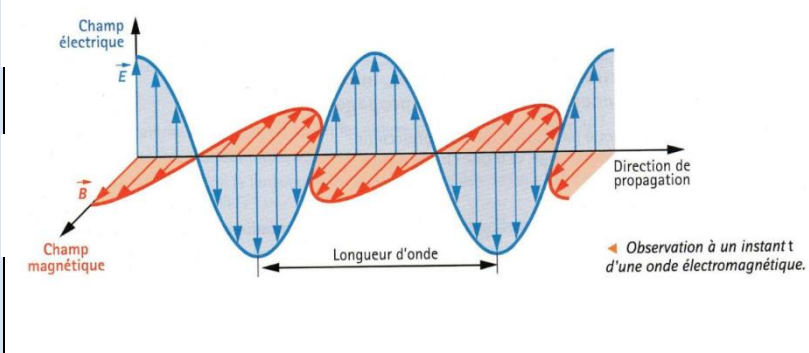
($f(x,t) = f_m \cos(\omega t - kx + \varphi)$ pour une onde se propageant suivant $+\vec{e}_x$ et $f(x,t) = f_m \cos(\omega t + kx + \varphi)$ pour une onde se propageant suivant $-\vec{e}_x$).

avec ω **pulsation temporelle** telle que :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

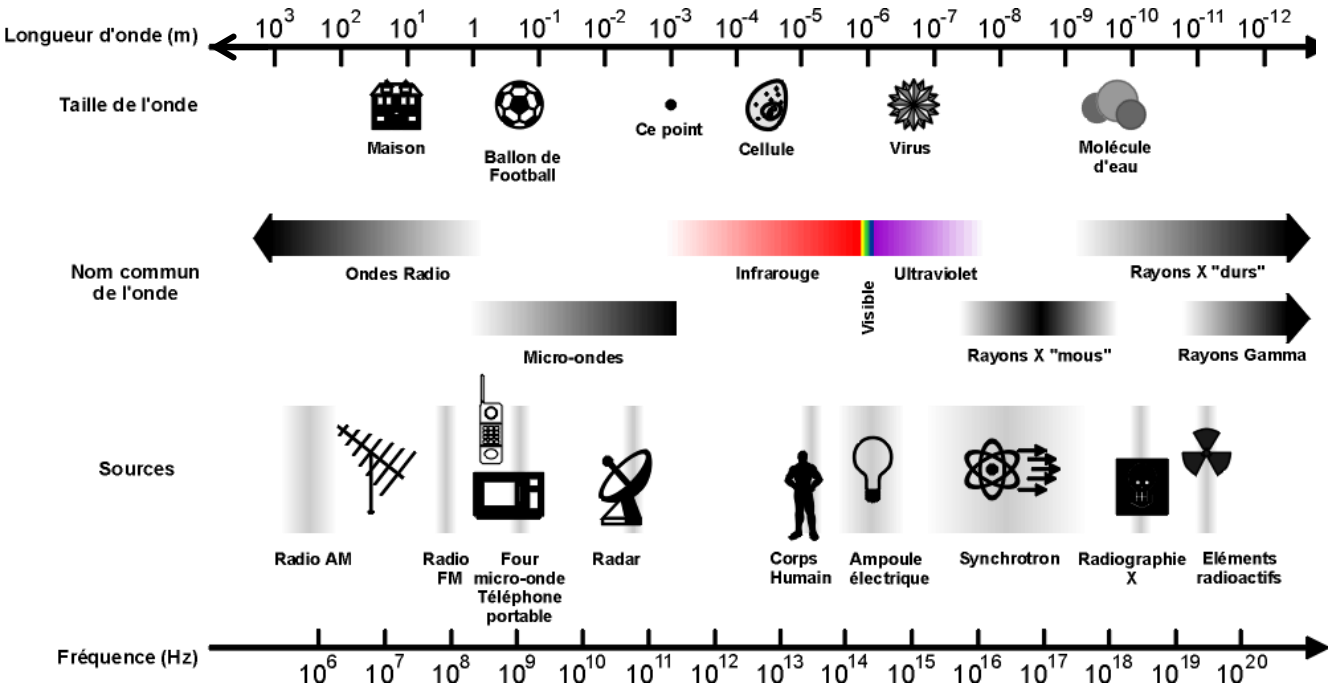
k **pulsation spatiale** (ou module d'onde, ou par abus de langage vecteur d'onde) telle que :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$



- **Relation de dispersion** (conséquence de l'équation de propagation de D'Alembert, vérifiée pour les OPPH et les ondes planes stationnaires)

$$\omega = kc \qquad \lambda = cT$$



Le domaine accessible aux ondes électromagnétiques est très vaste ; il va des ondes radiofréquences aux rayonnements gamma en passant par la fenêtre très restreinte du domaine visible.

■ Intérêt de l'onde harmonique

La linéarité des équations de Maxwell permet de déterminer la structure et les propriétés de toute onde électromagnétique à partir de ses composantes monochromatiques.
Un signal $s(t)$ périodique de fréquence f_1 peut être écrit sous la forme (**décomposition en série de Fourier)** :

$$\boldsymbol{s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos\ (n2\pi f_1 t + \varphi_n)}$$

■ Vecteur d'onde

■ Vecteur d'onde $\vec{k}$

Le **vecteur d'onde** $\vec{k}$ est dirigé selon la direction de propagation $\vec{u}_{propag} = \overrightarrow{u_k}$

$$\boldsymbol{\vec{k} = k\,\vec{u}_{propag} = k\,\overrightarrow{u_k}} \qquad \text{avec} \qquad \boldsymbol{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

Soit, avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{f(M,t) = f_m \cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi\right)}$

Les **plans d'onde** sont **perpendiculaires** au vecteur d'onde $\vec{k}$, d'équations '$\vec{k}\cdot\vec{r} = cte$'

Attention ! La direction de propagation est définie pour toute OPP, mais la longueur d'onde donc le vecteur d'onde n'ont de sens que pour les OPPH.

■ Relation de structure, pour une OemPPH

$$\boldsymbol{\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}}$$

2) Notation complexe

On associe à toute composante monochromatique $f(M,t) = f_m \cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi\right)$ du champ ou du potentiel électromagnétique une écriture complexe $\underline{f}(M,t)$ et une amplitude complexe $\underline{f_m}$:

$$\underline{f}(M,t) = f_m \exp\left(i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi\right)\right) = \underline{f_m} \exp\left(i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right)$$

de sorte que : $\underline{f_m} = f_m \exp(i\varphi)$ $f(\vec{r},t) = Re\left(\underline{f}(\vec{r},t)\right)$

Propriétés usuelles associées à la notation complexe

- la dérivation par rapport à t est une multiplication par $i\omega$ $\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial t} = (\times\, i\omega)}$
- la dérivation par rapport à x est une multiplication par $-ik_x$ $\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial x} = (\times\, (-ik_x))}$
- **En généralisant, en coordonnées cartésiennes,** $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathbf{grad}} = \vec{\nabla} = -i\vec{k}}$
- Pour tout champ vectoriel, les opérateurs différentiels peuvent s'écrire simplement :

$$\mathbf{div}(\underline{\vec{E}}) = \vec{\nabla}.\underline{\vec{E}} = -i\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} \qquad \overrightarrow{\mathbf{rot}}(\underline{\vec{E}}) = \vec{\nabla}\wedge\underline{\vec{E}} = -i\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} \qquad \overrightarrow{\Delta}\underline{\vec{E}} = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}.\underline{\vec{E}} = -k^2\underline{\vec{E}}$$

Equations de Maxwell dans le vide en notation complexe

Maxwell-Gauss :	$\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0$	**Maxwell-Faraday :**	$\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = \omega\underline{\vec{B}}$
Maxwell-Flux :	$\vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0$	**Maxwell-Ampère :**	$\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = -\omega\varepsilon_0\mu_0\underline{\vec{E}} = -\frac{\omega}{c^2}\underline{\vec{E}}$

D) Polarisation rectiligne des ondes OemPPH

Direction de polarisation d'une OemPPH

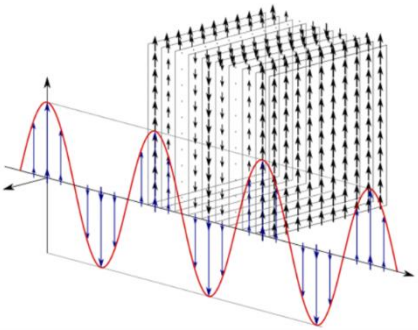
Par définition, la **direction de polarisation** de l'onde est **celle du champ électrique**, dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation $\vec{u}_k$ telle que $\vec{k} = k\vec{u}_k = \frac{\omega}{c}\vec{u}_k$

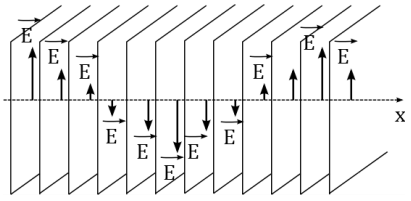
Polarisation rectiligne

C'est le cas très simple, où **le vecteur champ électrique $\vec{E}$ de l'onde garde au cours du temps une direction constante,** que nous pouvons choisir colinéaire à l'axe Oy.

L'expression de $\vec{E}$ est alors de la forme : $\vec{E} = E_y\,\vec{e}_y$ **:** l'extrémité du champ $\vec{E}$ oscille le long de l'axe Oy.

Plan de polarisation de l'onde lumineuse : plan formé par le vecteur d'onde $\vec{k}$ et le champ électrique $\vec{E}$.

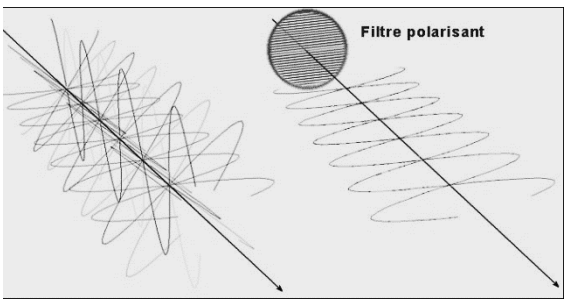




Représentation d'une onde polarisée rectilignement ; les flèches représentent le champ électrique $\vec{E}$. La direction de $\vec{E}$ est constante

Cas de la lumière naturelle

Pour la plupart des sources lumineuses classiques, la lumière émise correspond à une superposition d'OemPPH dont les champs électriques sont déphasés de manière aléatoire (ondes dites incohérentes). L'extrémité du champ électrique résultant décrit dans le plan d'observation une trajectoire aléatoire : **l'onde n'est pas polarisée**.



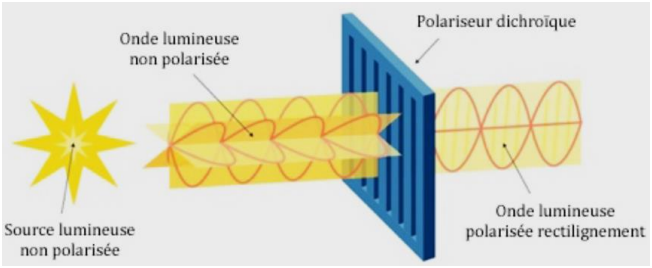
Onde Oem non polarisée

si la direction de polarisation fluctue rapidement et aléatoirement.

Obtention de lumière polarisée rectilignement

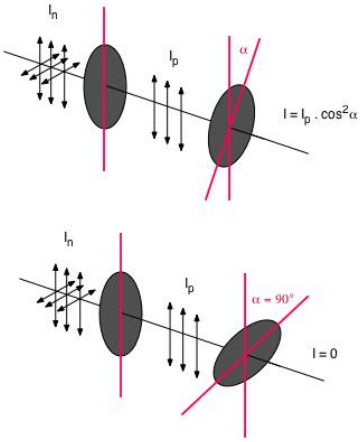
a) Polariseur

Polariseur : système optique (qu'on considérera plan) possédant un **axe de transmission**, tel que la composante du champ électrique incident parallèle à cet axe est transmise et la composante perpendiculaire supprimée. **La lumière sortant d'un polariseur est polarisée rectilignement, parallèlement à la direction de l'axe de transmission,** quelle que soit la nature de la lumière incidente.



Si la lumière incidente est polarisée rectilignement selon la direction perpendiculaire à l'axe de transmission, alors aucune lumière ne sort du polariseur.

b) Analyseur



Soit une onde traversant un polariseur dont l'axe de transmission est y.
On place un second polariseur derrière (**analyseur)** dont la direction de polarisation fait un angle α avec y.
L'amplitude du champ électrique après l'ensemble analyseur polariseur varie selon $\cos(\alpha)$ et l'énergie transportée par l'onde varie selon $cos^2(\alpha)$.

Loi de Malus : En sortie de l'analyseur, intensité $\boldsymbol{I = I_0 \cos^2 \theta}$

III) ENERGIE DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

A) Energie électromagnétique

Un rayonnement électromagnétique transporte de l'énergie, localisée dans le champ électromagnétique, et non au niveau des sources de champ (charges ou courants). On peut définir une densité volumique d'énergie électromagnétique dont on admet l'expression.

Densité volumique d'énergie électromagnétique $u_{em}(M,t)$ associée en un point M, à une date t, au champ électromagnétique $\left(\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)\right)$

$$u_{em}(M,t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(M,t) + \frac{1}{2}\frac{B^2(M,t)}{\mu_0}$$

Lien avec l'**énergie électromagnétique d'un système** de volume (V) :

$$U_{em}(M,t) = \iiint_{(V)} u_{em}(M,t)\ d\tau$$

Puissance électromagnétique rayonnée par ce système : $\mathcal{P}_{em} = \frac{dU_{em}}{dt}$

B) Vecteur de Poynting

On définit un **vecteur « densité de flux d'énergie électromagnétique »**, appelé **vecteur de Poynting**, souvent noté $\vec{\Pi}$, qui joue un rôle analogue aux vecteurs $\vec{j}_m, \vec{j}_Q, \vec{j}$ rencontrés précédemment.

Définition du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$

$$\mathcal{P}_{em} = \frac{dU_{em}}{dt} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi}.\overrightarrow{dS}$$

Il s'agit du **vecteur « densité de flux de puissance électromagnétique » : le flux** du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ à travers la surface (Σ) délimitant le volume $\mathcal{V}$ représente la **puissance rayonnée à travers la surface (Σ) : puissance sortant de (Σ).**

■ **Analogies**

	MFL 2	THM 8	EM 2	EM 5
Vecteur	$\vec{j}_m$	$\vec{j}_Q$	$\vec{j}$	$\vec{\Pi}$
	densité de flux de masse	**densité de flux thermique**	**densité de courant**	**vecteur de Poynting**
Flux à travers S	$D_m = \iint_S \vec{j}_m \cdot \mathrm{d}\vec{S}$	$\Phi = \iint_\Sigma \vec{j}_{th} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$	$i = \iint_\Sigma \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$	$\mathcal{P}_{em,s} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi} . \overrightarrow{\mathrm{d}S_{ext}}$
Unité	$\mathrm{kg.}\,s^{-1}.\mathrm{m}^{-2}$	$\mathrm{W.m}^{-2}$	$\mathrm{A.m}^{-2}$	$\mathrm{W.m}^{-2}$

■ **Expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$**

On démontre que le vecteur de Poynting s'écrit

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Il donne la **direction de propagation de l'énergie électromagnétique**, qui coïncide avec la **direction de propagation de l'onde électromagnétique.**

C) Bilan énergétique global pour un volume fixe

On s'intéresse ici à une propagation **dans le vide sans charge ni courant** : **pas d'énergie dissipée par effet Joule**, et nous allons traduire par une équation locale la conservation de l'énergie.

Soit une surface fermée (Σ) délimitant un volume $\mathcal{V}$ quelconque placé dans le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$, $U_{em}(t)$ l'énergie électromagnétique contenue dans ce volume, et u_{em} la **densité volumique d'énergie électromagnétique** associée : $U_{em}(t) = \iiint_{\mathcal{V}} u_{em}(M,t)\, d\tau$

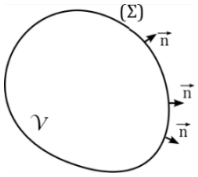
■ **Bilan d'énergie**

L'énergie électromagnétique $U_{em}(t)$ comprise dans $\mathcal{V}$ varie au cours du temps entre t et $t + dt$:

$$dU_{em}(t) = U_{em}(t + dt) - U_{em}(t)$$

Dans le vide, cette variation a lieu exclusivement par le biais de transferts d'énergie électromagnétique hors de $\mathcal{V}$ à travers la surface (Σ). Avec la puissance électromagnétique algébrique $\mathcal{P}_{em,ent}$ **entrant** dans $\mathcal{V}$: $dU_{em}(t) = \mathcal{P}_{em,ent} dt$ soit

$$\mathcal{P}_{em,ent} = \frac{dU_{em}}{dt} \qquad (1)$$



La puissance **entrant** dans $\mathcal{V}$ (traversant la surface (Σ) **vers l'intérieur)** est l'opposé du flux de $\vec{\Pi}$ à travers (Σ) orientée **vers l'extérieur (**convention usuelle pour une surface fermée).

On peut donc écrire $\frac{dU_{em}}{dt} = \mathcal{P}_{em,ent} = -\mathcal{P}_{em,s} = -\oiint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_{ext}}$ (2)

■ **Équation intégrale de conservation de l'énergie électromagnétique, pour un volume $\mathcal{V}$ délimité par une surface (Σ)**

$$\frac{dU_{em}}{dt} = -\oiint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_{ext}}$$

Remarque : Le signe "–" est lié à l'orientation des vecteurs $\mathrm{d}\overrightarrow{S_{ext}}$ vers l'extérieur.

D) Equation locale de Poynting (bilan d'énergie local)

■ Équation locale de Poynting

$$\mathbf{div}(\vec{\Pi}) + \frac{\partial u_{em}(M,t)}{\partial t} = 0$$

Elle traduit la **conservation de l'énergie électromagnétique dans le vide.**

■ Analogies

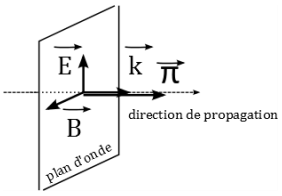
	MFL 2	THM 8	EM 2	EM 5
Vecteur	$\vec{j}_m$	$\vec{j}_Q$	$\vec{j}$	$\vec{\Pi}$
	densité de flux de masse	**densité de flux thermique**	**densité de courant**	**vecteur de Poynting**
Flux à travers S	$D_m = \iint_S \vec{j}_m \cdot \mathrm{d}\vec{S}$	$\Phi = \iint_\Sigma \vec{j}_{th} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$	$i = \iint_\Sigma \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$	$\mathcal{P}_{em,s} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi} . \overrightarrow{\mathrm{d}S_{ext}}$
Unité	$\mathrm{kg}.s^{-1}.\mathrm{m}^{-2}$	$\mathrm{W}.\mathrm{m}^{-2}$	$\mathrm{A}.\mathrm{m}^{-2}$	$\mathrm{W}.\mathrm{m}^{-2}$
Équation locale de conservation de	la masse	l'énergie interne (ou de l'enthalpie)	la charge	l'énergie électromagnétique
	$\mathbf{div}(\vec{j}_m) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$	$\mathbf{div}(\vec{j}_{th}) + \frac{\partial(\rho c T)}{\partial t} = 0$	$\mathbf{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$	$\mathbf{div}(\vec{\Pi}) + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = 0$
	ρ masse volumique du fluide	ρ masse volumique c capacité thermique massique	ρ densité volumique de charge	u_{em} densité volumique d'énergie électromagnétique

E) Énergie transportée par une OemPPH

Relation de structure entre les champs pour une OemPP : $\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c}$ On en déduit :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c}\vec{u}_k = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u}_k$$

Le vecteur de Poynting **est colinéaire à la direction de propagation** de l'onde



Considérons une OemPPH, dont le champ électrique est de la forme $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)$

Vecteur de Poynting moyen, qui donne accès à la **puissance moyenne rayonnée** $\langle P \rangle = \langle \Pi \rangle S$ **:**

$$\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \langle \varepsilon_0 c E^2 \rangle = \varepsilon_0 c \langle E^2 \rangle = \varepsilon_0 c E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi) \rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}$$

■ Densité volumique d'énergie électromagnétique des OemPP

$$u_{em}(M,t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(M,t) + \frac{1}{2}\frac{B^2(M,t)}{\mu_0}$$

Avec $E = Bc$ soit $\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{E^2}{c^2\mu_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ d'où

■ Expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique pour une OemPP

$$u_{em} = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

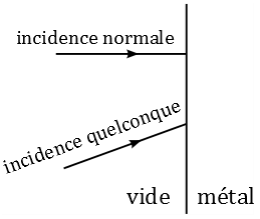
■ Cas particulier des OemPPH

Si on considère de plus une OemPPH telle que $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)$

$$\langle \boldsymbol{u_{em}} \rangle = \langle \varepsilon_0 E^2 \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi) \rangle = \frac{\boldsymbol{\varepsilon_0 E_0^2}}{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{B_0^2}}{\boldsymbol{2\mu_0}}$$

IV) REFLEXION SOUS INCIDENCE NORMALE D'UNE OEMPPH POLARISEE RECTILIGNEMENT SUR UN PLAN CONDUCTEUR PARFAIT

On s'intéresse à une onde se propageant initialement dans le vide avant de rencontrer un conducteur parfait, l'interface avec le vide étant un plan perpendiculaire à la direction de propagation : c'est l'**incidence normale**.



A) Modèle du conducteur parfait

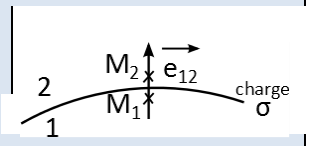
■ Modèle du conducteur parfait

Un **conducteur parfait** est caractérisé par une **conductivité γ infinie ;** on a alors $\vec{E} = \vec{0}$ **et** $\vec{B} = \vec{0}$

■ Discontinuités des champs à l'interface entre conducteur et vide

Le champ électrique subit une **discontinuité finie** à la **traversée d'une surface chargée :**

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_{12}$$

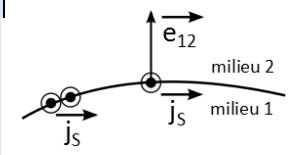


Lors de la **traversée d'une surface chargée :**

- La composante **tangentielle** du champ électrique est **continue**
- La composante **normale** du champ électrique est **discontinue**.

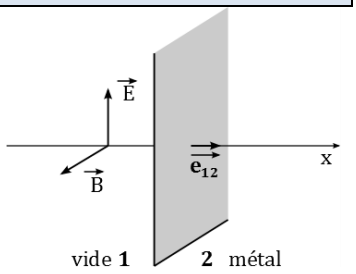
Le champ magnétique subit une **discontinuité finie** à la traversée d'une **nappe de courant surfacique :**

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12}$$



- La **composante tangentielle** du champ magnétique est **discontinue** lors de la traversée d'une nappe surfacique.
- La **composante normale** du champ magnétique est **continue** lors de la traversée d'une nappe surfacique.

Soit un conducteur parfait qui occupe le demi-espace $x > 0$, le demi-espace $x < 0$ étant vide ; $\vec{e}_{12} = \vec{e}_x$



D'après les relations de passage rappelées, on a alors :

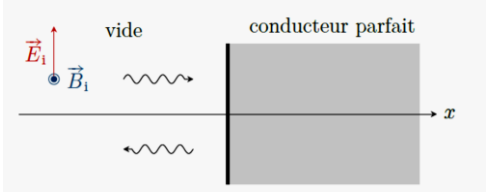
$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_{12} = \vec{0} - \vec{E}(0^-) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\vec{E}(0^-) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_x} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12} = \vec{0} - \vec{B}(0^-) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\vec{B}(0^-) = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x} \qquad \textbf{(2)}$$

B) Caractéristiques de l'onde réfléchie

■ Onde incidente

On considère une OemPPH se propageant dans le vide selon $\vec{e}_x$, polarisée rectilignement suivant $\vec{e}_y$, rencontrant un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$. Onde incidente : $\vec{E}_i(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_y$



Relation de structure : $\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ d'où $\vec{B}_i(x,t) = B_0 \cos(\omega t - kx)\, \vec{e}_z$ avec $B_0 = \frac{E_0}{c}$

À la limite du conducteur ($x = 0^-$), on a pour les champs incidents :

$\vec{E}_i(0^-,t) = E_0 \cos(\omega t)\, \vec{e}_y$ $\qquad$ $\vec{B}_i(0^-,t) = B_0 \cos(\omega t)\, \vec{e}_z$

■ Nécessité de l'existence d'une onde réfléchie

Le champ $\vec{E}_i$ ne satisfait pas à la relation de continuité **(1)**, il doit apparaître un champ réfléchi $\vec{E}_r$ de sorte que $\vec{E}_i + \vec{E}_r$ vérifie la relation de continuité. Du fait de la linéarité des équations de Maxwell, elle a la même pulsation que l'onde incidente.
Il apparaît une **onde réfléchie, de pulsation ω, se propageant suivant $-\vec{e}_x$.**

Soient $\vec{E}_r$ et $\vec{B}_r$ les champs électrique et magnétique réfléchis. Les relations de passage impliquent :

$\vec{E}_i(0^-,t) + \vec{E}_r(0^-,t) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_x$ **(1)** $\qquad$ $\vec{E}_r(0^-,t) = -E_0 \cos(\omega t)\, \vec{e}_y - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_x$ **(1)**

$\vec{B}_i(0^-,t) + \vec{B}_r(0^-,t) = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x$ **(2)** $\qquad$ $\vec{B}_r(0^-,t) = -B_0 \cos(\omega t)\, \vec{e}_z - \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x$ **(2)**

■ Champ électrique réfléchi

- D'après les caractéristiques du champ électrique, il est nécessairement orthogonal à la direction de propagation, et n'a donc **pas de composante selon $\vec{e}_x$** avec $\vec{E}_r(0^-,t).\vec{e}_x = 0$
- Projection de la relation de passage sur $\vec{e}_x$:

$$\vec{E}_r(0^-,t).\vec{e}_x = -E_0 \cos(\omega t)\, \vec{e}_y.\vec{e}_x - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_x.\vec{e}_x \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

On en déduit qu'il n'y aura **pas de charge statique sur le conducteur : $\sigma = 0$;**

- Projection de la relation de passage sur $\vec{e}_z$: $\vec{E}_r(0^-,t).\vec{e}_z = -E_0 \cos(\omega t)\, \vec{e}_y.\vec{e}_z - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_x.\vec{e}_z = 0$

Le champ réfléchi n'a **pas de composante selon $\vec{e}_z$**

- Projection de la relation de passage sur $\vec{e}_y$:

$$\vec{E}_r(0^-,t).\vec{e}_y = -E_0 \cos(\omega t)\, \vec{e}_y.\vec{e}_y - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_x.\vec{e}_y = -E_0 \cos(\omega t)$$

Soit $\vec{E}_r(0^-,t) = -E_0 \cos(\omega t)\, \vec{e}_y$, avec de plus une propagation selon $-\vec{e}_x$:

$$\vec{E}_r(x,t) = -E_0 \cos(\omega t + kx)\, \vec{e}_y = E_0 \cos(\omega t + kx + \pi)\, \vec{e}_y$$

L'onde réfléchie a la **même pulsation** que l'onde incidente ; le champ électrique réfléchi a la **même amplitude** que le champ incident et subit un **déphasage de π.**

Le champ électrique résultant est nul sur la surface du conducteur, ainsi qu'à l'intérieur de celui-ci.

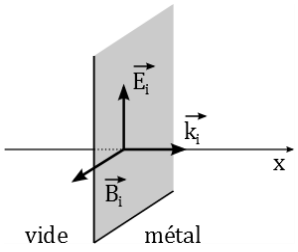
■ Champ magnétique réfléchi

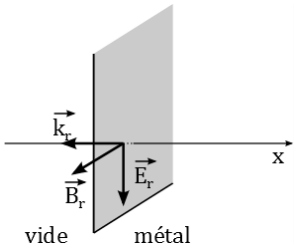
$$\vec{B}_r(x,t) = \frac{(-\vec{e}_x) \wedge \overrightarrow{E_r}}{c} = \frac{(-\vec{e}_x) \wedge (-E_0 \cos(\omega t + kx)\, \vec{e}_y)}{c} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t + kx)\vec{e}_z$$

Le champ magnétique réfléchi a la même amplitude et la même phase que le champ incident.

■ Caractéristiques de l'onde réfléchie par un conducteur parfait suite à une incidence normale

× **L'onde réfléchie** a la **même pulsation et la même amplitude** que **l'onde incidente.**
× **Déphasage de π** sur l'interface pour le **champ électrique.**
× **Pas de déphasage** sur l'interface pour le **champ magnétique**





■ Charges, courants sur l'interface

Relation de passage pour le champ magnétique : $\vec{B}_i(0^-,t) + \vec{B}_r(0^-,t) = -\mu_0\, \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x$

Or $\vec{B}_i(0^-,t) = B_0 \cos(\omega t)\, \vec{e}_z = \vec{B}_r(0^-,t)$ d'où $2\, B_0 \cos(\omega t)\, \vec{e}_z = -\mu_0\, \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x$

$\vec{j}_s$ **est le courant sur l'interface,** donc **pas de composante suivant** $\vec{e}_x$
Le produit vectoriel par $\vec{e}_x$ donne une composante sur $\vec{e}_z$, donc **pas de composante sur** $\vec{e}_z$:
$\vec{j}_s$ ne peut avoir qu'une composante sur $\vec{e}_y$:

$2\, B_0 \cos(\omega t)\, \vec{e}_z = -\mu_0 (j_s)_y\, \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x$ soit $\boldsymbol{\vec{j}_s = 2\, \frac{E_0}{c\mu_0} \cos(\omega t)\, \vec{e}_y}$

La réflexion d'une OemPPH sous incidence normale sur un plan **conducteur parfait** induit un **courant surfacique dans la direction du champ électrique** incident et une **charge surfacique nulle.**

Remarque : les électrons libres du métal sont mis en mouvement par le champ électrique incident, il est donc logique que les courants surfaciques créés soient parallèles au champ électrique incident.

C) Superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie – onde stationnaire

Champ électrique incident	**Champ électrique réfléchi**
$\vec{E}_i(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\, \vec{e}_y$	$\vec{E}_r(x,t) = -E_0 \cos(\omega t + kx)\, \vec{e}_y$
Champ magnétique incident	**Champ magnétique réfléchi**
$\vec{B}_i(x,t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx)\, \vec{e}_z$	$\vec{B}_r(x,t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx)\, \vec{e}_z$

■ Champ électrique résultant

Principe de superposition : $\vec{E}(x,t) = \vec{E}_i(x,t) + \vec{E}_r(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\, \vec{e}_y - E_0 \cos(\omega t + kx)\, \vec{e}_y$

Or $\cos p - \cos q = -2 \sin\frac{p+q}{2} \sin\frac{p-q}{2}$ soit ici

$\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx) = -2 \sin\frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2} \sin\frac{\omega t - kx - \omega t - kx}{2} = -2 \sin(\omega t) \sin(-kx)$

Soit

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{E}(x,t) = 2\, E_0 \sin(\omega t) \sin(kx)\, \vec{e}_y}}$$

L'onde résultante est une **onde stationnaire.**

■ Champ magnétique résultant

Attention !! une **onde stationnaire (OS) n'est pas une OPP** !! le champ magnétique résultant ne peut donc se calculer à partir de la relation de structure. Il faut **sommer les champs magnétiques incident et réfléchi calculés séparément.**

$$\vec{B}(x,t) = \vec{B}_i(x,t) + \vec{B}_r(x,t) = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_z + \frac{E_0}{c}\cos(\omega t + kx)\,\vec{e}_z$$

Or $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ soit ici $\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx) = 2\cos(\omega t)\cos(kx)$

$$\boxed{\vec{B}(x,t) = 2\,\frac{E_0}{c}\cos(\omega t)\cos(kx)\,\vec{e}_z}$$

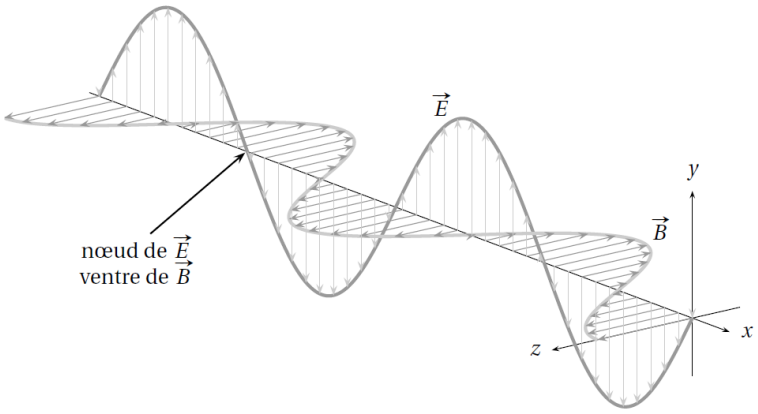
L'onde résultante est une onde stationnaire et non plus une onde progressive.

■ Position des nœuds, des ventres

En $x = 0$, sur l'interface vide-conducteur, le champ électrique présente un nœud (conformément à la relation de passage) et le champ magnétique un ventre. Avec $m \in \mathbb{Z}$:

	$\vec{E}$	$\vec{B}$
Nœuds	$\sin(kx_N) = 0$ soit $kx_{N,m} = m\pi$ et $x_{N,m} = \frac{m\pi}{k} = m\frac{\lambda}{2}$	$\cos(kx_N) = 0$ soit $kx_{N,m} = \frac{\pi}{2} + m\pi$ et $x_{N,m} = \frac{\pi}{2k} + \frac{m\pi}{k} = \frac{\lambda}{4} + m\frac{\lambda}{2}$
Ventres	$\sin(kx_V) = \pm 1$ soit $kx_{V,m} = \frac{\pi}{2} + m\pi$ D'où $x_{V,m} = \frac{\pi}{2k} + \frac{m\pi}{k} = \frac{\lambda}{4} + m\frac{\lambda}{2}$	$\cos(kx_V) = \pm 1$ soit $kx_{V,m} = m\pi$ et $x_{V,m} = \frac{m\pi}{k} = m\frac{\lambda}{2}$

Les champs électrique et magnétique sont tous les deux stationnaires de même pulsation, à la différence que les nœuds d'un champ correspondent aux ventres de l'autre.



D) Aspect énergétique

Vecteur de Poynting de l'onde résultante : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ avec

$\vec{E}(x,t) = 2\,E_0\sin(\omega t)\sin(kx)\,\vec{e}_y$ et $\vec{B}(x,t) = 2\,\frac{E_0}{c}\cos(\omega t)\cos(kx)\,\vec{e}_z$

$$\vec{\Pi}(x,t) = 4\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\sin(\omega t)\sin(kx)\cos(\omega t)\cos(kx)\vec{e}_x$$

Avec $\sin(2a) = 2\sin a\cos a$ $\quad \vec{\Pi}(x,t) = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\sin(2\omega t)\sin(2kx)\,\vec{e}_x$ soit $\quad \langle\vec{\Pi}(x,t)\rangle = \vec{0}$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est nulle en tout point. Il n'y a en moyenne pas de propagation d'énergie, les ondes incidente et réfléchie transportent la même puissance mais dans 2 directions opposées.

■ Densité d'énergie électromagnétique

$$u_{em}(x,t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(x,t) + \frac{1}{2}\frac{B^2(x,t)}{\mu_0}$$

$$\vec{E}(x,t) = 2\,E_0\sin(\omega t)\sin(kx)\;\vec{e}_y \quad \Rightarrow \quad E^2(x,t) = 4\,E_0^2\sin^2(\omega t)\sin^2(kx) \quad \Rightarrow \quad \langle E^2(x)\rangle = 2\,E_0^2\sin^2(kx)$$

$$\vec{B}(x,t) = 2\,\frac{E_0}{c}\cos(\omega t)\cos(kx)\;\vec{e}_x \quad \Rightarrow \quad B^2(x,t) = 4\frac{E_0^2}{c^2}\cos^2(\omega t)\cos^2(kx) \quad \Rightarrow \quad \langle B^2(x)\rangle = 2\frac{E_0^2}{c^2}\cos^2(kx)$$

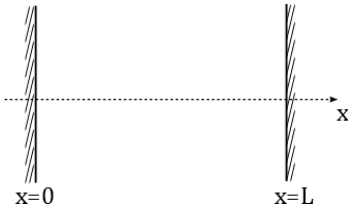
$$\langle u_{em}(x)\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0\langle E^2(x)\rangle + \frac{1}{2}\frac{\langle B^2(x)\rangle}{\mu_0} = E_0^2\left(\varepsilon_0\sin^2(kx) + \frac{1}{\mu_0 c^2}\cos^2(kx)\right) = E_0^2\varepsilon_0\left(\sin^2(kx)+\cos^2(kx)\right)$$

$$\boldsymbol{\langle u_{em}(x)\rangle = \varepsilon_0 E_0^2}$$

L'énergie est répartie uniformément dans tout l'espace.

E) Applications aux cavités à 1 dimension. Modes d'onde

Considérons une cavité vide taillée à l'intérieur d'un bon conducteur, que l'on modélise par un conducteur parfait, entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$.
Un émetteur engendre en continu une onde électromagnétique arrivant en incidence normale sur la face $x = L$; elle se réfléchit puis se propage en sens inverse jusqu'à $x = 0$, etc. (aucune perte d'énergie pour un métal parfait).
L'onde résultante est stationnaire (superposition d'ondes progressives de sens de propagation opposés et de même amplitude).



Considérons une onde monochromatique, avec $\vec{E}$ de la forme : $\vec{E}(x,t) = f(x)\cos(\omega t+\varphi)\ \vec{e}_y$

Dans la cavité vide, $\vec{E}$ vérifie l'équation de propagation d'Alembert : $\vec{\Delta}\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

Avec $\vec{E} = E_y(x,t)\vec{e}_y$, $\quad \vec{\Delta}\vec{E} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}\vec{e}_y = \frac{\partial^2(f(x)\cos(\omega t+\varphi))}{\partial x^2}\vec{e}_y = \frac{d^2 f}{dx^2}\cos(\omega t+\varphi)\ \vec{e}_y$

De plus, $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial(f(x)\cos(\omega t+\varphi)\vec{e}_y)}{\partial t} = f(x)\frac{\partial(\cos(\omega t+\varphi))}{\partial t}\vec{e}_y = -\omega f(x)\sin(\omega t+\varphi)\vec{e}_y$

$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \quad -\omega f(x)\frac{\partial(\sin(\omega t+\varphi))}{\partial t}\vec{e}_y = -\omega^2 f(x)\cos(\omega t+\varphi)\ \vec{e}_y$

d'où $\quad \frac{d^2 f}{dx^2}\cos(\omega t+\varphi)\ \vec{e}_y + \frac{1}{c^2}f(x)\omega^2\cos(\omega t+\varphi)\ \vec{e}_y = \vec{0}$ $\qquad$ et donc $f(x)$ vérifie

$\frac{d^2 f}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 f(x) = 0$ $\quad$ ou $\quad \boxed{\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f(x) = 0}$ avec $\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$ $\qquad$ Soit $\boldsymbol{f(x) = A\cos(kx+\psi)}$

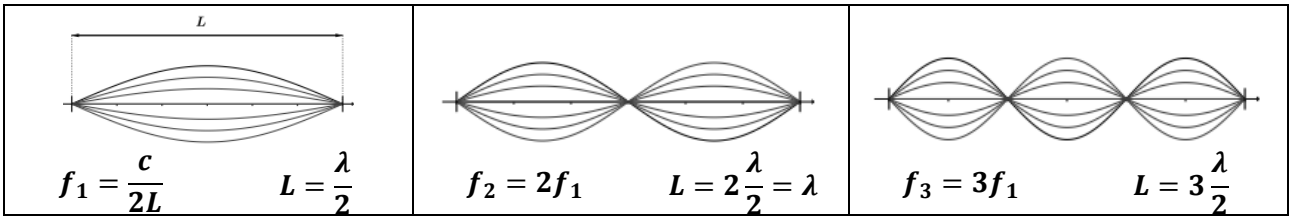
D'où $\qquad \vec{E}(x,t) = E_0\cos(kx+\psi)\cos(\omega t+\varphi)\,\vec{e}_y$

Conditions aux limites : $\forall t, \vec{E}(x=0,t) = \vec{E}(x=L,t) = \vec{0}$ d'où $\quad (1)\ \cos(\psi) = 0 \quad (2)\ \cos(kL+\psi) = 0$

(1) $\quad \Rightarrow \psi = \pm\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ (2) $\quad \Rightarrow \cos\left(kL \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \sin(kL) = 0 \quad \Rightarrow kL = n\pi$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

La valeur de k est imposée, **la norme du vecteur d'onde est quantifiée :** $\boxed{k = k_n = n\frac{\pi}{L}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

La **pulsation, la fréquence et la longueur d'onde** sont donc également **quantifiées** : avec $n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{\omega_n = n\frac{\pi c}{L} \qquad f_n = n\frac{c}{2L} \qquad L = n\frac{\lambda_n}{2}}$$

Mode **fondamental** : $n = 1$, $\boldsymbol{f_1 = \frac{c}{2L}}$; $\qquad$ **harmoniques de rang n : $f_n = nf_1$**