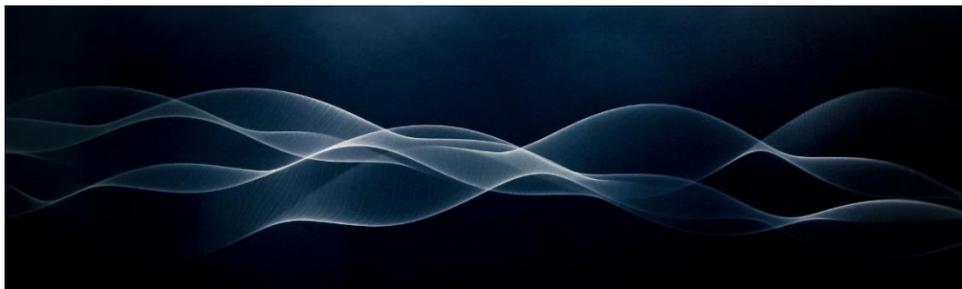


## CHAPITRE EM.5 : PROPAGATION D'ONDES ELECTROMAGNETIQUES



Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>10. Propagation des ondes électromagnétiques</b>	
Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide	Énoncer les équations de Maxwell dans le vide. Interpréter qualitativement le lien entre l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday. Établir l'équation de propagation des champs dans le vide.
Équation locale de Poynting	Décrire un bilan d'énergie électromagnétique dans le cas du vide et définir le vecteur de Poynting. Citer des ordres de grandeur de flux énergétiques moyens (Laser, flux solaire, etc.) Utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée.
Onde plane, onde plane progressive, onde plane progressive harmonique	Définir une onde plane, une onde plane progressive et une onde plane progressive harmonique. Expliquer la pertinence et les limites de ces modèles.
Onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement	Décrire la structure d'une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement. Expliquer la pertinence de ce modèle. Décrire la propagation de l'énergie des ondes planes progressives harmoniques polarisées rectilignement. <b>Mettre en œuvre un protocole expérimental illustrant la polarisation rectiligne d'une onde électromagnétique.</b>
Spectre des ondes électromagnétiques	Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications.
Réflexion sous incidence normale d'une onde plane, progressive et monochromatique polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait. Onde stationnaire	Exploiter la nullité des champs dans un métal parfait. Établir l'expression de l'onde réfléchie en exploitant les relations de passage fournies. Interpréter qualitativement la présence de courants localisés en surface. Reconnaître et caractériser une onde stationnaire.
Applications aux cavités à une dimension. Mode d'onde stationnaire	<b>Mettre en œuvre un dispositif permettant d'étudier une onde électromagnétique, dans le domaine des ondes centimétriques.</b>

*Partie 10 : les équations de Maxwell sont admises mais pourront largement être justifiées à l'aide des connaissances issues des parties précédentes. La propagation des ondes électromagnétiques dans le vide permettra de justifier la pertinence du modèle d'onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement. La réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait et son confinement dans une cavité permettent aux étudiants d'approfondir leurs connaissances sur les ondes stationnaires.*

L'objectif de ce chapitre est de comprendre les principaux aspects liés à la propagation des ondes électromagnétiques (OEM) dans le vide, sachant que l'air peut être assimilé au vide électromagnétique en très bonne approximation.

Nous avons déjà vu en électrostatique (**EM1**) et magnétostatique (**EM3**) les liens entre l'existence de champs électrostatique ou magnétostatique et leurs sources (présence de charges ou de courants statiques).

Ce chapitre va permettre de montrer qu'en régime variable, les champs électrique et magnétique ne sont plus indépendants : un champ électrique variable dans le temps est source de champ magnétique et réciproquement, un champ magnétique variable dans le temps est source de champ électrique ; ceci nous amènera à compléter les équations de Maxwell introduites dans le cadre de l'électromagnétisme en régime permanent (statique).

Nous décrirons également l'énergie associée à un champ électromagnétique, avant de montrer que, loin des sources, un champ électromagnétique constitue une onde qui peut se propager et transporter l'énergie, mais aussi se réfléchir.

# I) LES EQUATIONS DE MAXWELL

## A) Champ électromagnétique

Considérons une distribution volumique de charges et de courants décrite par les densités  $\{\rho(P, t); \vec{j}(P, t)\}$ , ainsi qu'une charge ponctuelle  $q$  située à l'instant  $t$  en un point  $M$ , qui possède un vecteur vitesse  $\vec{v}(M, t)$ .

La force subie par la particule au point  $M$  à l'instant  $t$  correspond à la **force de Lorentz** :

$$\vec{F}(M, t) = q(\vec{E}(M, t) + \vec{v}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t))$$

**Par définition**,  $\{\vec{E}(M, t); \vec{B}(M, t)\}$  constitue le **champ électromagnétique** créé au point  $M$  par la distribution  $\{\rho(P, t); \vec{j}(P, t)\}$ , défini par son action sur une particule chargée, la partie indépendante de la vitesse de la particule définissant le champ électrique  $\vec{E}(M, t)$  et la partie dépendant de la vitesse le champ magnétique  $\vec{B}(M, t)$ .

## B) Les équations de Maxwell

### 1) Les 4 équations de Maxwell en régime variable

Nous avons dans les chapitres précédents énoncé les équations de Maxwell dans le cadre stationnaire (électrostatique et magnétostatique).

Nous allons les généraliser aux régimes variables, les équations de Maxwell étant des équations locales<sup>1</sup> reliant le champ électromagnétique à ses sources.

Soit une distribution de charges caractérisée dans un référentiel galiléen par les densités de charge et de courant :  $\rho(\vec{r}, t)$  et  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ .

Cette distribution est source d'un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  qui satisfait aux quatre équations suivantes :

		Régime variable	Statique	Interprétation
Maxwell-Gauss	MG	$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	valable	Lien entre $\vec{E}$ et l'une de ses sources (présence de charges, soit $\rho(\vec{r}, t)$ )
Maxwell-Faraday	MF	$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Non : $\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$	Propriété intrinsèque du champ électromagnétique : un champ magnétique variable est source d'un champ électrique.
Maxwell-Ampère	MA	$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$	Non : $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$	Lien entre $\vec{B}$ et ses sources (présence de courants électriques, soit $\vec{j}(\vec{r}, t)$ , ou d'un champ électrique variable).
Maxwell-flux (ou Maxwell-Thomson)	MΦ	$\text{div}(\vec{B}) = 0$	valable	Propriété intrinsèque du champ électromagnétique.

En régime variable, champ électrique et champ magnétique sont indissociables.

■ **Remarque** : Le second terme de l'équation de Maxwell-Ampère est appelé, par analogie au **courant de conduction**  $\vec{j}$ , **courant de déplacement** :

$$\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ce courant de déplacement traduit le couplage entre champ électrique et champ magnétique en régime variable.

<sup>1</sup> Bien que les équations de Maxwell aient un caractère local, l'ensemble des charges et des courants de l'espace ont une influence sur la valeur du champ électromagnétique en un point  $M$  donné de l'espace. En effet, les charges et les courants en un point  $P$  donné influent sur les **dérivées spatiales** des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  en ce point  $P$  (par le biais des opérateurs divergence et rotationnel), donc de proche en proche, l'ensemble des charges et des courants de l'espace vont avoir une influence sur un point  $M$  donné.

## 2) Equations de Maxwell en statique

En se plaçant en régime stationnaire, les grandeurs étant indépendantes du temps, les termes  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  et  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  sont nuls ; on retrouve alors bien les équations de l'électrostatique et de la magnétostatique, qui constituent donc l'un des cas particuliers des équations de Maxwell.

### ■ Les quatre équations de Maxwell en statique (à connaître !!)

		Statique			Régime variable
		Equation locale	Equation globale	Commentaires	Validité
Maxwell-Gauss	MG	$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	Flux de $\vec{E}$ non conservatif	valable
Maxwell-Faraday	MF	$\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$	$\oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{M} = 0$	Circulation de $\vec{E}$ conservative, existence d'un potentiel électrostatique $V$ tq $\vec{E} = -\text{grad}(V)$	non
Maxwell-Ampère	MA	$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$	$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{M} = \mu_0 I_{enlacé}$	Circulation de $\vec{B}$ non conservative	non
Maxwell-flux (ou Maxwell-Thomson)	MΦ	$\text{div}(\vec{B}) = 0$	$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	Flux de $\vec{B}$ conservatif	valable

Le lien entre les formulations locales et globales doit être connu, il est obtenu à l'aide des **théorèmes de Stokes (circulation) ou d'Ostrogradski (flux)**.

### ■ Remarques

- L'équation de **Maxwell-Gauss** est identique en régime statique et en régime variable, le théorème de Gauss peut donc également s'appliquer en régime variable tant que la surface de Gauss choisie est fixe et indéformable.
- L'équation de **Maxwell-flux** est identique en régime statique et en régime variable, la conservation du flux magnétique (ou l'égalité du flux au travers de toute surface s'appuyant sur un même contour fermé) est valable également en régime variable.
- En régime variable, si les équations relatives aux flux (à la divergence) sont inchangées, celles relatives à la circulation (au rotationnel) sont modifiées et traduisent un couplage entre les champs électrique et magnétique.

## 3) Autres commentaires

### ■ Couplage entre champ électrique et champ magnétique

En régime variable, le rotationnel de  $\vec{B}$  dépend de  $\vec{E}$ , tandis que le rotationnel de  $\vec{E}$  dépend de  $\vec{B}$  : les équations de Maxwell couplent le champ électrique  $\vec{E}$  et le champ magnétique  $\vec{B}$ , contrairement à la statique où ces équations forment deux jeux d'équations indépendantes décrivant respectivement l'électrostatique et de la magnétostatique.

Ce couplage entre  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  en régime variable implique qu'il faut bien considérer l'ensemble  $\{\rho; \vec{j}\}$  comme la source du champ électromagnétique considéré comme l'ensemble  $\{\vec{E}; \vec{B}\}$  couplé.

### ■ Linéarité des équations de Maxwell

La linéarité des équations de Maxwell autorise le **principe de superposition** :

Considérons en un point M à l'instant  $t$  les distributions de charges et de courant  $\{\rho_1; \vec{j}_1\}$  et  $\{\rho_2; \vec{j}_2\}$  qui engendrent les champs électromagnétiques  $\{\vec{E}_1; \vec{B}_1\}$  et  $\{\vec{E}_2; \vec{B}_2\}$ .

La distribution  $\{\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2; \lambda_1 \vec{j}_1 + \lambda_2 \vec{j}_2\}$  engendre alors  $\{\vec{E} = \lambda_1 \vec{E}_1 + \lambda_2 \vec{E}_2; \vec{B} = \lambda_1 \vec{B}_1 + \lambda_2 \vec{B}_2\}$ .

- On peut montrer que la **loi de Faraday de l'induction** peut être obtenue à partir de l'**équation locale de Maxwell Faraday**, avec pour être cohérent sur le plan des conventions le générateur induit orienté en **convention générateur** par rapport à l'intensité dans le circuit. Attention ! il s'agit d'un **générateur fictif qui ne peut être localisé** dans un circuit, dont il est possible de mesurer les conséquences, mais pas de mesurer directement la fém associée !

## C) Equations de Maxwell en régime variable dans le vide (en l'absence de charge ou de courant)

Lorsqu'on se place « dans le vide », on suppose dans toute la suite l'absence de charges et de courants électriques, soit  $\rho = 0$  et  $\vec{j} = \vec{0}$  ; les équations de Maxwell deviennent alors :

		Régime variable dans le vide
Maxwell-Gauss	MG	$\text{div}(\vec{E}) = 0$
Maxwell-Faraday	MF	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell-Ampère	MA	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Maxwell-flux (ou Maxwell-Thomson)	MΦ	$\text{div}(\vec{B}) = 0$

À connaître !!

## II) ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS LE VIDE

### A) Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide (en l'absence de toute charge ou courant)

#### 1) Introduction

Il s'agit ici de généraliser les résultats obtenus lors de l'étude des ondes mécaniques (corde, etc.) aux ondes électromagnétiques, et d'effectuer une transition entre l'électromagnétisme et l'optique.

Nous étudierons la propagation du champ électromagnétique dans un domaine dépourvu de charges et de courant, d'où l'appellation d'ondes électromagnétiques dans le vide, l'air pouvant de plus être assimilé au vide électromagnétique avec une très bonne approximation (par exemple, étude de la propagation des ondes électromagnétiques (dont la lumière) émises par le soleil à travers l'espace, et qui arrivent (notamment) sur Terre).

#### ■ Rappel sur les ondes mécaniques transversales

Sur une corde de masse linéique  $\mu$  et de tension  $F_0$ , on avait obtenu une équation de propagation, ou équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$y$  étant le déplacement transversal, supposé faible.

En faisant apparaître la **célérité**  $c$  de l'onde mécanique sur la corde :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{F_0}{\mu}}$$

Nous allons démontrer que l'équation satisfaite par les champs vectoriels électromagnétiques est formellement la même ; nous pourrons alors écrire une équation scalaire de même type pour chacune des composantes  $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$  des champs vectoriels  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . Cette équation prouvera ainsi l'existence d'ondes électromagnétiques se propageant à une célérité  $c$  que nous allons établir.

## 2) Equation de propagation et onde électromagnétique

### a) Méthode d'étude

Nous allons étudier les champs électrique et magnétique dans une zone vide de charge et de courants : on ne se préoccupe pas de la source de ces champs, mais seulement de ce qu'ils deviennent à l'extérieur de cette source.

Les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday montrent le couplage des champs en régime variable : il existe simultanément un champ électrique et un champ magnétique.

On cherche à découpler les équations pour obtenir deux équations relatives l'une à  $\vec{E}$  seul, l'autre à  $\vec{B}$  seul.

#### ■ Méthode pour obtenir l'équation de propagation de $\vec{a}$ , où $\vec{a}$ sera $\vec{E}$ ou $\vec{B}$

- Écrire  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}))$
- Appliquer la relation d'analyse vectorielle du double rotationnel (fournie) :  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{a})) - \Delta\vec{a}$
- A l'aide des équations de Maxwell, exprimer successivement  $\text{div}(\vec{a}) = 0$  (dans le vide), puis  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a})$  qui fait apparaître  $\overrightarrow{\text{rot}}\frac{\partial\vec{b}}{\partial t}$  où  $\vec{b}$  est l'autre champ.
- Inverser les opérateurs :  $\overrightarrow{\text{rot}}\frac{\partial\vec{b}}{\partial t} = \frac{\partial\overrightarrow{\text{rot}}\vec{b}}{\partial t}$ , puis exploiter une troisième équation de Maxwell pour exprimer  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{b}$ .

### b) Équation pour le champ électrique $\vec{E}$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta\vec{E}$$

Espace 1

Avec (MG) dans le vide :  $\text{div}(\vec{E}) = 0$  soit  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = -\Delta\vec{E}$

Avec (MF) :  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  soit  $\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\Delta\vec{E}$  ou

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = \Delta\vec{E} = \frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B})}{\partial t}$$

Or selon (MA) dans le vide :  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$  d'où  $\Delta\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

$$\text{Finalement } \Delta\vec{E} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

### c) Équation pour le champ magnétique $\vec{B}$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{B})) - \Delta\vec{B}$$

Espace 2

Avec (MΦ) :  $\text{div}(\vec{B}) = 0$  soit  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})) = -\Delta\vec{B}$

Avec (MA) dans le vide :  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$  d'où  $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = -\Delta\vec{B}$  ou

$$\mu_0\epsilon_0\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = -\Delta\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E})}{\partial t}$$

Or selon (MF) :  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  d'où  $\Delta\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$  D'où  $\Delta\vec{B} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$

Les champs vectoriels  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  vérifient des équations de la même forme  $\Delta\vec{a} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{a}}{\partial t^2} = \vec{0}$  :

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta\vec{B} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

## d) Ondes électromagnétiques

### ■ Onde électromagnétique

**Onde électromagnétique** : ensemble de deux champs  $(\vec{E}, \vec{B})$  se propageant simultanément dans l'espace, potentiellement **dans le vide** (contrairement aux ondes mécaniques ou sonores), en vérifiant des **équations de d'Alembert de la même forme**  $\vec{\Delta}\vec{a} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{a}}{\partial t^2} = \vec{0}$  :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\Delta}\vec{B} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

#### ■ Remarque :

L'équation de d'Alembert est une équation dite aux dérivées partielles qui se retrouve dans une grande variété de phénomènes ondulatoires ; elle est par exemple vérifiée par le champ de pression d'une onde acoustique, la vibration d'une corde de guitare ou celle d'une colonne d'air dans un tuyau d'orgue, mais aussi l'intensité dans un câble coaxial.

#### ■ Dimension de $\epsilon_0\mu_0$ :

$$[\vec{\Delta}\vec{a}] = [\vec{a}] \times \frac{1}{L^2} \quad \left[\frac{\partial^2\vec{a}}{\partial t^2}\right] = [\vec{a}] \times \frac{1}{t^2}$$

$$\text{Donc } [\epsilon_0\mu_0] = \frac{1}{c^2} = \frac{T^2}{L^2}$$

Espace 3

### ■ Célérité de l'onde électromagnétique dans le vide :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \approx 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

On pourra aussi retenir :

$$\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1$$

Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont tous deux solutions de l'équation (vectorielle) de d'Alembert<sup>2</sup> :

$$\vec{\Delta}\vec{a} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{a}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

#### ■ Remarque 1 :

$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  valeur exacte, servant à la définition du mètre

$$c \approx 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$  valeur exacte

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$$

par définition

$$\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

#### ■ Remarque 2 :

L'équation étant **invariante par rapport au temps** (il intervient dans une dérivée seconde), cela signifie que la **propagation d'une onde électromagnétique est réversible** (elle peut se faire « dans les deux sens », contrairement à ce qu'on observe dans l'équation de la chaleur (**THM 8**) :  $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x - \frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t = 0$  : si  $T(x, t)$  est une solution de l'équation, alors  $T(x, -t)$  n'est pas solution, ce qui traduit l'**irréversibilité de la conduction thermique** et permet de définir une "flèche du temps").

■ **Remarque 3** : Cette équation de propagation est une équation linéaire, on pourra donc utiliser le **principe de superposition** ainsi que la **notation complexe**.

#### ■ Remarque 4 : Généralisation aux milieux matériels

L'équation de d'Alembert peut se généraliser en première approche aux milieux transparents, à condition de remplacer la célérité dans le vide  $c$  par la célérité  $c/n$  dans le milieu, où  $n$  est l'indice optique du milieu. En revanche, la présence d'un champ électromagnétique engendre un courant électrique dans un milieu conducteur : l'équation de d'Alembert n'est plus du tout applicable.

<sup>2</sup> On définit parfois l'opérateur d'Alembertien :  $\vec{\square} = \vec{\Delta} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  ; on a alors  $\vec{\square}\vec{E} = \vec{0}$  et  $\vec{\square}\vec{B} = \vec{0}$

## B) Ondes planes, ondes planes progressives

### 1) Notion d'onde plane

#### a) Modèle des ondes planes

De manière générale, l'équation de d'Alembert admet des solutions très variées, de par leur structure et leur dépendance spatiale, imposées par les conditions aux limites et les conditions initiales.

##### ■ Surface d'onde (ou front d'onde)

Surface continue de l'espace sur laquelle la grandeur caractéristique de l'onde étudiée (ici le champ électrique ou le champ magnétique) est **uniforme** à tout instant.

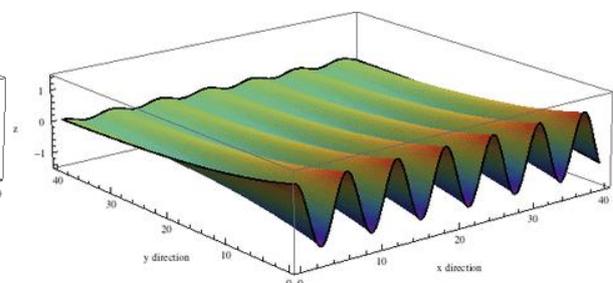
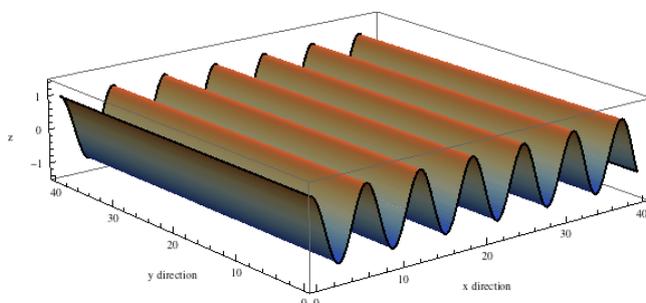
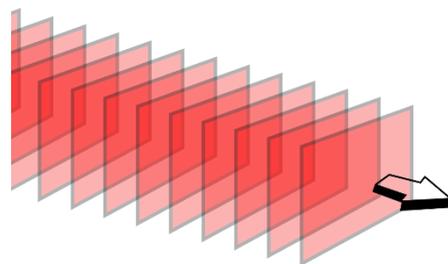
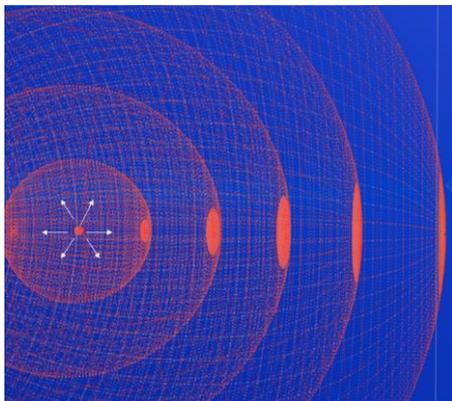
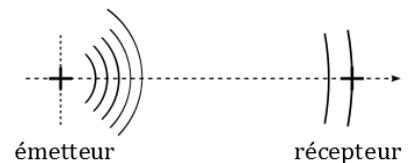
Il s'agit donc pour un signal donné de la surface telle que à un instant  $t$  donné,  $s(M, t) = cte$  ou  $\vec{s}(M, t) = \overline{cte}$

Lorsqu'un caillou tombe dans l'eau, les vagues formées observées sont concentriques ; lorsqu'on tape dans ses mains, le son émis se propage (si le milieu est uniforme) dans l'ensemble des directions de l'espace, sous forme de sphères concentriques.

De la même manière, nous pouvons considérer que le champ électromagnétique rayonné par le Soleil au voisinage de ce dernier ne dépend que du temps et de la distance  $r$  entre le point M considéré et le centre S du Soleil. Tout comme dans l'exemple du son, ce champ est uniforme sur une sphère centrée sur S.

Dans ces 2 exemples, propagation radiale, et surface d'onde sphérique : les ondes associées sont dites **sphériques**.

En nous plaçant en un point M suffisamment éloigné du Soleil (ou plus généralement du point émetteur ayant émis l'onde étudiée), nous pouvons localement assimiler cette surface sphérique à un plan, l'onde reçue par le En nous plaçant en un point M suffisamment éloigné du Soleil (ou plus généralement du point émetteur ayant émis l'onde étudiée), nous pouvons localement assimiler les différentes surfaces d'onde sphériques à des plans, l'onde reçue par le récepteur est alors assimilable à une **onde dite plane**.



©2014 by Daniel A. Russell ; <https://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/EvanescenceWaves/EvanescenceWaves.html>

##### ■ Ondes plane et sphérique

- **Onde plane** : dont les surfaces d'ondes sont des plans parallèles appelés **plans d'onde** ;
- **Onde sphérique** : si ses surfaces d'ondes sont des sphères concentriques.

- Une onde sphérique modélise une onde émise depuis une source ponctuelle (par exemple un point lumineux), tandis qu'une onde plane modélise une onde sphérique à grande distance de la source (on approxime la sphère par son plan tangent).

## b) Caractéristiques d'une onde plane (OP)

Le champ est le même dans tout un plan d'onde, donc il ne dépend que de l'abscisse  $x$  du plan d'onde mais ni de  $y$  ni de  $z$ .

### ■ Onde électromagnétique plane (OP)

Les champs d'une onde plane ne **dépendent** que du temps et d'une **unique variable d'espace** en coordonnées cartésiennes, par exemple notée  $x$ , correspondant à la coordonnée le long de la direction de propagation. L'onde plane est une onde à une dimension cartésienne. Les **surfaces d'onde** sont des **plans d'équations** ' $x = cte$ '.

Une onde électromagnétique plane est donc telle que  $\vec{E}(x, t)$  et  $\vec{B}(x, t)$ .

Chaque composante de l'un des champs vérifie l'équation :  $\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$

Puisque  $f$  ne dépend ni de  $y$  ni de  $z$ , on peut écrire :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Espace 4}$$

On retrouve l'équation de d'Alembert de la propagation d'une onde sur une corde (MK 7).

## c) Forme générale des solutions

**Rappel** : Une onde plane est dite **progressive (OPP)** si elle se propage dans un sens bien déterminé, sans étalement ni déformation.

La **solution générale** de l'équation  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$  (toute onde plane) s'écrit : Espace 5

$$f(x, t) = f_+ \left( t - \frac{x}{c} \right) + f_- \left( t + \frac{x}{c} \right) = g_+(x - ct) + g_-(x + ct)$$

Il s'agit de la superposition d'une onde plane progressive  $f_+ \left( t - \frac{x}{c} \right) = g_+(x - ct)$  se dirigeant suivant les  $x$  croissants ( $+\vec{u}_x$ ) à la célérité  $c$  et d'une onde plane progressive  $f_- \left( t + \frac{x}{c} \right) = g_-(x + ct)$  se dirigeant suivant les  $x$  décroissants ( $-\vec{u}_x$ ) à la célérité  $c$ , qui correspond à la **vitesse de propagation de l'onde dans le vide** ( $c \approx 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

### ■ Limites du modèle

- Une onde plane a une extension infinie, donc implique la présence d'énergie à l'infini, ce qui n'est pas raisonnable.
- Une onde plane a une amplitude constante, alors que l'amplitude de l'onde sphérique émise par un émetteur est une fonction décroissante de  $r$  (distance à l'émetteur).

## 2) Structure des ondes planes progressives (OPP) électromagnétiques

On se place par la suite dans le cadre des **ondes planes progressives dans le sens des  $x$  croissants**, solutions **non statiques** de l'équation de propagation ; alors :

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E} \left( t - \frac{x}{c} \right) \quad \text{et} \quad \vec{B}(x, t) = \vec{B} \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

Les solutions  $\vec{E} \left( t - \frac{x}{c} \right)$  et  $\vec{B} \left( t - \frac{x}{c} \right)$  acceptables vérifient nécessairement les équations de Maxwell.

$$\text{(MG) dans le vide : } \text{div}(\vec{E}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \left| \Rightarrow \text{div}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \right.$$

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \left| \Rightarrow E_x \text{ indépendante de } x. \right.$$

Une composante du champ d'une onde ne pouvant être constante, il faut donc  $E_x = 0$ .

De même pour le champ magnétique :  $(\mathbf{M}\Phi)$  dans le vide :  $\text{div}(\vec{B}) = 0 \Rightarrow B_x = 0$ .

Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  d'une **OPP électromagnétique dans le vide** sont **perpendiculaires à la direction de propagation**.

On dit qu'ils sont **transversaux** et que l'onde est **transverse ou transversale**.

$$\text{(MF)} : \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (3)$$

**Equation (1)** :  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  ne dépendant que de la variable  $x$ , les différentes dérivées partielles  $\frac{\partial}{\partial y}$  et  $\frac{\partial}{\partial z}$  sont nulles : **Espace 7**

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = 0 = \frac{\partial E_y}{\partial z}. \text{ De plus, le champ } \vec{B} \text{ étant transverse, } B_x = 0. \quad (1) \Leftrightarrow 0 = 0$$

**Equation (2)** : le champ  $\vec{E}$  étant transverse,  $E_x = 0$  soit (2) :  $0 - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} \left(t - \frac{x}{c}\right) = \frac{\partial B_y}{\partial t} \left(t - \frac{x}{c}\right)$$

En introduisant la variable  $u = t - \frac{x}{c}$ ,  $\frac{\partial E_z}{\partial x} \left(t - \frac{x}{c}\right) = \frac{\partial E_z(u)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dE_z}{du} = -\frac{1}{c} \frac{dE_z}{du}$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} \left(t - \frac{x}{c}\right) = \frac{\partial B_y(u)}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dB_y}{du} = \frac{dB_y}{du}$$

$$\text{Soit dans (2)} : -\frac{1}{c} \frac{dE_z}{du} = \frac{dB_y}{du}$$

En intégrant par rapport à la variable  $u$  et en choisissant des constantes d'intégration nulles, qui sans cela donneraient des champs ne correspondant pas à des ondes, on obtient :

$$-\frac{1}{c} E_z = B_y + K \text{ soit } E_z = -cB_y \quad \text{Espace 8}$$

De même, avec l'équation (3), on obtient  $\frac{\partial E_y}{\partial x} \left(t - \frac{x}{c}\right) = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \left(t - \frac{x}{c}\right)$  et on introduit la variable  $u = t - \frac{x}{c}$

$$\text{D'où } \frac{1}{c} \frac{dE_y}{du} = \frac{dB_z}{du} \text{ soit } E_y = +cB_z$$

$$\text{Finalement } \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \left(t - \frac{x}{c}\right) \\ E_z \left(t - \frac{x}{c}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{c} E_z \left(t - \frac{x}{c}\right) \\ \frac{1}{c} E_y \left(t - \frac{x}{c}\right) \end{pmatrix}$$

$$\text{On a donc } \vec{E} \cdot \vec{B} = 0 - \frac{1}{c} E_y \left(t - \frac{x}{c}\right) E_z \left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{1}{c} E_y \left(t - \frac{x}{c}\right) E_z \left(t - \frac{x}{c}\right) = 0$$

Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont **orthogonaux** entre eux, en tout point et à tout instant.

$$\text{D'autre part, } \|\vec{E}\|^2 = E_y^2 + E_z^2 \quad \text{et} \quad \|\vec{B}\|^2 = \frac{1}{c^2} E_z^2 + \frac{1}{c^2} E_y^2$$

$$\|\vec{E}\| = c \|\vec{B}\|$$

$(\vec{E}, \vec{B}, \vec{e}_x)$  est un trièdre rectangle, on peut vérifier qu'il est direct :

$$\vec{E} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ E_y \wedge B_y & +cB_z \wedge B_y \\ E_z \wedge B_z & -cB_y \wedge B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = c(B_y^2 + B_z^2) \vec{e}_x = cB^2 \vec{e}_x$$

Le trièdre  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{e}_x)$  est donc **direct**, avec  $\|\vec{E}\| = c \|\vec{B}\|$

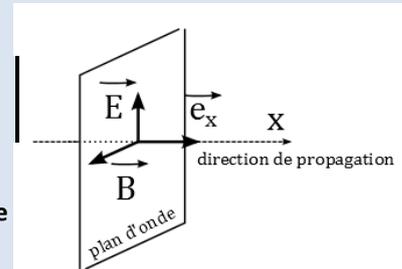
### ■ Relation de structure de l'onde plane progressive électromagnétique (OemPP) dans le vide

Pour une onde plane de direction de propagation  $x'$ , de vecteur unitaire  $\vec{e}_x = \vec{e}_{propag}$ , la **relation de structure** liant les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  est :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{e}_{propag} \wedge \vec{E}}{c}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{E} = \vec{B} \wedge c \vec{e}_{propag}}$$

Cette relation implique que

- Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont **transversaux (orthogonaux à la direction de propagation)**, l'onde électromagnétique est transversale.
- Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont **orthogonaux entre eux**.
- Le trièdre  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{e}_{propag})$  est **direct**.
- $\|\vec{E}\| = c \|\vec{B}\|$



### ■ Remarques

- Cette démonstration longue et technique se fait de manière simple à l'aide de l'outil complexe (cf. suite).
- Cette relation met en évidence le couplage entre les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  qui ne peuvent se propager l'un sans l'autre : il n'existe pas d'onde « électrique » ni d'onde « magnétique », mais seulement des ondes électromagnétiques.
- Ces propriétés sont vérifiées par toute OemPP, mais faux pour les sommes d'OemPP se propageant en sens différents, et en particulier pour les ondes stationnaires.

## C) Onde électromagnétique plane progressive harmonique

### 1) Présentation et caractéristiques des ondes électromagnétiques planes progressives et harmoniques (OemPPH)

#### a) Définition d'une OemPPH

Nous avons jusque-là proposé une **solution générale** de l'équation  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$  comme une superposition d'ondes progressives de forme quelconque :

$$f(x, t) = f_+ \left( t - \frac{x}{c} \right) + f_- \left( t + \frac{x}{c} \right) = g_+(x - ct) + g_-(x + ct)$$

avec des fonctions  $f_i$  et  $g_i$  quelconques.

### ■ Onde électromagnétique plane progressive harmonique (OemPPH)

L'onde électromagnétique plane et progressive sera dite harmonique ou monochromatique (OemPPH ou OemPPM) ou sinusoïdale si les composantes des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont **sinusoïdales**, avec une double périodicité spatiale et temporelle, de **période (temporelle)  $T$**  et de **longueur d'onde (période spatiale)  $\lambda$** , de la forme :

$$f(x, t) = f_m \cos(\omega t \pm kx + \varphi)$$

$(f(x, t) = f_m \cos(\omega t - kx + \varphi))$  pour une onde se propageant suivant  $+\vec{e}_x$  et  $f(x, t) = f_m \cos(\omega t + kx + \varphi)$  pour une onde se propageant suivant  $-\vec{e}_x$ .

avec  $\omega$  **pulsation temporelle** telle que :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$k$  **pulsation spatiale** (ou module d'onde, ou parfois par abus de langage vecteur d'onde) telle que :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

**Vitesse de phase** : vitesse de déplacement de tous les lieux équi-phase, soit tous les lieux ayant la même phase globale  $\psi = \omega t \pm kx + \varphi$  (par exemple, point pour une corde, plan pour une OemPP) :  $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$

**Application 2 : relation de dispersion**

Considérons une OPPH de la forme  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y$ . Etablir à partir de l'équation de d'Alembert la relation entre  $\omega$  et  $k$ , dite relation de dispersion.

calcul des dérivées partielles par rapport au temps et à  $x$ , qu'il faut injecter dans l'équation de d'Alembert  $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

ilci,  $\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$  avec  $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y$  et  $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y$

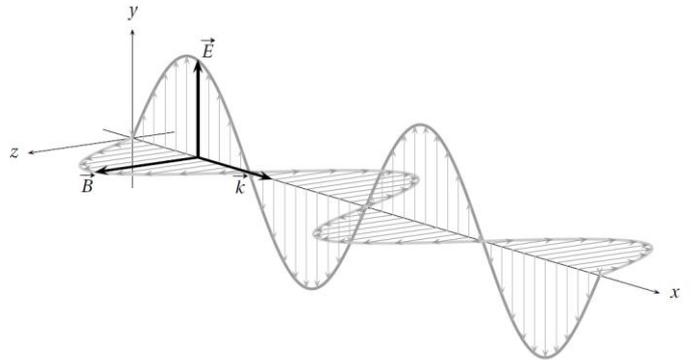
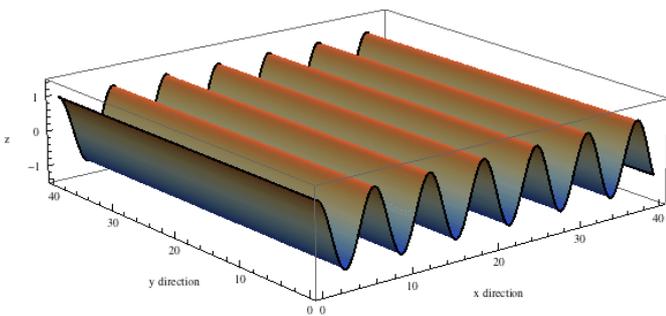
En simplifiant, on trouve  $-k^2 + \frac{1}{c^2} \omega^2 = 0$  soit  $k = \frac{\omega}{c}$

**Relation de dispersion** (conséquence de l'équation de propagation de D'Alembert)

$$\omega = kc \quad \text{soit} \quad \lambda = cT \quad v_\varphi = c$$

(relation vérifiée pour toutes les ondes planes harmoniques, qu'elles soient progressives (OPPH) ou stationnaires).

**Remarque 2** : La vitesse de phase étant toujours égale à la célérité de la lumière, et donc indépendante de la pulsation  $\omega$ , la propagation d'une OemPPH dans le vide est un phénomène non dispersif.



Période temporelle

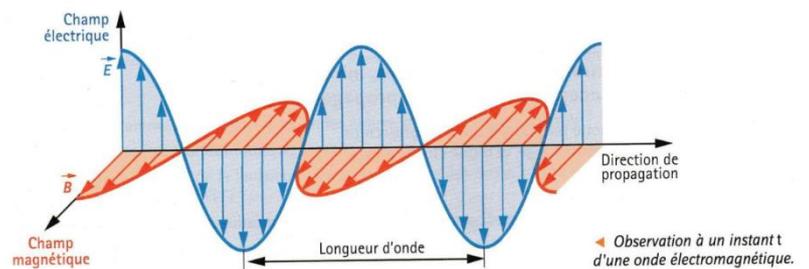
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Période spatiale ou longueur d'onde dans le vide

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Relation entre  $k$  et  $\omega$  (relation de dispersion)

$$\omega = kc$$



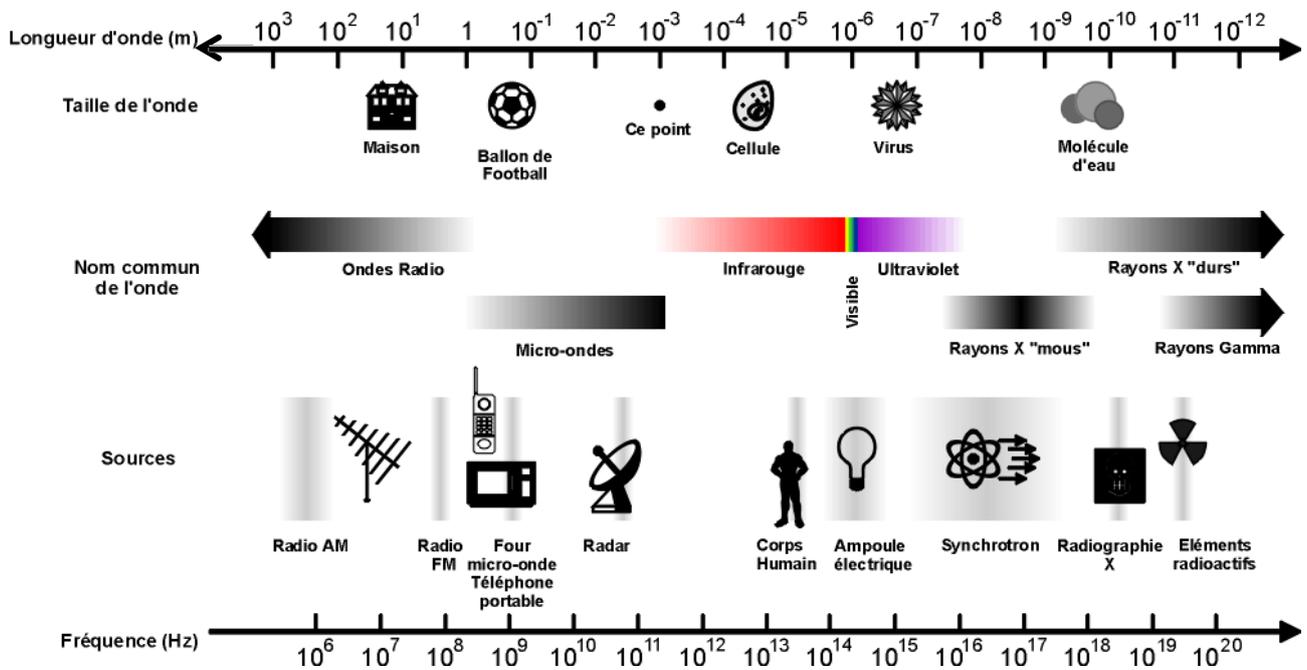
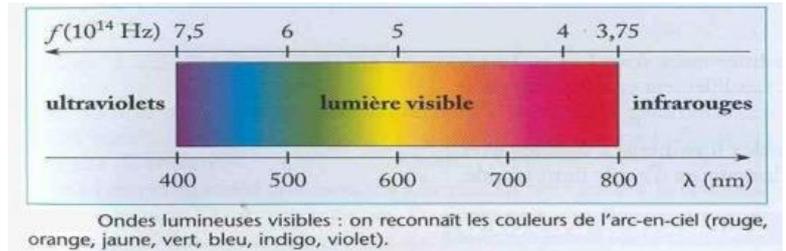
**Résumé des différentes relations liant les fréquences, périodes, pulsations**

Espace 10

			$\omega$	$T$	$\nu$	$k$	$\lambda$	$\sigma$
			pulsation	période (temporelle)	fréquence	vecteur d'onde	longueur d'onde	nombre d'onde
			rad. s <sup>-1</sup>	s	Hz	rad. m <sup>-1</sup>	m	m <sup>-1</sup>
$\omega$	pulsation	rad. s <sup>-1</sup>	=	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\omega = 2\pi\nu$	$\omega = kc$	$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$	$\omega = 2\pi c\sigma$
$T$	période (temporelle)	s	$T = \frac{2\pi}{\omega}$	=	$T = \frac{1}{\nu}$	$T = \frac{2\pi}{kc}$	$T = \frac{\lambda}{c}$	$T = \frac{1}{c\sigma}$

$\nu$	fréquence	Hz	$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$	$\nu = \frac{1}{T}$	=	$\nu = \frac{kc}{2\pi}$	$\nu = \frac{c}{\lambda}$	$\nu = c\sigma$
$k$	vecteur d'onde	rad.m <sup>-1</sup>	$k = \frac{\omega}{c}$	$k = \frac{2\pi}{cT}$	$k = \frac{2\pi\nu}{c}$	=	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$	$k = 2\pi\sigma$
$\lambda$	longueur d'onde	m	$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$	$\lambda = cT$	$\lambda = \frac{c}{\nu}$	$\lambda = \frac{2\pi}{k}$	=	$\lambda = \frac{1}{\sigma}$
$\sigma$	nombre d'onde	m <sup>-1</sup>	$\sigma = \frac{\omega}{2\pi c}$	$\sigma = \frac{1}{cT}$	$\sigma = \frac{\nu}{c}$	$\sigma = \frac{k}{2\pi}$	$\sigma = \frac{1}{\lambda}$	=

Le domaine accessible aux ondes électromagnétiques est très vaste ; il va des ondes radiofréquences aux rayonnements gamma en passant par la fenêtre très restreinte du domaine visible.



## b) Intérêt de l'onde harmonique

Une OPPH ne peut pas rigoureusement représenter une « vraie » onde : elle n'a ni début ni fin, et existe pendant un temps infiniment long. Cependant, grâce à l'analyse de Fourier, **cette** onde plane solution sinusoidale **est une solution particulière de l'équation de propagation** de l'équation de d'Alembert qui **joue un rôle capital** : l'équation de propagation étant **linéaire** (du fait de la **linéarité des équations de Maxwell**), il est possible d'étudier tout signal périodique par le biais d'une **décomposition en série de Fourier**, le **signal périodique étant** décomposé en une somme de fonctions sinusoidales dites monochromatiques ou harmoniques.

Un signal  $s(t)$  périodique de fréquence  $f_1$  peut être écrit sous la forme :

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos(n2\pi f_1 t + \varphi_n)$$

La linéarité des équations de Maxwell permet de déterminer la structure et les propriétés de toute onde électromagnétique à partir de ses composantes monochromatiques.

### c) Vecteur d'onde

#### ■ Vecteur d'onde $\vec{k}$

On définit le **vecteur d'onde**  $\vec{k}$ ,<sup>3</sup> dirigé suivant la direction de propagation  $\vec{u}_{propag} = \vec{u}_k = \vec{e}_p$  ( $\vec{u}_k = \vec{e}_x$  dans notre exemple) :

$$\vec{k} = k \vec{u}_{propag} = k \vec{u}_k \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Soit, avec  $\vec{r} = \vec{OM}$

$$f(M, t) = f_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

Les **plans d'onde** sont **perpendiculaires** au vecteur d'onde  $\vec{k}$ , d'équations  $\vec{k} \cdot \vec{r} = cte'$

**Attention !** La direction de propagation est définie pour toute OPP, mais la longueur d'onde donc le vecteur d'onde n'ont de sens que pour les OPPH.

#### ■ Relation de structure, pour une OemPPH

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

## 2) Utilisation de la représentation complexe pour une OemPPH

### a) Présentation de la notation

On associe à toute composante monochromatique  $f(M, t) = f_m \cos(\omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$  du champ ou du potentiel électromagnétique une écriture complexe  $\underline{f}(M, t)$  et une amplitude complexe  $\underline{f}_m$  :

$$\underline{f}(M, t) = f_m \exp(i(\omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)) = \underline{f}_m \exp(i(\omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r}))$$

de sorte que :

$$\underline{f}_m = f_m \exp(i\varphi) \quad f(\vec{r}, t) = \text{Re}(\underline{f}(\vec{r}, t))$$

#### ■ Propriétés usuelles associées à la notation complexe $\underline{f}(M, t) = \underline{f}_m \exp(i(\omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi))$

- la dérivation par rapport à  $t$  est une multiplication par  $i\omega$   $\frac{\partial}{\partial t} = (\times i\omega)$
- la dérivation par rapport à  $x$  est une multiplication par  $-ik_x$   $\frac{\partial}{\partial x} = (\times (-ik_x))$
- **En généralisant, en coordonnées cartésiennes,**  $\overrightarrow{\text{grad}} = \vec{\nabla} = -i\vec{k}$
- Pour tout champ vectoriel, les opérateurs différentiels peuvent s'écrire simplement :

$$\text{div}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -i\vec{k} \cdot \vec{E}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -i\vec{k} \wedge \vec{E}$$

$$\Delta \vec{E} = \vec{\nabla} (\text{div}(\vec{E})) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -k^2 \vec{E}$$

Exemple :  $\text{div}(\vec{E}) = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)_{z,x} + \left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)_{x,y} = -ik_x E_x - ik_y E_y - ik_z E_z = -i\vec{k} \cdot \vec{E}$

**Attention !** Deux conventions différentes sont possibles pour l'écriture complexe du champ :

$$f(M, t) = f_m \cos(\omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \quad \text{ou} \quad f(M, t) = f_m \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t + \varphi)$$

<sup>3</sup> On peut associer une onde électromagnétique à des particules appelées photons, possédant une énergie  $E = h\nu$  (relation de Planck Einstein) et une quantité de mouvement  $\vec{p} = h\vec{k}$  (relation de De Broglie), où  $h$  est la constante de Planck.  $\vec{k}$  indique alors la direction et le sens de la trajectoire de ces photons.

Choisir l'une ou l'autre convention ne change pas les résultats physiques mais change les calculs !

Avec  $f(M, t) = f_m \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t + \varphi)$ , on a en effet alors :

■ Propriétés usuelles associées à la notation complexe  $f(M, t) = f_m \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t + \varphi)$

- la dérivation par rapport à  $t$  est une multiplication par  $-i\omega$   $\frac{\partial}{\partial t} = (\times -i\omega)$
- la dérivation par rapport à  $x$  est une multiplication par  $ik_x$   $\frac{\partial}{\partial x} = (\times ik_x)$
- En généralisant, en coordonnées cartésiennes,  $\overrightarrow{\text{grad}} = \vec{\nabla} = i\vec{k}$
- Pour tout champ vectoriel, les opérateurs différentiels peuvent s'écrire simplement :

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{E}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = i\vec{k} \cdot \vec{E} \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = i\vec{k} \wedge \vec{E} \\ \overrightarrow{\Delta} \vec{E} &= \vec{\nabla} (\text{div}(\vec{E})) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -k^2 \vec{E} \end{aligned}$$



Il faut **impérativement** conserver la même convention tout au long du calcul.

Appli 4 : OemPPH et notation complexe

$$\vec{E} = \begin{cases} E_{0x} \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi_x) \\ E_{0y} \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi_y) \\ E_{0z} \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi_z) \end{cases} \quad \vec{E} = \vec{E}_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM}) \quad \text{où } \vec{E}_0 = \begin{cases} E_{0x} \exp i \varphi_x \\ E_{0y} \exp i \varphi_y \\ E_{0z} \exp i \varphi_z \end{cases}$$

Obtention de la relation de dispersion :

$$\vec{E} = E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$\text{Dérivées spatiales : } \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = -ik \vec{E} = -ik E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 \vec{E} = -k^2 E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$\text{Dérivées temporelles : } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E} = i\omega E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E} = -\omega^2 E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$\text{En injectant ces relations dans l'équation de propagation de d'Alembert : } \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On trouve

$$-k^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \times (-\omega^2 \vec{E})$$

Soit  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ , les grandeurs physiques étant définies positives, on retrouve bien la relation de dispersion :

$$\omega = kc \quad \text{soit} \quad \lambda = cT$$

**b) Equations de Maxwell dans le vide en notation complexe, relation de structure**

Quelle que soit la notation complexe retenue, on obtient les équations de Maxwell suivantes pour une propagation dans le vide d'ondes électromagnétiques.

■ Equations de Maxwell dans le vide en notation complexe

Maxwell-Gauss :  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$

Maxwell-Faraday :  $\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$

Maxwell-Flux :  $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$

Maxwell-Ampère :  $\vec{k} \wedge \vec{B} = -\omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}$

**Remarque :** les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Flux en complexe permettent de retrouver très facilement que l'onde électromagnétique est transverse (les deux champs sont orthogonaux à la direction de propagation qui est aussi celle du vecteur d'onde).

### c) Obtention de la relation de structure à partir des champs complexes

Equation de Maxwell-Faraday :  $\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$  soit  $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

$\vec{k}$  et  $\omega$  étant des constantes réelles, cette relation reste vraie pour les champs réels (linéarité de la partie réelle) :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

De plus, avec  $\vec{k} = k\vec{u}_k$  et  $\omega = kc$  :  $\vec{B} = \frac{k\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{kc}$

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c}$$

Cette relation étant vraie pour toute OPPH, elle est également vraie pour toute OPP en tant que somme d'OPPH se propageant dans le même sens, donc de même vecteur  $\vec{u}_k$ .

De la même manière, équation de Maxwell-Ampère :  $\vec{k} \wedge \vec{B} = -\omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}$  donne pour les champs réels :

$$\vec{E} = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{c^2}{kc} \vec{k} \wedge \vec{B} = -c\vec{u}_k \wedge \vec{B}$$

$$\vec{E} = -c\vec{u}_k \wedge \vec{B} = \vec{B} \wedge c\vec{u}_k$$

On retrouve bien :

**Relation de structure d'une OPP :**

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} \quad \vec{E} = -c\vec{u}_k \wedge \vec{B} = \vec{B} \wedge c\vec{u}_k$$

- Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont **transversaux (orthogonaux à la direction de propagation)**, l'onde électromagnétique est **transversale**.
- Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont **orthogonaux entre eux**.
- Le trièdre  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{e}_{propag})$  est **direct**.
- $\|\vec{E}\| = c \|\vec{B}\|$

## D) Polarisation rectiligne des ondes OemPPH

### 1) Représentation vectorielle d'une OemPPH

Soit une OemPPH électromagnétique, de pulsation  $\omega$ , se propageant dans le vide dans la direction  $\vec{u}_k$ , de vecteur d'onde

$$\vec{k} = k\vec{u}_k = \frac{\omega}{c} \vec{u}_k$$

Le champ électrique et le champ magnétique, transverses, sont deux vecteurs perpendiculaires du plan perpendiculaire à  $\vec{u}_k$  tels que  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{u}_k)$  est direct.

La donnée du **champ électrique  $\vec{E}$  suffit** à décrire l'état de l'onde ; grâce à la relation de structure, on en déduit :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

En revanche, cette relation de structure laisse indéterminée la direction du champ électrique  $\vec{E}$  dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation  $\vec{u}_k$ .

#### ■ Direction de polarisation d'une OemPPH

Par définition, la **direction de polarisation** de l'onde est **celle du champ électrique**, dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation  $\vec{u}_k$ .

**Attention !** Ne pas confondre direction de polarisation et direction de propagation, les deux sont orthogonales.

Elle est reliée aux propriétés quantiques (spins) de photon. Nous nous limiterons par la suite aux cas les plus élémentaires, sans rechercher de lien avec ces propriétés quantiques.

La polarisation de la lumière a de nombreuses applications, du cinéma 3D aux écrans à cristaux liquides (LCD) en passant par la couleur de certains minéraux (olivine), les lunettes pour les marins ou la modulation de l'énergie d'un faisceau de lumière laser femtoseconde infrarouge. L'œil humain est incapable de percevoir la polarisation de la lumière, mais de nombreux animaux - insectes, crustacés, oiseaux, reptiles, etc. – la perçoivent ; c'est une propriété qui ne varie pas avec la luminosité et qui est donc utile à ces animaux pour se repérer et s'orienter<sup>4</sup>.

## 2) Polarisation d'une OemPPH

### a) Exemple : polarisation rectiligne

Une onde OEM est dite polarisée si le **vecteur champ électrique de l'onde garde au cours du temps une direction constante**.

Nous pouvons choisir la direction de l'OEM polarisée colinéaire à l'axe  $Oy$ , l'expression de ce champ est alors de la forme :

$$\vec{E} = E_y \vec{e}_y$$

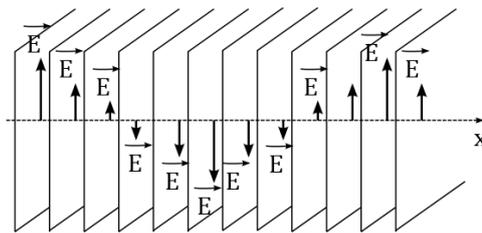
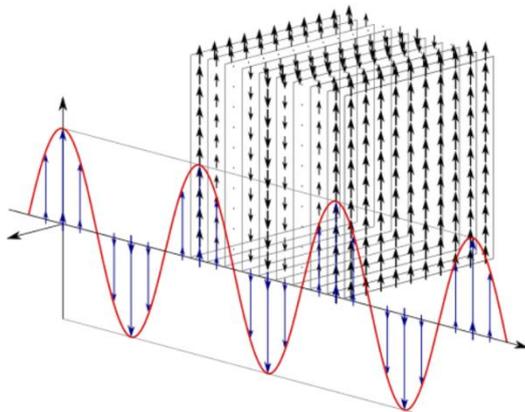
avec

$$E_y = \text{Re}(\underline{E}_{Oy} e^{j(\omega t - kx)}) = E_{Oy} \cos(\omega t - kx + \varphi_y)$$

Un observateur « voit » simplement l'extrémité du champ électrique osciller le long de l'axe  $Oy$ .

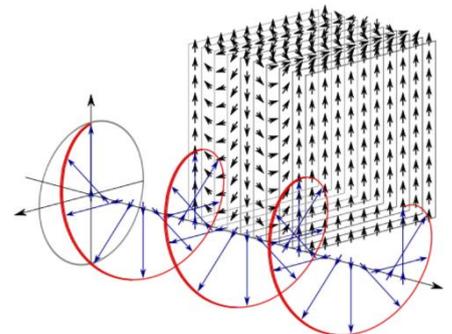
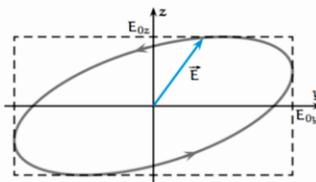
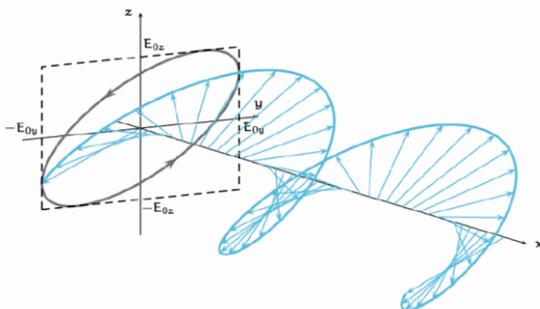
On dit alors que l'onde considérée possède une **polarisation rectiligne**.

**Plan de polarisation** de l'onde lumineuse : plan formé par le vecteur d'onde  $\vec{k}$  et le champ électrique  $\vec{E}$ .



**Représentation d'une onde polarisée rectilignement** ; les flèches représentent le champ électrique  $\vec{E}$ . La direction de  $\vec{E}$  est constante, et la direction et l'amplitude de  $\vec{E}$  sont constants dans tout plan perpendiculaire à la direction de propagation

**Remarque :** Plus généralement, si le champ électrique évolue dans le plan  $Oyz$  avec un déphasage  $\varphi = \varphi_z - \varphi_y$  donné entre ses deux composantes, son extrémité décrira aussi une trajectoire très simple dans le plan



**Polarisation elliptique**

**Polarisation circulaire**

<sup>4</sup> Dans la nature, la surface de l'eau est l'une des principales sources de lumière polarisée. Or des surfaces artificielles, comme les carrosseries métalliques des voitures, les routes asphaltées, les façades d'immeubles en verre, les panneaux photovoltaïques ou les films de plastique utilisés pour les serres agricoles, polarisent fortement la lumière et sont donc confondues avec des surfaces aquatiques (Pour la Science). Cela constitue un piège écologique pour ces animaux.

d'observation : une ellipse. Nous parlerons alors de polarisation elliptique. Dans le cas particulier où les deux composantes du champ ont même amplitude, la polarisation est dite circulaire.

☞ Animation Java : Différents états de polarisation (polarisation rectiligne, circulaire, elliptique) ; en rouge  $\vec{E}$  et en bleu  $\vec{B}$ ) : <http://www.f-legrand.fr/scidoc/simul/electmag/ondeEM.html>

On peut visualiser facilement le champ électromagnétique en un point en choisissant  $N = 2$ .

Polarisation rectiligne : choisir  $E_y/E_x$  quelconque et un déphasage nul.

Polarisation circulaire : choisir  $E_y/E_x = 1$  et un déphasage de  $90^\circ$ .

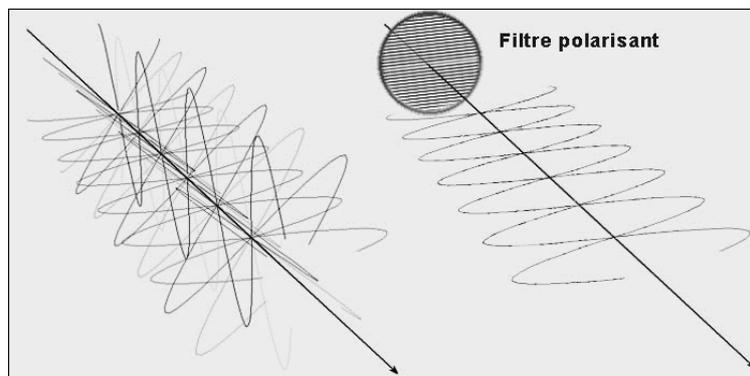
Polarisation elliptique : choisir par exemple  $E_y/E_x = 1$  et un déphasage quelconque.

## b) Cas de la lumière naturelle

Pour la plupart des sources lumineuses classiques (source thermique, lampe spectrale, diode électroluminescente, etc.), la lumière émise correspond à une superposition d'OemPPH dont les champs électriques, transverses, sont déphasés de manière aléatoire : ces ondes superposées sont dites incohérentes. L'extrémité du champ électrique résultant décrit dans le plan d'observation (perpendiculaire à la direction de propagation) une trajectoire aléatoire, impossible à caractériser simplement : nous dirons alors que **l'onde n'est pas polarisée**.

### ■ Onde Oem non polarisée

si la direction de polarisation fluctue rapidement et aléatoirement.



On représente le champ électrique. A gauche : lumière naturelle, non polarisée, à droite : lumière polarisée, direction unique du champ électrique.

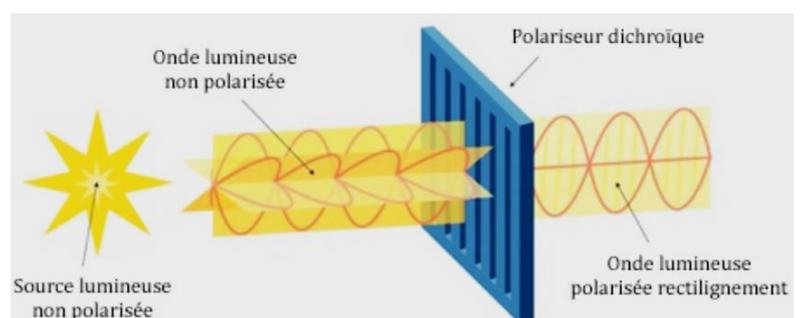
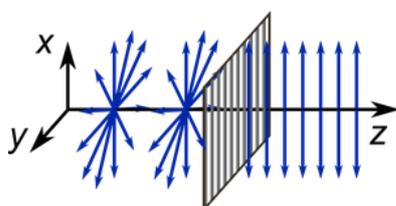
## 3) Obtention de lumière polarisée rectilignement

### a) Polariseur

**Polariseur** : système optique (qu'on considérera plan) possédant deux directions privilégiées. L'une d'entre elles, appelée **axe de transmission**, est telle que le polariseur transmet la composante du champ électrique incidente parallèle à l'axe de transmission et arrête la composante perpendiculaire.

**La lumière sortant d'un polariseur est polarisée rectilignement, parallèlement à la direction de l'axe de transmission, quelle que soit la nature de la lumière incidente.**

En outre, si la lumière incidente est polarisée rectilignement selon la direction perpendiculaire à l'axe de transmission, alors aucune lumière ne sort du polariseur.



■ Exemples d'application :

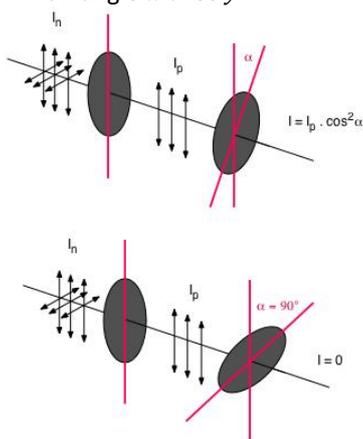
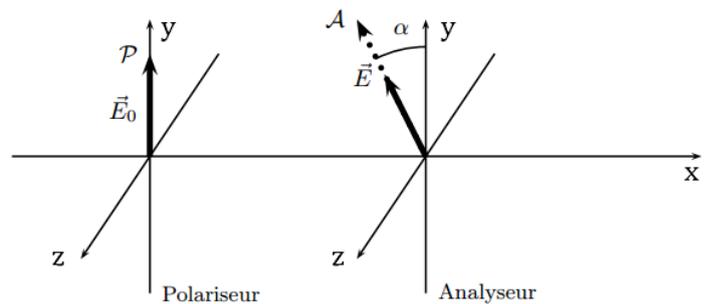
- Lunettes 3D : Pour voir en relief, il faut que les deux yeux reçoivent des images différentes. Deux images différentes sont projetées à l'écran, avec des directions de polarisation perpendiculaires. Devant les yeux, des lunettes avec deux verres polarisés à 90°.
- La lumière qui se réfléchit (eau, neige, vitre..) est polarisée rectilignement, parallèlement à la surface. Application aux verres polarisés pour éviter l'éblouissement par les reflets sur la neige (lunettes de glacier) ou sur l'eau (lunettes de lagon).
- La lumière diffusée (comme le bleu du ciel) est polarisée. On peut utiliser des filtres polarisants pour obtenir des paysages lumineux sur fond de ciel bleu-profond dont on supprime la composante polarisée.
- La lumière émise par un écran d'ordinateur (écran à cristaux liquides) est polarisée.

<http://www.e-scio.net/ondes/polarisation.php3>

**b) Analyseur**

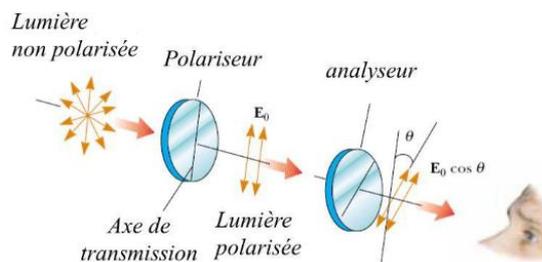
Soit une onde traversant un polariseur dont l'axe de transmission est y.

On place un second polariseur derrière, généralement appelé **analyseur**, dont la direction de polarisation fait un angle  $\alpha$  avec y.



L'amplitude du champ

électrique après l'ensemble analyseur polariseur varie selon  $\cos(\alpha)$  et l'énergie transportée par l'onde varie selon  $\cos^2(\alpha)$ .



**Loi de Malus :** En sortie de l'analyseur, intensité  $I = I_0 \cos^2 \theta$

**Animation loi de Malus** (sous Mozilla Firefox) avec polariseur et analyseur : [http://ressources.univ-](http://ressources.univ-lemans.fr/AccessLibre/UM/Pedago/physique/02/optiphy/malus.html)

[lemans.fr/AccessLibre/UM/Pedago/physique/02/optiphy/malus.html](http://ressources.univ-lemans.fr/AccessLibre/UM/Pedago/physique/02/optiphy/malus.html)

### III) ENERGIE DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

#### A) Energie électromagnétique

Un rayonnement électromagnétique (la « lumière » provenant du soleil, un faisceau LASER, etc.) transporte de l'énergie, localisée dans le champ électromagnétique, et non au niveau des sources de champ (charges ou courants), pour laquelle on peut définir une densité volumique d'énergie électromagnétique dont on admet l'expression à partir des cas particuliers étudiés en statique : densité volumique d'énergie électrostatique ou magnétostatique.

■ Densité volumique d'énergie électromagnétique  $u_{em}(M, t)$  associée en un point  $M$ , à une date  $t$ , au champ électromagnétique  $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$

$$u_{em}(M, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(M, t) + \frac{1}{2} \frac{B^2(M, t)}{\mu_0}$$

Lien avec l'énergie électromagnétique d'un système de volume  $(V)$  :

$$U_{em}(M, t) = \iiint_{(V)} u_{em}(M, t) d\tau$$

Puissance électromagnétique rayonnée par ce système :

$$\mathcal{P}_{em} = \frac{\partial U_{em}}{\partial t}$$

## B) Vecteur de Poynting

### 1) Définition et expression générale

On définit un **vecteur « densité de flux d'énergie électromagnétique »**, appelé **vecteur de Poynting**, souvent noté  $\vec{\Pi}$ , qui joue un rôle analogue aux vecteurs  $\vec{j}_m, \vec{j}_Q, \vec{j}$  rencontrés précédemment.

#### ■ Définition du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$

$$\mathcal{P}_{em} = \frac{\partial U_{em}}{\partial t} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi} \cdot \vec{dS}$$

Il s'agit du **vecteur « densité de flux de puissance électromagnétique »** : le **flux** du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  à travers une surface ( $\Sigma$ ) quelconque représente la **puissance rayonnée algébriquement** à travers la surface ( $\Sigma$ ) dans le **sens de  $\vec{dS}$** .

Unité :  $\vec{\Pi}$  en  $W \cdot m^{-2}$

**Remarque :** Dans le cas d'une **surface fermée**,  $\vec{dS}$  étant orientée par le vecteur normale vers l'extérieur, il s'agit du **flux sortant algébriquement de la surface fermée**.

#### ■ Expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$

On démontre que le vecteur de Poynting s'écrit, avec  $\vec{E}$  champ électrique,  $\vec{B}$  champ magnétique et  $\mu_0$  perméabilité magnétique du vide :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Le vecteur de Poynting donne la **direction de propagation de l'énergie électromagnétique**, qui coïncide avec la **direction de propagation de l'onde électromagnétique** si elle est progressive.

#### ■ Analogies

	MFL 2	THM 8	EM 2	EM 5
Vecteur	$\vec{j}_m$	$\vec{j}_{th}$	$\vec{j}$	$\vec{\Pi}$
	densité de flux de masse	densité de flux thermique	densité de courant	vecteur de Poynting
Flux à travers $S$	$D_m = \iint_S \vec{j}_m \cdot \vec{dS}$	$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{j}_{th} \cdot \vec{dS}$	$i = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{dS}$	$\mathcal{P}_{em,s} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi} \cdot \vec{dS}_{ext}$
Unité	$kg \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}$	$W \cdot m^{-2}$	$A \cdot m^{-2}$	$W \cdot m^{-2}$
Expression dans les cas usuels	$\vec{j}_m = \rho \vec{v}$	$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$	$\vec{j}_{th} = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}} V$	$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

## C) Bilan énergétique global pour un volume fixe

On a vu (**EM 2**) que le champ électrique fournit de l'énergie aux électrons libres, énergie dissipée ensuite sous forme de chaleur lors des chocs entre les électrons libres et le matériau : c'est l'effet Joule.

On s'intéresse ici à une propagation **dans le vide sans charge ni courant**, donc il n'y a **pas d'énergie dissipée par effet Joule**, et nous allons traduire par une équation locale la conservation de l'énergie.

Espace 11

Soit une surface fermée ( $\Sigma$ ) délimitant un volume  $\mathcal{V}$  quelconque placé dans le champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ .

## ■ Bilan d'énergie

L'énergie électromagnétique  $U_{em}(t)$  comprise dans  $\mathcal{V}$  varie au cours du temps entre  $t$  et  $t + dt$  :

$$dU_{em}(t) = U_{em}(t + dt) - U_{em}(t) \quad \text{Espace 12}$$

Dans le vide, cette variation a lieu exclusivement par le biais de transferts d'énergie (absence de terme de création) : entrées d'énergie électromagnétique dans  $\mathcal{V}$  ou sorties d'énergie électromagnétique hors de  $\mathcal{V}$  à travers la surface  $(\Sigma)$ .

En introduisant la puissance électromagnétique algébrique  $\mathcal{P}_{em,ent}$  **entrant** dans  $\mathcal{V}$ , la variation de l'énergie électromagnétique comprise dans  $\mathcal{V}$  entre  $t$  et  $t + dt$  s'écrit :

$$dU_{em}(t) = \mathcal{P}_{em,ent} dt \quad \text{Espace 13}$$

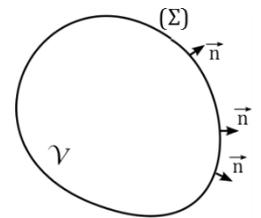
Si  $\mathcal{P}_{em,ent} > 0$ , on a bien  $U_{em}(t)$  qui augmente

Expression de la variation de l'énergie  $U_{em}(t)$  au cours du temps, le volume étant fixe :

$$\frac{dU_{em}}{dt} = \mathcal{P}_{em,ent} \quad (1)$$



La puissance **entrant** dans  $\mathcal{V}$ , c'est-à-dire traversant la surface  $(\Sigma)$  **vers l'intérieur** est égale à l'opposé du flux de  $\vec{\Pi}$  à travers  $(\Sigma)$  orientée **vers l'extérieur**, selon la convention usuelle pour une surface fermée.



On peut donc écrire

$$\frac{dU_{em}}{dt} = \mathcal{P}_{em,ent} = -\mathcal{P}_{em,s} = -\oiint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_{ext} \quad (2)$$

On identifie (1) et (2)

## ■ Équation intégrale de conservation de l'énergie électromagnétique, pour un volume $\mathcal{V}$ délimité par une surface $(\Sigma)$

$$\frac{dU_{em}}{dt} = -\oiint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_{ext}$$

**Remarque :** Le signe "-" est lié à l'orientation des vecteurs  $d\vec{S}_{ext}$  vers l'extérieur.

## D) Equation locale de Poynting

### 1) Bilan énergétique local

Soit  $U_{em}(t)$  l'énergie électromagnétique contenue dans ce volume, et  $\mathbf{u}_{em}$  la **densité volumique d'énergie électromagnétique** associée :  $\mathbf{u}_{em} = \frac{dU_{em}}{d\tau}$ , soit

$$U_{em}(t) = \iiint_{\mathcal{V}} u_{em}(M, t) d\tau$$

Expression de la variation de l'énergie  $U_{em}(t)$  au cours du temps :

$$\frac{dU_{em}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \iiint_{\mathcal{V}} u_{em}(M, t) d\tau \right) = \mathcal{P}_{em,ent} = -\oiint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_{ext}$$

d'où, le volume étant fixe :

$$\frac{dU_{em}}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_{em}(M, t)}{\partial t} d\tau = \mathcal{P}_{em,ent} = -\oiint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_{ext} \quad (1)$$

On applique le théorème d'Ostrogradski au vecteur de Poynting :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{\Pi}) d\tau$$

D'où, en exploitant le bilan global d'énergie :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_{em}(M, t)}{\partial t} d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} -\text{div}(\vec{\Pi}) d\tau$$

Espace 14

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left( \text{div}(\vec{\Pi}) + \frac{\partial u_{em}(M, t)}{\partial t} \right) d\tau = 0$$

## 2) Analogies

	MFL 2	THM 8	EM 2	EM 5
Vecteur	$\vec{J}_m$	$\vec{J}_Q$	$\vec{J}$	$\vec{\Pi}$
	densité de flux de masse	densité de flux thermique	densité de courant	vecteur de Poynting
Flux à travers S	$D_m = \iint_S \vec{J}_m \cdot d\vec{S}$	$\Phi = \iint_S \vec{J}_{th} \cdot d\vec{S}$	$i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$	$\mathcal{P}_{em,s} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_{ext}$
Unité	kg. s <sup>-1</sup> . m <sup>-2</sup>	W. m <sup>-2</sup>	A. m <sup>-2</sup>	W. m <sup>-2</sup>
Équation locale de conservation de	la masse	l'énergie interne (ou de l'enthalpie)	la charge	l'énergie électromagnétique
	$\text{div}(\vec{J}_m) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$	$\text{div}(\vec{J}_{th}) + \frac{\partial(\rho c T)}{\partial t} = 0$	$\text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$	$\text{div}(\vec{\Pi}) + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = 0$
	$\rho$ masse volumique du fluide	$\rho$ masse volumique $c$ capacité thermique massique	$\rho$ densité volumique de charge	$u_{em}$ densité volumique d'énergie électromagnétique

## E) Énergie transportée par une OemPP

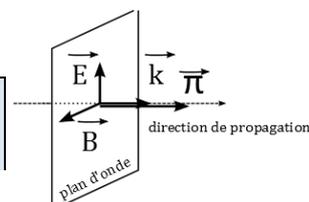
### 1) Expression du vecteur de Poynting pour des ondes planes progressives

Vecteur de Poynting associé au champ électromagnétique :  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

Relation de structure entre les champs pour une OemPP :  $\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c}$  On en déduit :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_k = \epsilon_0 c E^2 \vec{u}_k$$

Le vecteur de Poynting est colinéaire à la direction de propagation de l'onde ; il indique la direction et le sens du transport d'énergie.



### 2) Cas des OemPPH

Considérons une OemPPH, dont le champ électrique est de la forme

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

$E_0$  désignant l'amplitude du champ électrique.

D'après la relation de structure, le champ magnétique est  $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

Expression du vecteur de Poynting :  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{kE^2}{\mu_0 \omega} \vec{u}_k = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_k = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u}_k$

Le champ électrique étant variable dans le temps, il en est de même pour le vecteur de Poynting en un point donné, et on peut s'intéresser au **vecteur de Poynting moyen**, qui donne accès à la **puissance moyenne rayonnée** : Espace 17

$$\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \langle \varepsilon_0 c E^2 \rangle = \varepsilon_0 c \langle E^2 \rangle = \varepsilon_0 c E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \rangle$$

$$\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \langle \varepsilon_0 c E^2 \rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}$$

$$\langle P \rangle = \langle \Pi \rangle S$$

**à savoir retrouver**

### Application 7 : Caractéristiques ondulatoires de l'onde émise par un laser hélium-néon

Un laser hélium-néon émet un faisceau lumineux cylindrique de rayon  $r = 1,0 \text{ mm}$  d'une onde plane monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ . La puissance moyenne émise est  $P = 1,0 \text{ mW}$ .

On donne :  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Calculer les amplitudes  $E_{max}$  et  $B_{max}$  des champs électrique et magnétique.

$$P = \langle \Pi \rangle S = \langle \Pi \rangle \pi r^2 \text{ avec } \langle \Pi \rangle = \frac{E_{max}^2}{2c\mu_0} = P/\pi r^2$$

$$E_{max} = \sqrt{\frac{2c\mu_0 P}{\pi r^2}} = 4,9 \cdot 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}; B_{max} = \frac{E_{max}}{c} = \sqrt{\frac{2\mu_0 P}{c\pi r^2}} = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ T}.$$

## 4) Densité volumique d'énergie électromagnétique des OemPP

### d) Expression pour une OemPP

Densité volumique d'énergie électromagnétique associée au champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  :

$$u_{em}(M, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(M, t) + \frac{1}{2} \frac{B^2(M, t)}{\mu_0}$$

Espace 18

Pour l'OemPP, les normes des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont liés par la relation

$$E = Bc \text{ soit } \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{E^2}{c^2 \mu_0}$$

Avec  $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ , on en déduit  $\frac{1}{c^2 \mu_0} = \varepsilon_0$  soit  $\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{E^2}{c^2 \mu_0} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$  d'où

$$u_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0 B^2 c^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

### ■ Expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique pour une OemPP

$$u_{em}(M, t) = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

### c) Cas particulier des OemPPH

Si on considère de plus une OemPPH, le champ électrique est variable, de la forme

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

$E_0$  désignant l'amplitude du champ électrique.

La densité volumique d'énergie est donc variable dans le temps en un point donné, on peut calculer la **moyenne temporelle de la densité d'énergie** associée à l'onde :

$$\langle u_{em} \rangle = \langle \varepsilon_0 E^2 \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \rangle$$

D'où :

Espace 19

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{B_0^2}{2\mu_0}$$

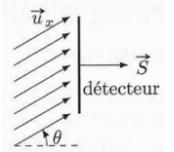
à savoir retrouver

### Application 8 : Un problème d'orientation

Aleksandre souhaite déterminer la puissance lumineuse d'un faisceau laser collimaté, se propageant dans la direction de vecteur unitaire  $\vec{u}_x$ , polarisé rectilignement dans la direction  $\vec{u}_z$  et de longueur d'onde  $\lambda = 630 \text{ nm}$ . Il dispose pour cela d'un détecteur optique dont la surface utile ( $S$ ) a une aire  $S = 2,0 \text{ mm}^2$ , qu'il place sur le trajet du faisceau laser comme indiqué sur le schéma. Ce détecteur délivre un signal électrique  $s$  proportionnel à la puissance moyenne rayonnée à travers la surface ( $S$ ) :  $s = K \langle \mathcal{P}_{ray} \rangle$ .

L'air sera assimilé à un milieu vide de charges et de courants et le faisceau laser à une onde plane. La perméabilité magnétique du vide est  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ , la célérité de la lumière dans le vide est  $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ .

- 1) Donner l'expression du champ électrique de cette OemPPH puis celle du champ magnétique associé. On notera  $E_0$  l'amplitude du champ électrique.
- 2) Déterminer les valeurs instantanées puis moyennes du vecteur de Poynting et de la densité volumique d'énergie électromagnétique.
- 3) Déterminer l'expression de  $s$  en fonction des données de l'exercice.
- 4) Comment Alex doit-il orienter son détecteur pour optimiser la mesure ?
- 5) Le coefficient  $K$  est  $K = 1,0 \cdot 10^3 \text{ V.W}^{-1}$  et la valeur maximale de la tension mesurée est  $s = 2,0 \text{ V}$ . En déduire la puissance moyenne du laser puis l'amplitude du champ électrique correspondant.



1) propagation selon  $\vec{u}_x$  ; polarisation rectiligne selon  $\vec{u}_z$

$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{u}_z$  en choisissant  $\vec{E}$  comme origine des phases.

Relation de structure :  $\vec{B} = \frac{\vec{e}_k \wedge \vec{E}}{c}$        $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c}$        $\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) (\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z)$

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{u}_y$$

2) Vecteur de Poynting  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x = \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi) \vec{u}_x$  soit avec  $\langle \cos^2(\omega t - kx + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$  :

$\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \langle \epsilon_0 c E^2 \rangle = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}$  ( $\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle$  uniforme : indépendant du point de l'espace considéré).

$u_{em}(M, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(M, t) + \frac{1}{2} \frac{B^2(M, t)}{\mu_0}$  avec  $E = Bc$  et  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ ,

soit  $u_{em} = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$  et  $\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$  (uniforme).

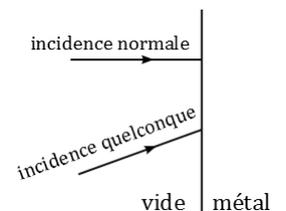
1)  $s = K \langle \mathcal{P}_{ray} \rangle$        $s = K \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{S}$        $s = K \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} S \cos \theta$

4) Pour optimiser la mesure (en veillant à ce que le capteur ne sature pas), Aleks doit orienter son capteur de sorte que  $\theta = 0$  : incidence normale sur le capteur.

5) Puissance moyenne rayonnée  $\langle \mathcal{P}_{ray} \rangle = \frac{s}{K} = 2,0 \text{ mW}$  ; amplitude de  $\vec{E}$  :  $E_0 = \sqrt{\frac{2c\mu_0 s}{KS}} = 8,7 \cdot 10^2 \text{ V.m}^{-1}$ .

## IV) REFLEXION SOUS INCIDENCE NORMALE D'UNE OEMPPH POLARISEE RECTILIGNEMENT SUR UN PLAN CONDUCTEUR PARFAIT

On s'intéresse à une onde se propageant initialement dans le vide avant de rencontrer un conducteur parfait, l'interface avec le vide étant un plan perpendiculaire à la direction de propagation : c'est l'incidence normale.



### A) Modèle du conducteur parfait

#### 1) Caractéristiques générales d'un conducteur ohmique

La vitesse acquise par les porteurs de charge mobiles est (rapidement) proportionnelle au champ électrique imposé, le vecteur densité de courant est proportionnel au champ électrique.

Forme locale de la loi d'Ohm :  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$   $\gamma =$  conductivité du matériau

■ Unités :  $\vec{j}$  en  $A.m^{-2}$ ,  $\vec{E}$  en  $V.m^{-1}$ ,  $\gamma$  en  $S.m^{-1}$

Espace 20

Ordre de grandeur : de  $10^{-20} S.m^{-1}$  pour un excellent isolant à  $10^7 S.m^{-1}$  pour un métal.

## 2) Conducteur parfait

La conductivité est supposée infinie, la résistivité est supposée nulle, ce qui signifie qu'on néglige les pertes par effet Joule dans le matériau.

$\vec{j}$  non infini donc  $\vec{E} = \vec{0}$  dans un conducteur parfait

Relation de Maxwell-Faraday :  $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$

Espace 21

Il ne peut donc pas exister dans un conducteur parfait de champ magnétique variable, or on s'intéresse à la propagation d'une onde, donc à un champ variable dans le temps.

On en déduit  $\vec{B} = \vec{0}$  dans un conducteur parfait

### Modèle du conducteur parfait

Un **conducteur parfait** est caractérisé par une **conductivité  $\gamma$  infinie** ; on a alors  $\vec{E} = \vec{0}$  et  $\vec{B} = \vec{0}$

**Remarque (hors-programme)** : En réalité, le passage du vide au conducteur n'est pas abrupt. On peut montrer qu'il existe une faible épaisseur  $\delta$ , appelée épaisseur de peau sur laquelle les champs décroissent exponentiellement. Cette épaisseur, dans laquelle existe des courants peut s'exprimer en fonction de  $\mu_0$ ,  $\gamma$  et  $\omega$ , pulsation de l'onde monochromatique incidente :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma \mu_0 \omega}}$$

On constate que  $\delta$  diminue lorsque  $\gamma$  augmente et lorsque  $\omega$  augmente.

Pour de l'argent, de conductivité  $\gamma = 6.10^7 S.m^{-1}$ , avec  $\omega = 10^8 rad.s^{-1}$ , on a  $\delta = 1,6.10^{-5} m = 16 \mu m$ .

L'approximation d'une épaisseur de peau nulle est donc correcte lorsqu'on considère des conducteurs de dimension égale ou supérieure au centimètre.

## 3) Discontinuités des champs à l'interface entre conducteur et vide

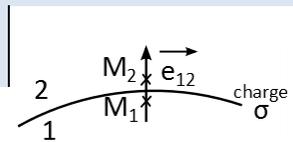
### Rappels

Le champ électrique subit une **discontinuité finie** à la traversée d'une surface chargée :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{12}$$

Lors de la traversée d'une surface chargée :

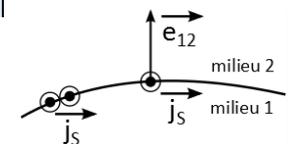
- La composante **tangentielle** du champ électrique est **continue**
- La composante **normale** du champ électrique est **discontinue**.



Le champ magnétique subit une **discontinuité finie** à la traversée d'une nappe de courant surfacique :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12}$$

- La **composante tangentielle** du champ magnétique est **discontinue** lors de la traversée d'une nappe surfacique.
- La **composante normale** du champ magnétique est **continue** lors de la traversée d'une nappe surfacique.



Supposons qu'un conducteur parfait occupe le demi-espace  $x > 0$  alors que le demi-espace  $x < 0$  est vide.

Soit ici :

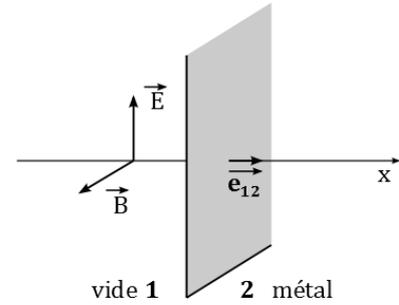
$$\vec{E}_1 = \vec{E}(0^-) \text{ champ à la limite du conducteur, côté vide}$$

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 &= \vec{0} && \text{champ dans le conducteur, près de l'interface} \\ \vec{B}_1 &= \vec{B}(0^-) && \text{champ à la limite du conducteur, côté vide} \\ \vec{B}_2 &= \vec{0} && \text{champ dans le conducteur, près de l'interface} \\ \vec{e}_{12} &= \vec{e}_x\end{aligned}$$

D'après les relations de passage rappelées, on a alors :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{12} = \vec{0} - \vec{E}(0^-) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \quad (1)$$

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_{12} = \vec{0} - \vec{B}(0^-) \quad \Rightarrow \quad \vec{B}(0^-) = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x \quad (2)$$



## B) Réflexion sous incidence normale d'une OemPPH polarisée rectilignement

### 1) Onde incidente

On considère une OemPPH se propageant dans le vide selon  $\vec{e}_x$ , polarisée rectilignement suivant  $\vec{e}_y$ , rencontrant un conducteur parfait occupant le demi-espace  $x > 0$ .

Pour une onde incidente de pulsation  $\omega$  :

$$\vec{E}_i(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

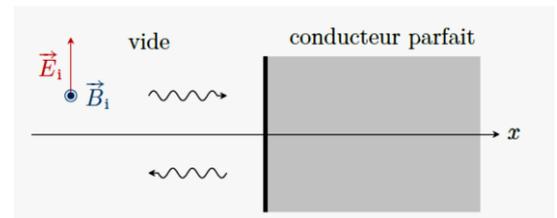


Schéma E. Thibierge

Le champ magnétique est déterminé grâce à la relation de structure :  $\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

$$\vec{B}_i(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z \quad \text{avec } B_0 = \frac{E_0}{c}$$

À la limite du conducteur ( $x = 0^-$ ), on a pour les champs incidents :

$$\vec{E}_i(0^-, t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y$$

$$\vec{B}_i(0^-, t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

### 2) Onde réfléchie

#### a) Nécessité de l'existence d'une onde réfléchie

Le champ  $\vec{E}_i$  ne satisfait pas à la relation de continuité (1) donnée ci-dessus, il doit apparaître un champ réfléchi  $\vec{E}_r$ , de sorte que  $\vec{E}_i + \vec{E}_r$  vérifie la relation de continuité<sup>5</sup>.

Il apparaît une onde réfléchie, qui va se propager suivant  $-\vec{e}_x$ .

Soient  $\vec{E}_r$  et  $\vec{B}_r$  les champs électrique et magnétique réfléchis. Les relations de passage impliquent :

$$\vec{E}_i(0^-, t) + \vec{E}_r(0^-, t) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \quad (1) \quad \vec{E}_r(0^-, t) = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \quad (1)$$

$$\vec{B}_i(0^-, t) + \vec{B}_r(0^-, t) = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x \quad (2) \quad \vec{B}_r(0^-, t) = -B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z - \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x \quad (2)$$

Du fait de la linéarité des équations de Maxwell, l'onde réfléchie a la même pulsation que l'onde incidente.

<sup>5</sup> Le champ électrique incident, en arrivant sur le métal, crée un courant variable  $\vec{j}_s$  (sur une profondeur très faible), lui-même source d'un champ magnétique variable. Ce champ magnétique induit un champ électrique (relation de Maxwell-Faraday) qui va s'opposer au champ incident, empêchant la pénétration du champ électrique dans le métal.

### d) Champ électrique réfléchi

D'après les caractéristiques du champ électrique, il est nécessairement orthogonal à la direction de propagation, et n'a donc pas de composante selon  $\vec{e}_x$  avec  $\vec{E}_r(0^-, t) \cdot \vec{e}_x = 0$

En projetant la relation de passage sur  $\vec{e}_x$ , on obtient donc :

Espace 21

$$\vec{E}_r(0^-, t) \cdot \vec{e}_x = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x \Leftrightarrow 0 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

On en déduit qu'il n'y aura **pas de charge statique sur le conducteur** :  $\sigma = 0$  ;

Espace 22

En projetant la relation de passage sur  $\vec{e}_z$  :

$$\vec{E}_r(0^-, t) \cdot \vec{e}_z = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0$$

Le champ réfléchi n'a **pas de composante selon  $\vec{e}_z$**

En projetant la relation de passage sur  $\vec{e}_y$  :

Espace 23

$$\vec{E}_r(0^-, t) \cdot \vec{e}_y = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = -E_0 \cos(\omega t)$$

Soit, en l'absence de composante de  $\vec{E}_r(0^-, t)$  selon  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_z$  :

$\vec{E}_r(0^-, t) = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y$ , avec de plus une propagation selon  $-\vec{e}_x$  :

Espace 24

$$\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y = E_0 \cos(\omega t + kx + \pi) \vec{e}_y$$

L'onde réfléchi a la **même pulsation** que l'onde incidente ; le champ électrique réfléchi a la **même amplitude** que le champ incident et subit un **déphasage de  $\pi$** .

**Le champ électrique résultant est nul sur la surface du conducteur**, ainsi qu'à l'intérieur de celui-ci.

### e) Champ magnétique réfléchi

On a établi à l'aide de la relation de structure  $\vec{B}_i(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$  avec  $B_0 = \frac{E_0}{c}$ . De même :

$$\vec{B}_r(x, t) = \frac{(-\vec{e}_x) \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{(-\vec{e}_x) \wedge (-E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y)}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$$

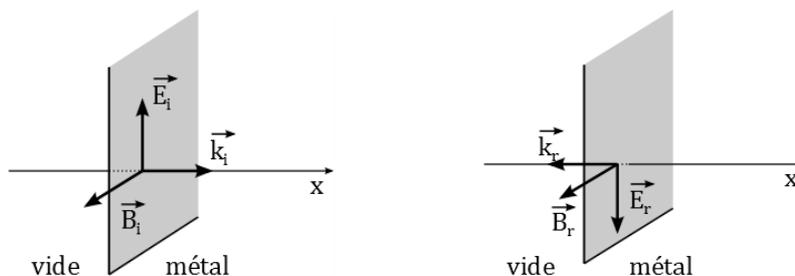
Espace 25

$$\vec{B}_r(x, t) = B_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z \quad \text{avec } B_0 = \frac{E_0}{c}$$

Le champ magnétique réfléchi a la même amplitude et la même phase que le champ incident.

#### ■ Caractéristiques de l'onde réfléchi par un conducteur parfait suite à une incidence normale

- × L'onde réfléchi a la même pulsation et la même amplitude que l'onde incidente.
- × Déphasage de  $\pi$  sur l'interface pour le champ électrique.
- × Pas de déphasage sur l'interface pour le champ magnétique



### 3) Charges, courants sur l'interface

Nous avons établi l'absence de charges surfaciques à la surface du conducteur parfait :  $\sigma = 0$

Relation de passage pour le champ magnétique :  $\vec{B}_i(0^-, t) + \vec{B}_r(0^-, t) = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x$

Or  $\vec{B}_i(0^-, t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$  et  $\vec{B}_r(0^-, t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$  d'où

$$2 B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x$$

Espace 26

$\vec{j}_s$  est le courant sur l'interface, donc pas de composante suivant  $\vec{e}_x$

Le produit vectoriel par  $\vec{e}_x$  donne une composante sur  $\vec{e}_z$ , donc pas de composante sur  $\vec{e}_z$  :

$\vec{j}_s$  ne peut avoir qu'une composante sur  $\vec{e}_y$  :

$$2 B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z = -\mu_0 (j_s)_y \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x \quad \text{soit avec} \quad -\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \mu_0 (j_s)_y = 2 B_0 \cos(\omega t)$$

$$\vec{j}_s = 2 \frac{E_0}{c\mu_0} \cos(\omega t) \vec{e}_y$$

Ce résultat doit pouvoir être retrouvé, et non être appris par cœur !

**La réflexion d'une OemPPH sous incidence normale sur un plan conducteur parfait induit un courant surfacique dans la direction du champ électrique incident et une charge surfacique nulle.**

**Remarque :** les électrons libres du métal sont mis en mouvement par le champ électrique incident, il est donc logique que les courants surfaciques créés soient parallèles au champ électrique incident.

#### 4) Superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie

<b>Champ électrique incident</b>	<b>Champ électrique réfléchi</b>
$\vec{E}_i(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$	$\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$
<b>Champ magnétique incident</b>	<b>Champ magnétique réfléchi</b>
$\vec{B}_i(x, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$	$\vec{B}_r(x, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$

##### a) Champ électrique résultant

D'après le principe de superposition,  $\vec{E}(x, t) = \vec{E}_i(x, t) + \vec{E}_r(x, t)$ , soit d'après les résultats ci-dessus :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y - E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$$

Or  $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$  soit ici

$$\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx) = -2 \sin \frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2} \sin \frac{\omega t - kx - \omega t - kx}{2} = -2 \sin(\omega t) \sin(-kx)$$

Soit

$$\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$$

L'onde totale n'est plus progressive : on n'a plus la forme  $\omega t \pm kx$  ou  $x \pm ct$ , mais un découplage entre les dépendances spatiales et temporelles.

L'onde résultante est une **onde stationnaire**.

 Animation Java : site de Frédéric Legrand : <http://www.f-legrand.fr/scidoc/simul/ondes/reflexionConducteur.html>

##### f) Champ magnétique résultant

Attention !! une **onde stationnaire (OS) n'est pas une OPP** !! le champ magnétique résultant ne peut donc se calculer à partir de la relation de structure. Il faut **sommer les champs magnétiques incident et réfléchi calculés séparément**.

$$\vec{B}(x, t) = \vec{B}_i(x, t) + \vec{B}_r(x, t)$$

$$\vec{B}(x, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z + \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$$

Or  $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$  soit ici  $\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx) = 2 \cos(\omega t) \cos(kx)$

$$\vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z$$

Les deux champs résultants ont la même nature : l'onde résultante est une onde stationnaire et non plus une onde progressive.

## C) Description de l'onde stationnaire résultante

### 1) Position des nœuds, des ventres

$$\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z$$

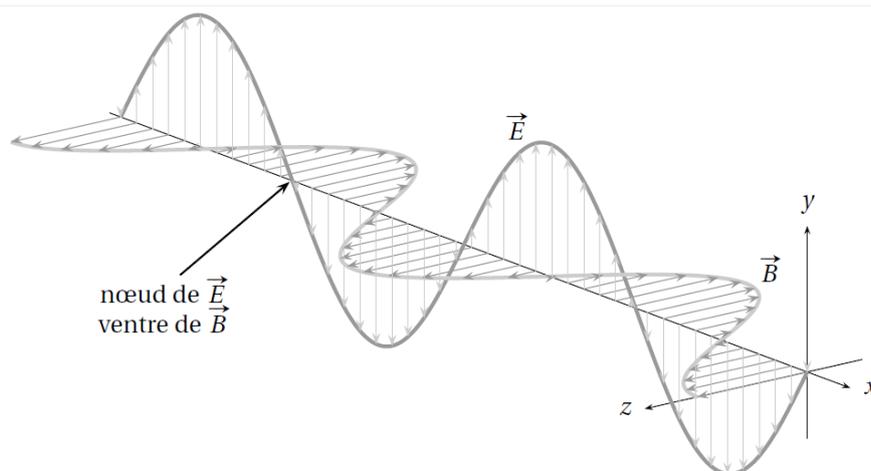
Un nœud est caractérisé par une amplitude nulle et un ventre est caractérisé par une amplitude maximale.

En  $x = 0$ , sur l'interface vide-conducteur, le champ électrique présente un nœud (conformément à la relation de passage) et le champ magnétique un ventre.

Abscisses (négatives, ici) des nœuds et des ventres, avec  $m \in \mathbb{Z}$  :

	$\vec{E}$	$\vec{B}$
<b>Nœuds</b>	$\sin(kx_N) = 0$ soit $kx_{N,m} = m\pi$ et $x_{N,m} = \frac{m\pi}{k} = m \frac{\lambda}{2}$	$\cos(kx_V) = 0$ soit $kx_{N,m} = \frac{\pi}{2} + m\pi$ et $x_{N,m} = \frac{\pi}{2k} + \frac{m\pi}{k} = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2}$
<b>Ventres</b>	$\sin(kx_V) = \pm 1$ soit $kx_{V,m} = \frac{\pi}{2} + m\pi$ D'où $x_{V,m} = \frac{\pi}{2k} + \frac{m\pi}{k} = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2}$	$\cos(kx_V) = \pm 1$ soit $kx_{V,m} = m\pi$ et $x_{V,m} = \frac{m\pi}{k} = m \frac{\lambda}{2}$

Les champs électrique et magnétique sont tous les deux stationnaires de même pulsation, à la différence que les nœuds d'un champ correspondent aux ventres de l'autre.



## D) Aspect énergétique

Espace 27

Vecteur de Poynting de l'onde résultante :  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$  avec  $\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$

$$\vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z$$

$$\vec{\Pi}(x, t) = 4 \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin(\omega t) \sin(kx) \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_x$$

Avec  $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

$$\vec{\Pi}(x, t) = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin(2\omega t) \sin(2kx) \vec{e}_x$$

Valeur moyenne :  $\langle \vec{\Pi}(x, t) \rangle = \vec{0}$

**La valeur moyenne du vecteur de Poynting est nulle en tout point. Il n'y a en moyenne pas de propagation d'énergie, les ondes incidente et réfléchie transportent la même puissance mais dans deux directions opposées.**

■ **Remarque**

Si on suppose le conducteur parfait, il n'y a aucune perte d'énergie vers le conducteur, toute l'énergie incidente se retrouve dans l'onde réfléchie. Le métal parfait réfléchit totalement l'onde incidente, c'est un miroir idéal.

Si l'on ne néglige pas « l'épaisseur de peau »  $\delta$ , c'est-à-dire si l'on tient compte de la pénétration de l'onde dans le conducteur, alors le coefficient de réflexion en puissance n'est plus égal à 1. Le champ électrique non-nul dans le conducteur s'accompagne d'effet Joule, qui dissipe l'énergie apportée par l'OPPM.

■ **Densité d'énergie électromagnétique**

$$u_{em}(x, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(x, t) + \frac{1}{2} \frac{B^2(x, t)}{\mu_0}$$

$$\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y \Rightarrow E^2(x, t) = 4 E_0^2 \sin^2(\omega t) \sin^2(kx) \Rightarrow$$

$$\langle E^2(x) \rangle = 2 E_0^2 \sin^2(kx)$$

Espace 28

$$\vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z \Rightarrow B^2(x, t) = 4 \frac{E_0^2}{c^2} \cos^2(\omega t) \cos^2(kx) \Rightarrow$$

$$\langle B^2(x) \rangle = 2 \frac{E_0^2}{c^2} \cos^2(kx)$$

On en déduit

$$\langle u_{em}(x) \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \langle E^2(x) \rangle + \frac{1}{2} \frac{\langle B^2(x) \rangle}{\mu_0} = E_0^2 \left( \epsilon_0 \sin^2(kx) + \frac{1}{\mu_0 c^2} \cos^2(kx) \right) = E_0^2 \epsilon_0 (\sin^2(kx) + \cos^2(kx))$$

$$\langle u_{em}(x) \rangle = \epsilon_0 E_0^2$$

**L'énergie est répartie uniformément dans tout l'espace.**

## E) Applications aux cavités à une dimension. Mode d'onde stationnaire.

Considérons une cavité vide taillée à l'intérieur d'un bon conducteur, que l'on modélise par un conducteur parfait, entre les abscisses  $x = 0$  et  $x = L$ .

Un émetteur engendre en continu une onde électromagnétique arrivant en incidence normale sur la face  $x = L$ . L'onde est alors réfléchie ; elle se propage en sens inverse jusqu'à rencontrer l'autre face  $x = 0$ .

Elle est à nouveau réfléchie et le processus se répète indéfiniment (aucune perte énergétique ne survient pour un métal parfait).



L'onde résultante possède une structure stationnaire, vu la superposition d'ondes progressives de sens de propagation opposés et de même amplitude.

On cherche les **modes propres de la cavité**, on s'intéresse à une onde monochromatique, de pulsation  $\omega$ .

Le champ électrique caractéristique de l'onde stationnaire est de la forme :

$$\vec{E}(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

Dans la cavité vide, le champ électrique satisfait à l'équation de propagation d'Alembert

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Avec  $\vec{E} = E_y(x, t) \vec{e}_y$ ,  $\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \vec{e}_y = \frac{\partial^2 (f(x) \cos(\omega t + \varphi))}{\partial x^2} \vec{e}_y$

Espace 29

Soit  $\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{d^2 f}{dx^2} \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$

De plus,  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial (f(x) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y)}{\partial t} = f(x) \frac{\partial (\cos(\omega t + \varphi))}{\partial t} \vec{e}_y = -\omega f(x) \sin(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega f(x) \frac{\partial (\sin(\omega t + \varphi))}{\partial t} \vec{e}_y = -\omega^2 f(x) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

On en déduit en remplaçant dans l'équation de d'Alembert :  $\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y + \frac{1}{c^2} f(x) \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y = \vec{0}$$

Espace 30

et donc  $f(x)$  qui vérifie

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 f(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f(x) = 0 \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

$$\text{Soit } f(x) = A \cos(kx + \psi)$$

L'expression du champ électrique est donc

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

Le champ doit être nul à chaque instant en  $x = 0$  et  $x = L$  pour satisfaire aux conditions aux limites vues précédemment :

Espace 31

$$(1) \quad \cos(\psi) = 0 \qquad (2) \quad \cos(kL + \psi) = 0$$

D'où (1)  $\Rightarrow \psi = \pm \frac{\pi}{2}$

$$(2) \quad \Rightarrow \cos\left(kL \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \sin(kL) = 0 \quad \Rightarrow kL = n\pi, \text{ avec } n \in \mathbb{N} \Rightarrow k = n \frac{\pi}{L}, \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

La valeur de  $k$  est donc imposée, **la norme du vecteur d'onde est quantifiée** :

$$k = k_n = n \frac{\pi}{L} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

On en déduit que **la pulsation et la fréquence sont également quantifiées** : avec  $n$  entier

$$\omega_n = n \frac{\pi c}{L} \qquad f_n = n \frac{c}{2L}$$

Il y a sélection de certaines ondes stationnaires, cette cavité résonante ne laisse passer que certaines fréquences.

**Modes propres** :  $\vec{E}_n(x, t) = E_0 \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t + \varphi\right) \vec{e}_y$ , avec  $n$  entier

Le **mode fondamental** correspond à  $n = 1$  :

$$f_1 = \frac{c}{2L}$$

Les modes suivants sont des **harmoniques** :

$$f_n = n f_1$$

■ **Relation entre  $L$  et  $\lambda$**

$$k_n = n \frac{\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_n}$$

On en déduit :

$$k = k_n = n \frac{\pi}{L} \quad \text{avec } n \text{ entier}$$

$$\omega = \omega_n = n \frac{\pi c}{L} \quad \text{avec } n \text{ entier}$$

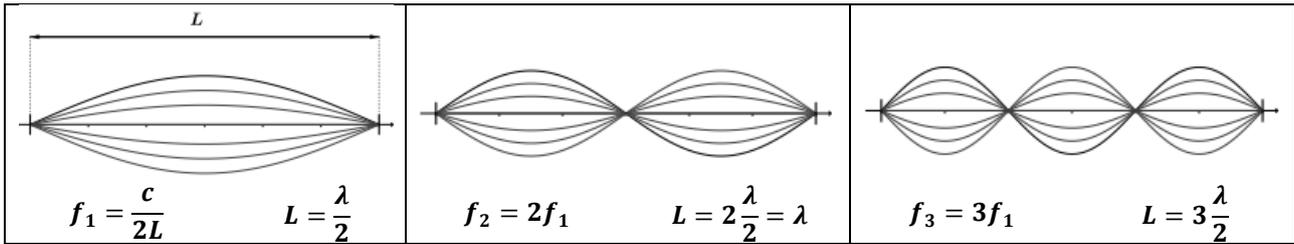
$$f = f_n = n \frac{c}{2L} \quad \text{avec } n \text{ entier}$$

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \quad \text{avec } n \text{ entier}$$

La longueur de la cavité est un multiple de la demi-longueur d'onde :  

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \quad \text{avec } n \text{ entier}$$

### 3 premiers modes :



#### ■ Remarque :

La similitude entre la cavité et la corde vibrante n'est pas due au hasard. En effet, dans chacun des cas, l'onde obéit à l'équation de d'Alembert avec les mêmes conditions aux limites (onde nulle aux extrémités du domaine). Ainsi, l'onde prend une forme similaire dans les deux situations.

Les cavités résonnantes électromagnétiques ont de nombreuses applications ; dans le domaine des radiofréquences, on peut citer le magnétron à cavité, avec une onde produite utilisée dans les radars autant que dans les fours à micro-ondes.

Le klystron et le tube à ondes progressives sont d'autres utilisations des cavités résonnantes dans le domaine des micro-ondes.

Les klystrons sont utilisés en particulier dans les radars, les accélérateurs pour radiothérapie ou stérilisation, les stations d'émission télévisuelle UHF, les stations de diffusion satellitaires, le chauffage par micro-ondes ou la physique des hautes énergies (accélérateurs de particules linéaires, synchrotrons, ...).

Dans le domaine optique, le laser utilise une cavité optique selon le même principe pour amplifier une source de lumière dite cohérente.