

TD CHAPITRE EM.5 : PROPAGATION D'ONDES ELECTROMAGNETIQUES – ELEMENTS DE CORRECTION

■ APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1. Equation de propagation des ondes EM : cf. cours

Exercice 2. Structure des ondes planes progressives électromagnétiques



1) Cf. relation de structure : $\vec{B} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c}$, d'où propagation vers les x décroissants.

2) Variable $t - \frac{x}{c}$: propagation selon $+$ \vec{e}_x puis relation de structure : $\vec{B} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c}$ $\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{e}_y$

Exercice 3. relation de dispersion 1 | 1 ou 2

calcul des dérivées partielles par rapport au temps et à x , qu'il faut injecter dans l'équation de d'Alembert :

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \text{Ici,} \quad \vec{\Delta} \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

En simplifiant, on trouve $-k^2 + \frac{1}{c^2} \omega^2 = 0$ soit $k = \frac{\omega}{c}$

Exercice 4. OemPPH et notation complexe 1 | 2 ou 3

$$\underline{\vec{E}} = \begin{cases} E_{0x} \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \overline{OM} + \varphi_x) \\ E_{0y} \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \overline{OM} + \varphi_y) \\ E_{0z} \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \overline{OM} + \varphi_z) \end{cases} \quad \underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \overline{OM}) \quad \text{où } \underline{\vec{E}}_0 = \begin{cases} E_{0x} \exp i \varphi_x \\ E_{0y} \exp i \varphi_y \\ E_{0z} \exp i \varphi_z \end{cases}$$

b) dans le cas où $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$, équation de d'Alembert :

Obtention de la relation de dispersion :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$\text{Dérivées spatiales : } \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial x} = -ik \underline{\vec{E}} = -ik E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y \quad \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial x^2} = -k^2 \underline{\vec{E}} = -k^2 E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$\text{Dérivées temporelles : } \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = i\omega \underline{\vec{E}} = i\omega E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y \quad \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{\vec{E}} = -\omega^2 E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

En injectant ces relations dans l'équation de propagation de d'Alembert : $\Delta \underline{\vec{E}} = \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2}$

On trouve

$$-k^2 \underline{\vec{E}} = \frac{1}{c^2} \times (-\omega^2 \underline{\vec{E}})$$

Soit $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$, les grandeurs physiques étant définies positives, on retrouve bien la relation de dispersion :

$$\omega = kc \quad \text{soit} \quad \lambda = cT$$

Equations de Maxwell en représentation complexe

| | |
|---|---|
| Maxwell-Gauss : $\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0$ | Maxwell-Faraday : $\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega \underline{\vec{B}}$ |
|---|---|

| | |
|--|--|
| Maxwell-Flux : $\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$ | Maxwell-Ampère : $\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = -\omega \epsilon_0 \mu_0 \underline{\vec{E}} = -\frac{\omega}{c^2} \underline{\vec{E}}$ |
|--|--|

D'après la relation de Maxwell Faraday :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$$

Soit avec la relation de dispersion $\omega = kc$:

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{kc} = \frac{\vec{u}_k \wedge \underline{\vec{E}}}{c}$$

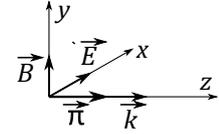
Cette relation reste vraie pour les parties réelles

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c}$$

Toute OPP étant une somme d'OPPH de même vecteur \vec{u}_k , cette relation reste vraie pour toute OPP
De même, Maxwell Ampère :

$$\vec{E} = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{c^2}{kc} \vec{k} \wedge \vec{B} = -c \vec{u}_k \wedge \vec{B}$$

Exercice 5. OemPPM polarisée  |  1 |  2 ou 3



1) Cf. schéma ci-contre (rappel : $\vec{B} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c}$ $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \vec{0}$)

2) Le champ magnétique est déterminé grâce à la relation de structure : $\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

Remarque : le calcul de \vec{B} peut être fait composante par composante (linéarité)

| | polarisation | propagation | plans d'onde | $\vec{B} = \frac{\vec{e}_k \wedge \vec{E}}{c}$ |
|----|--|--|---------------|--|
| a. | $\vec{e}_{pol} = \vec{e}_y$ | $\vec{e}_k = \vec{e}_x$ | $x = cte$ | $\vec{B} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c} = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$ où $B_0 = \frac{E_0}{c}$ |
| b. | $\vec{e}_{pol} = \frac{\vec{e}_y + \vec{e}_x}{\sqrt{2}}$ Polarisation à 45° des vecteurs \vec{e}_y et \vec{e}_x | $\vec{e}_k = \vec{e}_z$ | $z = cte$ | $\vec{B} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_y - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_x \right)$ |
| c. | $\vec{e}_{pol} = \vec{e}_z$ (le signe - ne change rien, on s'intéresse à la direction) | $\vec{e}_k = -\vec{e}_x$ | $x = cte$ | $\vec{B} = -\frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c} = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx + \varphi) \vec{e}_z$ |
| d. | $\vec{e}_{pol} = \frac{\vec{e}_y + \vec{e}_z}{\sqrt{2}}$ | $\vec{e}_k = \vec{e}_x$ | $x = cte$ | $\vec{B} = +B_0 \cos(\omega t - kx) \frac{\vec{e}_z - \vec{e}_y}{\sqrt{2}}$ où $B_0 = A\sqrt{2}/c$ |
| e. | $\vec{e}_{pol} = \vec{e}_x$ | $\vec{e}_k = \frac{\vec{e}_y + \vec{e}_z}{\sqrt{2}}$ | $y + z = cte$ | $\vec{B} = +B_0 \cos(\dots) \frac{-\vec{e}_z + \vec{e}_y}{\sqrt{2}}$ où $B_0 = E_0/c$ |

Exercice 6. Énergie transportée par une onde plane



- Relation de structure pour une OPP : $\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$ soit $E = cB$;
- cf. cours, avec $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$: $u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$;
- $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$, correspondant à la densité de flux de puissance électromagnétique rayonnée vers l'extérieur ;
- $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} \right)}{\mu_0} = \frac{E^2 \vec{u}}{\mu_0 c} = \epsilon_0 c E^2 \vec{u}$.

Exercice 7. Caractéristiques ondulatoires des ondes émises par des lasers  |  1 |  1

1) $\mathcal{P}_{em} = \iint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \Pi S = \Pi \pi r^2$ soit $P = \langle \mathcal{P}_{em} \rangle = \langle \Pi \rangle S = \langle \Pi \rangle \pi r^2$ soit $\langle \Pi \rangle = P / \pi r^2$ avec

$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ soit $\Pi = \frac{EB}{\mu_0}$ avec $\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c}$ d'où $B = \frac{E}{c}$ soit $\Pi = \frac{E^2}{c\mu_0}$

Avec $E = E_{max} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi)$: $\Pi = \frac{E^2}{c\mu_0} = \frac{E_{max}^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi)$

$\langle \Pi \rangle = \left\langle \frac{E_{max}^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \right\rangle = \frac{E_{max}^2}{c\mu_0} \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \rangle$ soit avec $\langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$

$$\langle \Pi \rangle = \frac{E_{max}^2}{2c\mu_0} = P / \pi r^2$$

$$E_{max} = \sqrt{\frac{2c\mu_0 P}{\pi r^2}} = 4,9 \cdot 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}; B_{max} = \frac{E_{max}}{c} = \sqrt{\frac{2\mu_0 P}{c\pi r^2}} = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ T}.$$

- 2) Puissance $\mathcal{P} = \frac{\mathcal{E}}{\Delta t}$ avec énergie de 1,2 MJ par impulsions de durée de l'ordre de la nanoseconde :
 $\mathcal{E} \approx 1,2 \cdot 10^6 \text{ J}$ et $\Delta t = 10^{-9} \text{ s}$: $\mathcal{P} = \frac{\mathcal{E}}{\Delta t} = 1,2 \cdot 10^{15} \text{ W}$;
 puissance surfacique $\Pi = \frac{\mathcal{P}}{S} = 1,2 \cdot 10^{21} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ (surface $S = 1 \text{ mm}^2 = 10^{-6} \text{ m}^2$)

Exercice 8. Un problème d'orientation



1) propagation selon \vec{u}_x et polarisation rectiligne selon \vec{u}_z : $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$ en choisissant \vec{E} comme origine des phases. Relation de structure : $\vec{B} = \frac{\vec{e}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) (\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z) = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$.

2) Vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x = \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x$ soit $\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \langle \varepsilon_0 c E^2 \rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}$ car

$\langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2}$; notons que $\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle$ est uniforme (indépendant du point de l'espace considéré).

$u_{em}(M, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(M, t) + \frac{1}{2} \frac{B^2(M, t)}{\mu_0}$ avec $E = Bc$ et $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, soit $u_{em} = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$ et

$\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2$ (uniforme).

3) $s = K \langle \mathcal{P}_{ray} \rangle = K \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{S} = K \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2} S \cos \theta$

4) Pour optimiser la mesure (en veillant à ce que le capteur ne sature pas), Aleks doit orienter son capteur de sorte que $\theta = 0$: incidence normale sur le capteur.

5) Puissance moyenne rayonnée : $\langle \mathcal{P}_{ray} \rangle = \frac{s}{K} = 2,0 \text{ mW}$ et amplitude du champ électrique :

$$E_0 = \sqrt{\frac{2c\mu_0 s}{KS}} = 8,7 \cdot 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

EXERCICES

■ Ondes planes progressives

Exercice 9. Structure de l'onde plane



Expression en $ky + \omega t = \omega t + ky$: Propagation selon $-\vec{e}_y$, et $\vec{E} = E_z \vec{e}_z$

Relation de structure : $\vec{B} = \frac{-\vec{e}_y \wedge \vec{E}}{c} \quad \vec{B} = -\frac{E_0}{c} \sin(ky + \omega t) \vec{e}_x$

Exercice 10. Longueurs d'onde de quelques ondes radios

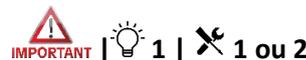


$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = 1,20 \text{ km} ; \sigma = \frac{1}{\lambda} = 8,33 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-1} ; k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = 5,25 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}.$$

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = 3,00 \text{ m} ; \sigma = \frac{1}{\lambda} = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1} ; k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = 2,09 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}.$$

$$\lambda = 17 \text{ cm} ; \sigma = 6,0 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1} ; k = 38 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Exercice 11. Caractéristiques d'une onde



a. $\vec{E} = \text{Re}(\underline{\vec{E}}) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x = E_0 \cos\left(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} z\right) \vec{e}_x = E_0 \cos\left(2\pi f \left(t - \frac{z}{c}\right)\right) \vec{e}_x$: propagation selon $+\vec{e}_z$, polarisation selon \vec{e}_x ; Relation de structure : $\vec{B} = \frac{\vec{e}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c} = B_0 \cos\left(2\pi f \left(t - \frac{z}{c}\right)\right) \vec{e}_y$ avec $B_0 = \frac{E_0}{c}$;

b. $E_0 = 10 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$; $B_0 = \frac{E_0}{c} = 3,3 \cdot 10^{-8} \text{ T}$; $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = 0,42 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$; $\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = 15 \text{ m}$.

Exercice 12. Direction de polarisation et direction de propagation pour une OPPM



| | polarisation | propagation | plans d'onde | $\vec{B} = \frac{\vec{e}_k \wedge \vec{E}}{c}$ |
|----|--------------|-------------|--------------|---|
| a. | x | +z | $z = cte$ | $\vec{B} = +B_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$ où $B_0 = E_0/c$ |
| b. | x | -z | $z = cte$ | $\vec{B} = -B_0 \cos(\omega t + kz) \vec{e}_y$ où $B_0 = E_0/c$ |
| c. | z | +x | $x = cte$ | $\vec{B} = -B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$ où $B_0 = E_0/c$ |

Exercice 13. Antenne cadre

L'antenne cadre fonctionne grâce à l'induction : le champ électrique variable produit un champ magnétique variable, dont le flux à travers le cadre de l'antenne sera donc également variable, générant une fem induite, et permettant la circulation d'un courant induit.

Selon l'énoncé, l'onde radio est de fréquence 27 MHz, cela signifie qu'elle est modélisée par une OPPH. Le champ électrique peut alors être écrit sous la forme :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$$

Relation de structure (OPPH) : $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

Avec l'écriture retenue pour \vec{E} , on a une propagation dans le sens direct de l'axe (Ox) : $\vec{e}_p = \vec{e}_x$ et $\vec{k} = k\vec{e}_x$ soit

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k\vec{e}_x \wedge E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x}{\omega} = \frac{kE_0 \cos(\omega t - kz)}{\omega} (\vec{e}_x \wedge \vec{e}_x) = \frac{kE_0 \cos(\omega t - kz)}{\omega} \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

Pour la fréquence étudiée, la longueur d'onde est $\lambda = \frac{c}{f} \approx 100 \text{ m} \gg a$, on peut donc considérer le champ uniforme sur la surface du cadre de l'antenne.

Flux du champ magnétique à travers le cadre de l'antenne en orientant le plan de l'antenne selon \vec{e}_y :

$$\Phi(\vec{B}) = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = \frac{E_0}{c} a^2 \cos(\omega t - kz)$$

Loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{E_0}{c} a^2 \omega \sin(\omega t - kz)$$

Valeur efficace de la tension : $E_{eff} = \frac{E_0}{c\sqrt{2}} a^2 \omega$ soit

$$E_0 = \frac{c\sqrt{2}}{a^2 \omega} E_{eff}$$

■ Équations de Maxwell dans le vide, énergie électromagnétique

Exercice 14. Quelques ordres de grandeurs | 2 | 1

1) Par définition, $\mathcal{P}_{em} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} = \Pi S$ $\Pi = \frac{\mathcal{P}}{S} = \frac{\mathcal{P}}{\pi \frac{d^2}{4}} = 1,3 \text{ kW.m}^{-2}$;

1) Puissance rayonnée sur une sphère de surface $S = 4\pi d^2$ à la distance d ;
Par définition, $\mathcal{P}_{em} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} = \Pi S$ $\Pi = \frac{\mathcal{P}}{S} = \frac{\mathcal{P}}{\pi \frac{d^2}{4}}$. A.N. : $\Pi = 8 \text{ W.m}^{-2}$

Exercice 15. Laser (Oral ATS)

Propagation : expression $\cos(\omega t - kx)$: propagation selon $+\vec{u}_x$

Polarisation : par définition direction du vecteur \vec{E} , soit ici (Oz)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$$

Méthode N°1 : Relation de structure car OPP (non valable pour une onde stationnaire par exemple !!!)

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

Méthode N°2 : Maxwell-Faraday avec $E_x = 0$; $B_x = 0$ (propagation selon $+\vec{u}_x$ et onde transverse) et $E = f(x, t)$ soit

$B = g(x, t)$:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \Leftrightarrow 0 = 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Leftrightarrow 0 = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t} = k E_0 \cos(\omega t - kx) \Leftrightarrow B_{0y} = -\frac{k E_0}{\omega} = -\frac{E_0}{c} \\ 0 = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Leftrightarrow B_{0z} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x$$

$$\frac{P}{S} = \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{2 \langle \vec{\Pi} \rangle}{c \varepsilon_0}} = 8,7 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \text{ et } B_0 = \frac{E_0}{c} = 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

Version 2 : bain de soleil (2 fois, 2022)

Maxwell-Faraday avec $E_x = 0$; $B_x = 0$ et $E = f(x, t)$; $B = f(x, t)$:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \Leftrightarrow 0 = 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Leftrightarrow 0 = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t} = k E_0 \cos(\omega t - kx) \Leftrightarrow B_{0y} = -\frac{k E_0}{\omega} = -\frac{E_0}{c} \\ 0 = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Leftrightarrow B_{0z} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

Exercice 16. Énergie reçue par le toit d'une maison



b. Vecteur de Poynting donnant la puissance surfacique : $\mathcal{P}_{em} = \iint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \Pi S$ soit $P = \langle \mathcal{P}_{em} \rangle = \langle \Pi \rangle S$ et $\langle \Pi \rangle = \frac{P}{S}$

En considérant pour simplifier une OPPM : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ soit $\Pi = \frac{EB}{\mu_0}$ avec $\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c}$ d'où $B = \frac{E}{c}$ soit $\Pi = \frac{E^2}{c\mu_0}$

Avec $E = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi)$: $\Pi = \frac{E_0^2}{c\mu_0} = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi)$

$\langle \Pi \rangle = \langle \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \rangle = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \rangle$ soit avec $\langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$

$$\langle \Pi \rangle = \frac{P}{S} = \frac{E_0^2}{2c\mu_0} \quad \text{A.N. : } \langle \Pi \rangle \approx 1,3 \text{ kW/m}^2 ;$$

c. maison de $100 \text{ m}^2 \Rightarrow \mathcal{P}_{maison} = \langle \Pi \rangle S = 130 \text{ kW}$;

d. Énergie récupérable par jour : $\mathcal{E}_{rec} = \mathcal{P}_{maison} \Delta t = 780 \text{ kWh}$ avec $\Delta t = \frac{24h}{4} = 6h$

e. Au vu des puissances données, une famille ne devrait pas consommer toute l'énergie disponible, même en ajoutant l'éclairage ; de l'énergie peut être revendue à EDF.

Par exemple : cuisinière pendant 1h, lave-linge + sèche-linge pendant 2h, four pendant 1h, petit électroménager pendant 2h, ordinateur, TV, etc. pendant 20 h : $\mathcal{E}_{\text{cons}} = 10 + 2 \times 3 + 2,5 + 2 \times 2 + 0,2 \times 20 = 24,7 \text{ kWh}$.

En pratique, cela dépend du rendement des cellules photovoltaïques utilisées.

Exercice 17. Commande à distance du verrouillage des portes d'un véhicule (ATS 2012)

1) Equations de Maxwell dans un milieu non chargé ($\rho = 0$), non conducteur ($\vec{j} = \vec{0}$) et assimilable au vide :

| | | Régime variable dans le vide |
|-----------------------------------|-----------|--|
| Maxwell-Gauss | MG | $\text{div}(\vec{E}) = 0$ |
| Maxwell-Faraday | MF | $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ |
| Maxwell-Ampère | MA | $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ |
| Maxwell-flux (ou Maxwell-Thomson) | MΦ | $\text{div}(\vec{B}) = 0$ |

Unités du champ magnétique \vec{B} : tesla (T) et du champ électrique \vec{E} : newton par coulomb (N/C^{-1}) ou volt par mètre (V.m^{-1})

2) Equation de propagation vectorielle vérifiée par le champ électrique \vec{E} dans le vide :

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E}$$

Avec **(MG)** dans le vide : $\text{div}(\vec{E}) = 0$ soit $\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = -\Delta \vec{E}$

Avec **(MF)** : $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ soit $\text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\Delta \vec{E}$ ou $\text{rot}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \Delta \vec{E} = \frac{\partial(\text{rot} \vec{B})}{\partial t}$

Or selon **(MA)** dans le vide : $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ d'où $\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Finalement
$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

3) Soit $\vec{E}(x, t) = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{e}_z$

Sens de propagation de \vec{E} : suivant $+\vec{e}_x$ (car \vec{E} est fonction de $\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$).

Direction de polarisation de \vec{E} : polarisation rectiligne suivant $+\vec{e}_z$.

4) On calcule d'une part $\Delta \vec{E}$ puis d'autre part $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ et on les remplace dans l'équation d'onde :

On a $\vec{E}(x, t) = E_z(x, t) \vec{e}_z$ d'où :

$$\Delta \vec{E} = \Delta E_x \cdot \vec{e}_x + \Delta E_y \cdot \vec{e}_y + \Delta E_z \cdot \vec{e}_z = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} & & \\ & \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} & \\ & & \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \end{matrix}$$

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \vec{e}_z = \frac{\partial^2 \left(E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)\right)}{\partial x^2} \vec{e}_z = -E_0 \frac{\omega^2}{c^2} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \left(E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)\right)}{\partial t^2} = -E_0 \omega^2 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{e}_z$$

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \Leftrightarrow -E_0 \frac{\omega^2}{c^2} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{e}_z + \epsilon_0 \mu_0 E_0 \omega^2 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow E_0 \omega^2 \left(\epsilon_0 \mu_0 - \frac{1}{c^2}\right) \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{e}_z = \vec{0}$$

Si $\epsilon_0 \mu_0 - \frac{1}{c^2} = 0$, soit $\frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0$ alors l'onde vérifie l'équation de propagation.

5) Equation de Maxwell-Faraday : $\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z = - \frac{\partial E_z}{\partial x} \vec{e}_y$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -E_0 \frac{\omega}{c} \sin \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{e}_y = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

On intègre par rapport au temps :

$$\vec{B} = -E_0 \frac{1}{c} \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{e}_y$$

Autre méthode : L'onde se propage suivant \vec{e}_x , son vecteur direction de propagation est $\vec{n} = \vec{e}_x$

$$\vec{B} = \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{e}_x \wedge E_0 \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{e}_z}{c} = -E_0 \frac{1}{c} \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{e}_y$$

6) Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ s'exprime en **watt par mètre carré** ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$). Il donne la **direction de propagation de l'énergie** associée à l'onde et son flux est la puissance instantanée traversant une surface.

7) Expression du vecteur de Poynting relatif à l'onde considérée :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \left(E_0 \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{e}_z \right) \wedge \left(-E_0 \frac{1}{c} \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{e}_y \right)$$

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{c \mu_0} E_0^2 \cos^2 \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{e}_x$$

8) Expression de $\langle \vec{\Pi} \rangle$: $\langle \cos^2 \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \rangle = \frac{1}{2}$ d'où $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2 c \mu_0} \vec{e}_x$

9) Une puissance moyenne $P = 50 \cdot 10^{-3} \text{ W}$ se répartit sur des sphères de surface $4\pi d^2$: $P = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle \cdot S = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle \cdot 4\pi d^2$

$$\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \frac{P}{4\pi d^2}$$

Application numérique : $\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{4\pi 10^2} = \frac{5}{4\pi} \cdot 10^{-4} = 0,4 \cdot 10^{-4} = 40 \cdot 10^{-6} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} = \mathbf{40 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-2}}$

Détermination de E_0 : $\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \frac{E_0^2}{2 c \mu_0} \Rightarrow E_0 = \sqrt{\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle \cdot 2 c \mu_0}$

Application numérique :

$$E_0 = \sqrt{40 \cdot 10^{-6} \times 2 \times 3 \cdot 10^8 \times 4\pi 10^{-7}} = \sqrt{4 \times 2 \times 3 \times 4 \times \pi 10^{-5+8-7}} = \sqrt{16 \times 6\pi 10^{-4}} = 17 \cdot 10^{-2} = \mathbf{0,17 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}}$$

Détermination de B_0 : $B_0 = \frac{E_0}{c}$

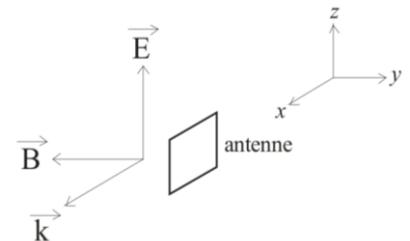
Application numérique : $B_0 = \frac{0,17}{3 \cdot 10^8} = 0,058 \cdot 10^{-8} = \mathbf{5,8 \cdot 10^{-10} \text{ T}}$

10) Le cadre doit être orienté pour que \vec{B} ait un bon flux au-travers. La loi de Lenz sur l'induction :

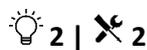
$$e = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

explique l'apparition d'une fém dans ce cadre.

11) Longueur d'onde : $\lambda = c/f$ A.N. : $\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{400 \cdot 10^6} = \frac{3}{4} \text{ m} = \mathbf{75 \text{ cm}}$



Exercice 18. Onde sphérique



1) Le vecteur d'onde de l'onde sphérique est donné par $\vec{k} = k \vec{e}_r$.

2) Le champ magnétique est donné par $\vec{B} = \vec{e}_r \wedge \frac{\vec{E}}{c} = \frac{E_0(r)}{c} \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\varphi$.

3) Par définition, $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0(r)^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kr) \vec{e}_r$

avec $\langle \cos^2(\omega t - kr) \rangle = \frac{1}{2}$, on en déduit $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0(r)^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_r$

4) La puissance rayonnée à travers une sphère de rayon r vaut $\mathcal{P}_{em} = \iint_{(\Sigma)_{sphère}} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{dS} = \langle \Pi \rangle 4\pi r^2$ avec $\langle \vec{\Pi} \rangle$ uniforme sur la surface de la sphère et colinéaire à \vec{dS} soit $P = \langle \mathcal{P}_{em} \rangle = \langle \Pi \rangle S = \frac{E_0(r)^2}{2\mu_0 c} \times 4\pi r^2 = 2\pi r^2 \frac{E_0(r)^2}{\mu_0 c}$.

Comme l'onde se propage dans le vide, elle n'est **ni absorbée ni amplifiée**, la puissance P est donc constante et indépendante du rayon de la sphère ; en revanche, elle **s'étale** dans l'espace en étant répartie sur une surface de plus en plus grande, et l'amplitude de l'onde diminue donc quand r augmente.

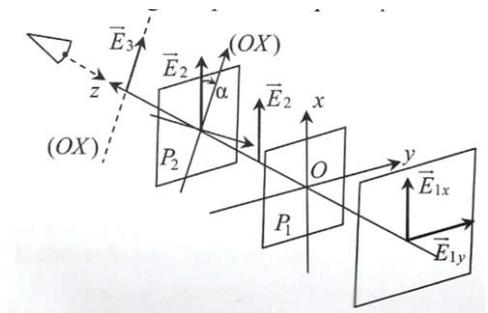
On en déduit, avec $2\pi r^2 \frac{E_0(r)^2}{\mu_0 c} = P : E_0(r)^2 = \frac{\mu_0 c P}{2\pi r^2}$ d'où $E_0(r) = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu_0 c P}{2\pi}}$.

Exercice 19. Polariseur et analyseur



1) Seule la composante selon \vec{e}_x est transmise par le polariseur : $\vec{E}_2 = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \varphi_x) \vec{e}_x$: obtention d'une onde polarisée rectilignement.

2) A) $\vec{\Pi}_2 = \frac{\vec{E}_2 \wedge \vec{B}_2}{\mu_0} = \frac{E_2^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x = \varepsilon_0 c E_{0x}^2 \cos^2(kz - \omega t) \vec{u}_x$ soit $\langle \|\vec{\Pi}_2\| \rangle = \langle \varepsilon_0 c E_2^2 \rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_{0x}^2}{2}$ car $\langle \cos^2(kz - \omega t) \rangle = \frac{1}{2}$;



Le second polaroïd ne transmet que la projection de \vec{E}_2 selon son axe (OX) :

$\vec{E}_3 = [E_{0x} \cos(kz - \omega t + \varphi_x) \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x] \vec{e}_x = [E_{0x} \cos(kz - \omega t + \varphi_x) \cos \alpha] \vec{e}_x$
 $\langle \|\vec{\Pi}_3\| \rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_{0x}^2 \cos^2 \alpha}{2} \vec{e}_x$

Le rapport des intensités est dans le même rapport que celui des normes du vecteur de Poynting moyen :

$\frac{I_3}{I_2} = \frac{\langle \|\vec{\Pi}_3\| \rangle}{\langle \|\vec{\Pi}_2\| \rangle} = \cos^2 \alpha$ (loi de Malus)

b) Lorsque les directions (OX) et (Ox) sont orthogonales (polariseur et analyseur croisés), $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $I_3 = 0$: extinction complète de la lumière émergente.

c) Si la polarisation est elliptique, on observe les situations suivantes quand on tourne P_2 :

- Quand l'axe (OX) coïncide avec le grand axe de l'ellipse, l'amplitude du champ transmis est maximale, idem pour l'intensité lumineuse.

- Quand l'axe (OX) coïncide avec le petit axe de l'ellipse, l'amplitude du champ transmis est minimale, idem pour l'intensité lumineuse.

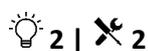
- Entre ces deux cas, l'amplitude donc l'intensité varient entre ces deux valeurs extrêmes sans jamais s'annuler.

Si la polarisation est circulaire, la projection du champ incident sur l'axe du polariseur est constante, donc l'amplitude et l'intensité émergentes également.

d) L'observation du minimum nul à l'écran pour une orientation donnée de l'axe du polaroïd renseigne à la fois sur le caractère rectiligne de la polarisation incidente et sur sa direction (orthogonale à l'axe du second polaroïd placé dans sa position d'extinction). L'observation d'une intensité variant sans s'annuler indique une polarisation elliptique, une intensité ne variant pas une polarisation circulaire.

■ Réflexion d'une onde plane

Exercice 20. Onde et conducteur métallique



a. polarisation rectiligne de l'onde suivant Ox ;

b. Relation de structure : $\vec{B}_t = \frac{\vec{e}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{e}_z \wedge E \vec{e}_x}{c} = \frac{E}{c} (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x) = \frac{kE}{\omega} \vec{e}_y$

$$\vec{B}_i = \frac{k}{\omega} E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{e}_y = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kz)) \vec{e}_y$$

c. Cf. cours : **Un conducteur parfait** est caractérisé par une conductivité γ infinie ; on a alors $\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{B} = \vec{0}$

(γ infinie et \vec{j} non infini) donc $\vec{E} = \vec{0}$ dans un conducteur parfait

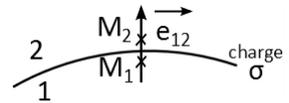
$$\text{Relation de Maxwell-Faraday : } \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

Il ne peut donc pas exister dans un conducteur parfait de champ magnétique variable, or on s'intéresse à la propagation d'une onde, donc à un champ variable dans le temps. On en déduit $\vec{B} = \vec{0}$ dans un conducteur parfait).

$$\boxed{\vec{E}_c = \vec{0}} ; \boxed{\vec{B}_c = \vec{0}}$$

d. Le champ électrique subit une discontinuité finie à la traversée d'une surface chargée :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{12}$$



Ici $\vec{E}(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z = \vec{E}_i(0^-, t) + \vec{E}_r(0^-, t)$ avec \vec{E}_i et \vec{E}_r transverses : composantes nulles selon \vec{e}_z

$\sigma = 0$; d'où $\vec{E}_i(0^-, t) = -\vec{E}_r(0^-, t)$ et propagation selon $(-\vec{e}_z)$:

$$\boxed{\vec{E}_r = -E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{e}_x}$$

$$\text{e. } \vec{B}_r(z, t) = \frac{(-\vec{e}_z) \wedge \vec{E}_r}{c} \quad \boxed{\vec{B}_r = \frac{k}{\omega} E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{e}_y = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t + kz)) \vec{e}_y}$$

a. Relation de passage pour le champ magnétique : $\vec{B}_i(0^-, t) + \vec{B}_r(0^-, t) = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_z$

Or $\vec{B}_i(0^-, t) = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t)) \vec{e}_y$ et $\vec{B}_r(0^-, t) = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t)) \vec{e}_y$ d'où $2 \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t)) \vec{e}_y = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_z$

\vec{j}_s est le courant sur l'interface, donc pas de composante suivant \vec{e}_z

Le produit vectoriel par \vec{e}_z donne une composante sur \vec{e}_y , donc pas de composante sur \vec{e}_y :

\vec{j}_s ne peut avoir qu'une composante sur \vec{e}_x :

$$2 \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t)) \vec{e}_y = -\mu_0 (\vec{j}_s)_x \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z \quad \text{soit avec} \quad -\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_y \quad \mu_0 (\vec{j}_s)_x = 2 \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t))$$

$$\vec{j}_s = \frac{2 E_0}{\mu_0 c} \exp(i\omega t) \vec{e}_x \quad \boxed{\vec{j}_s = 2 \frac{E_0}{c \mu_0} \cos(\omega t) \vec{e}_x}$$

b. $\vec{E}(z, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kz) \vec{e}_x$ et $\vec{B}(z, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kz) \vec{e}_y$

$$w(z, t) = u_{em}(M, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(M, t) + \frac{1}{2} \frac{B^2(M, t)}{\mu_0}$$

$$w(z, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 4 E_0^2 \sin^2(\omega t) \sin^2(kz) + \frac{1}{2} 4 E_0^2 \frac{\cos^2(\omega t) \cos^2(kz)}{\mu_0 c^2} \quad \text{avec } \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

$$w(z, t) = 2 \epsilon_0 E_0^2 [\sin^2(\omega t) \sin^2(kz) + \cos^2(\omega t) \cos^2(kz)]$$

$$\langle w(z) \rangle = E_0^2 \epsilon_0 (\sin^2(kz) + \cos^2(kz))$$

$\langle w(z) \rangle = \epsilon_0 E_0^2$, indépendante de z ;

Vecteur de Poynting de l'onde résultante : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ avec $\vec{E}(z, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kz) \vec{e}_x$

$$\vec{B}(z, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kz) \vec{e}_y$$

$$\vec{\Pi}(x, t) = 4 \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin(\omega t) \sin(kz) \cos(\omega t) \cos(kz) \vec{e}_z$$

Avec $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

$$\vec{\Pi}(x, t) = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin(2\omega t) \sin(2kz) \vec{e}_z$$

Valeur moyenne : $\langle \vec{\Pi}(z, t) \rangle = \vec{0}$, indépendant de z .

■ Cavité

Exercice 21. Etude d'une cavité résonante (écrit banque PT 2020)

1) Equation de propagation

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E}$$

Avec **(MG)** dans le vide : $\text{div}(\vec{E}) = 0$ soit $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = -\Delta \vec{E}$

Avec **(MF)** : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ soit $\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\Delta \vec{E}$ ou $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \Delta \vec{E} = \frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B})}{\partial t}$

Or selon **(MA)** dans le vide : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ d'où $\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Finalement $\boxed{\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$ avec $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

2) Forme $g(x)f(t)$ avec découplage des variables d'espace et de temps : **onde stationnaire** ; direction unique : **polarisation rectiligne selon y**, ne dépendant que de x et pas de y et z : **onde plane** ; une seule fréquence avec une fonction sinusoïdale : onde **monochromatique ou harmonique**.

3) $\vec{E} = \vec{0}$ dans un conducteur parfait (épaisseur de peau supposée nulle). La conductivité étant supposée infinie et $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ fini (nul) impliquent $\vec{E} = \vec{0}$.

4) On a $\vec{E}(x, t) = g(x) \cos(2\pi f t) \vec{u}_y$ selon \vec{u}_y donc tangent aux interfaces conducteur / vide ; il y a donc continuité de ce champ au niveau de ces interfaces, soit en $x = 0$ et $x = L$, avec $\vec{E} = \vec{0}$ dans le conducteur, d'où :

$$\forall t, \vec{E}(x = 0^+, t) = \vec{E}(x = L^-, t) = \vec{0}; \quad \text{Soit} \quad \forall t, g(x = 0) = g(x = L) = 0$$

5) Equation de propagation : $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ (1) or avec $\vec{E} = E_y(x, t) \vec{u}_y = g(x) \cos(2\pi f t) \vec{u}_y$,

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \vec{u}_y = \cos(2\pi f t) \frac{d^2 g(x)}{dx^2} \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -g(x) (2\pi f)^2 \cos(2\pi f t) \vec{u}_y$$

Dans (1) avec projection sur \vec{u}_y : $\forall t, \cos(2\pi f t) \frac{d^2 g(x)}{dx^2} + \frac{1}{c^2} g(x) (2\pi f)^2 \cos(2\pi f t) = 0$

Soit $\boxed{\frac{d^2 g(x)}{dx^2} + \left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 g(x) = 0}$

D'où $\boxed{g(x) = A \cos\left(\frac{2\pi f}{c} x\right) + B \sin\left(\frac{2\pi f}{c} x\right)}$

6) Conditions aux limites : $g(0) = 0 = A$, d'où $g(x) = B \sin\left(\frac{2\pi f}{c} x\right)$

$$g(L) = 0 = B \sin\left(\frac{2\pi f L}{c}\right) \text{ avec } B \neq 0 \text{ soit } \sin\left(\frac{2\pi f L}{c}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2\pi f L}{c} = 0[\pi] = n\pi \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$$\boxed{f_n = n \frac{c}{2L}, n \in \mathbb{N}^*} \quad \lambda_n = \frac{c}{f_n} \Rightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}, n \in \mathbb{N}^*}$$

Un champ électromagnétique harmonique ne peut exister dans la cavité que pour certaines fréquences et longueurs d'onde : modes propres.

Exercice 22. Cavité résonante - bis   **2** |  **2**

a. Comme après toute réflexion d'une OPPH, superposition de deux ondes progressives dans les sens opposés conduisant à une **onde stationnaire** (cf. cours), du type $\boxed{\vec{E} = E_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kz + \psi) \vec{e}_x}$

b. C.L. : $\forall t, \vec{E} = \vec{0}$ en $z = 0$ soit $\psi = \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $\boxed{\vec{E} = E_0 \cos(\omega t + \varphi) \sin(kz) \vec{e}_x}$

C.L. : $\forall t, \vec{E} = \vec{0}$ en $z = a$; soit $\sin(ka) = 0$ soit $ka = 0[\pi]$ $\boxed{k_n a = n\pi}$ $n \in \mathbb{N}$;

$$\vec{E} = 2 E_0 \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi c t}{a}\right) \vec{e}_x \text{ avec } n \in \mathbb{N} : \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2a}{n} \quad \boxed{a = \frac{n\lambda_n}{2}} ; \quad \boxed{f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2a}}$$

c. **mode n : n ventres, (n + 1) nœuds.**

d. si a est grand, f_1 est faible, son plus grave dans un tuyau long.

Exercice 23. Réflexion sous incidence normale  **2** |  **2**

Après une réflexion le pourcentage de l'énergie réfléchi est R .

Notons N le nombre d'allers-retours associé à l'atténuation cherchée :

$$R^{2N} I_0 = I_0 / 100 \text{ et donc } N = -\frac{1}{2} \frac{\ln(100)}{\ln(R)} = 4,6 \cdot 10^4.$$

La durée d'un aller-retour est $\Delta t_{1AR} = 2a/c$

La durée nécessaire pour que l'onde n'ait plus que 1% de son énergie initiale est donc $\Delta t = N \Delta t_{1AR} = 2Na/c = 18 \mu s$.

Un miroir est recouvert d'un métal d'argent poli (possédant un bon coefficient de réflexion dans le visible) et recouvert un verre protecteur transparent.

Exercice 24. Guide d'onde (Oral banque PT)



1) En développant les exponentielles complexes :

$$\vec{E} = [Ae^{i(\omega t - k_1 x + k_2 y)} + Be^{i(\omega t - k_1 x - k_2 y)}] \vec{e}_z$$

Superposition de 2 OPPH de vecteurs d'onde respectifs $\vec{k}_+ = k_1 \vec{e}_x + k_2 \vec{e}_y$ et $\vec{k}_- = k_1 \vec{e}_x - k_2 \vec{e}_y$

2) Les champs sont nuls dans un conducteur parfait. Considérons le plan $y = 0$, de normale au plan le vecteur \vec{e}_y . Le champ est polarisé selon \vec{e}_z : il est donc continu à l'interface. Ainsi,

$$\forall x, \forall t, \vec{E}(y = 0) = \vec{0} = [Ae^{i(\omega t - k_1 x)} + Be^{i(\omega t - k_1 x)}] \vec{e}_z$$

Soit

$$A + B = 0 \quad A = -B$$

De même, la condition limite en $y = a$ donne :

$$\forall x, \forall t, \vec{E}(y = a) = \vec{0} = A[e^{i(\omega t - k_1 x + k_2 a)} - e^{i(\omega t - k_1 x - k_2 a)}] \vec{e}_z$$

Soit

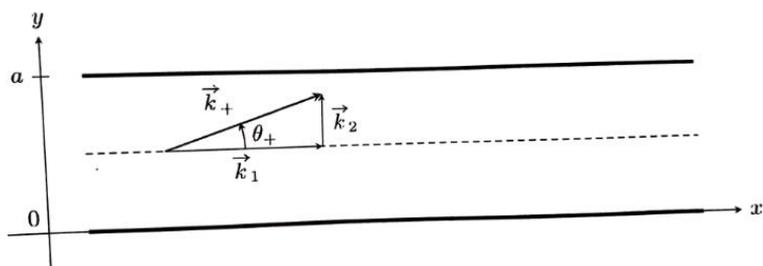
$$e^{i(+k_2 a)} - e^{-ik_2 a} = 0 = 2i \sin(k_2 a)$$

$$k_2 a = 0[\pi] = n\pi \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{k_2 = \frac{n\pi}{a}} \quad n \in \mathbb{N}$$

3) Raisonnons sur la figure ci-contre

Fig. : Vecteur d'onde dans un guide d'onde Seul le vecteur d'onde \vec{k}_+ de l'une des OPPH est représenté, le second étant symétrique par rapport à l'axe du guide d'onde (en pointillés) (Schéma E. Thibierge)



L'inclinaison de l'onde est repérée sur le schéma par l'angle θ_+ entre l'axe du guide et le vecteur $\vec{k}_+ = k_1 \vec{e}_x + k_2 \vec{e}_y$. Cf. Schéma :

$$\sin(\theta_+) = \frac{k_2}{k_+} = \frac{n\pi}{ak_+} \quad n \in \mathbb{N}$$

De plus, relation de dispersion pour les OPPH : $k_+ = \frac{\omega}{c}$, soit $\sin(\theta_+) = \frac{k_2}{k_+} = \frac{n\pi c}{a\omega} = \frac{2\pi n c}{2a\omega}$

$$\frac{2\pi c}{\omega} = cT = \lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin(\theta_+) = \frac{n\lambda}{2a}}$$

On obtient de même pour la seconde onde $\boxed{\sin(\theta_-) = -\frac{n\lambda}{2a}}$

$$4) \sin(\theta_+) = \frac{n\lambda}{2a} < 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda < \frac{2a}{n}}$$

Or $n \geq 1 \Rightarrow \lambda < \lambda_{max} = 2a$: seules les ondes de longueur d'onde $\lambda < \lambda_{max} = 2a$ peuvent se propager dans le guide d'onde.

5) Avec $A = -B$, $\vec{E} = A[e^{ik_2 y} - e^{-ik_2 y}]e^{i(\omega t - k_1 x)} \vec{e}_z = 2iA \sin(k_2 y) e^{i(\omega t - k_1 x)} \vec{e}_z$: onde progressive dans la direction x de l'axe du guide d'onde et stationnaire dans la direction y perpendiculaire à cet axe.

EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 25. Direction de polarisation et direction de propagation pour une OPPM | | 2

| | polarisation | propagation | plans d'onde | $\vec{B} = \frac{\vec{e}_k \wedge \vec{E}}{c}$ |
|----|---|---|-----------------------|---|
| f. | x | $\vec{e}_k = \frac{\vec{e}_y + \sqrt{3}\vec{e}_z}{2}$ | $y + \sqrt{3}z = cte$ | $\vec{B} = +B_0 \cos(\dots) \frac{-\vec{e}_z + \sqrt{3}\vec{e}_y}{2}$ où $B_0 = E_0/c$ |
| g. | $\vec{e}_{pol} = \frac{\sqrt{3}\vec{e}_y + \vec{e}_z}{2}$ | $+x$ | $x = cte$ | $\vec{B} = +B_0 \cos(\omega t - kx) \frac{\sqrt{3}\vec{e}_z - \vec{e}_y}{2}$ où $B_0 = E_0/c$ |

Exercice 26. Puissance rayonnée par le soleil

Le flux solaire reçu sur Terre s'exprime en kW.m^{-2} , il correspond à la puissance surfacique reçue au niveau de la Terre, et la puissance émise par le Soleil est donc $\mathcal{P} = S\varphi$, or en considérant que le Soleil émet une onde sphérique, la sphère passant par la Terre a un rayon $r = d_{ST}$ et une surface $S = 4\pi d_{ST}^2$, où d_{ST} correspond à la distance entre la Terre et le Soleil, soit à $d_{ST} = c\Delta t_{ST}$ où Δt_{ST} est le temps mis par la lumière pour faire le trajet entre le soleil et la terre et c la célérité de la lumière dans le vide

$$\mathcal{P} = 4\pi d_{ST}^2 \varphi = 3,6.10^{26} \text{ W};$$

Exercice 27. Champ électrique induit par un solénoïde infini 2 | 3

c. $\vec{B}_{int} = \mu_0 n i(t) \vec{e}_z$ (si i est dans le sens trigo) ; $\vec{B}_{ext} = \vec{0}$;

b. il est à l'origine d'un champ électrique \vec{E} : équation de Maxwell-Faraday : $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$;

d. Intérieur : $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 n \frac{\partial i(t)}{\partial t} \vec{e}_z = \mu_0 n I_m \omega \sin(\omega t) \vec{e}_z = \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} \right)_{\theta,z} - \left(\frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right)_{z,r} \right] \vec{e}_z$

or $\vec{E} = E_\theta(r, t) \vec{e}_\theta$

soit $\mu_0 n I_m \omega \sin(\omega t) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} \right)_{\theta,z} - \left(\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} \right)_{\theta,z} = \mu_0 n I_m \omega r \sin(\omega t)$ d'où $rE_\theta = \frac{1}{2} \mu_0 n I_m \omega r^2 \sin(\omega t) + f(t)$

Comme on intègre une dérivée partielle pour laquelle certaines variables (ici t) sont fixées, alors la constante d'intégration est une « constante partielle », c'est-à-dire une fonction des variables fixées. On montre que la fonction f est nulle en se plaçant en $r = 0$: comme il n'y a « rien de particulier » en ce point, la composante E_θ y prend une valeur finie. Finalement,

$$\vec{E} = \mu_0 \frac{n r}{2} I_m \omega \sin(\omega t) \vec{e}_\theta$$

d) $\oint_{(r)} \vec{E} \cdot d\vec{M} = \iint_{(S)} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S}$ avec $\oint_{(r)} \vec{E} \cdot d\vec{M} = 2\pi r E_\theta(r, t)$ et

$$\iint_{(S)} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \mu_0 n I_m \omega \sin(\omega t) \vec{e}_z \cdot d\vec{S} = \mu_0 n I_m \omega \sin(\omega t) S = \mu_0 n I_m \omega \sin(\omega t) \pi r^2 =$$

$$\oint_{(r)} \vec{E} \cdot d\vec{M} = 2\pi r E_\theta(r, t)$$

On retrouve $\vec{E} = \mu_0 \frac{n r}{2} I_m \omega \sin(\omega t) \vec{e}_\theta$

Exercice 28. Aspect énergétique de la charge d'un condensateur 2 | 2 ou 3

a) $W = u_e V = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_z^2 V = \frac{1}{2} \epsilon_0 \pi a^2 e E_z^2$; b) $\frac{dW}{dt} = \epsilon_0 \pi a^2 e E_z \frac{dE_z}{dt}$; c) Maxwell-Ampère dans le vide :

$$\text{rot } (\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{dE_z}{dt} \vec{e}_z \quad \text{avec } \vec{B}(M, t) = B_\theta(r, t) \vec{e}_\theta, \quad \text{soit } \text{rot } (\vec{B}) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial \theta} \right)_{z,r} \vec{e}_z = \mu_0 \epsilon_0 \frac{dE_z}{dt} \vec{e}_z$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial \theta} \right)_{z,r} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{dE_z}{dt} \quad \text{d'où } \left(\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} \right)_{z,r} = \mu_0 \epsilon_0 r \frac{dE_z}{dt} \quad \text{soit en intégrant par rapport à } r$$

$$rB_\theta = \frac{1}{2} \mu_0 \epsilon_0 r^2 \frac{dE_z}{dt} + K \quad \text{et } B_\theta = \frac{1}{2} \mu_0 \epsilon_0 r \frac{dE_z}{dt} + \frac{K}{r}$$

En $r = 0, B_\theta \neq \infty$, d'où $K = 0$: $B_\theta = \frac{1}{2} \mu_0 \epsilon_0 r \frac{dE_z}{dt}$ et $\vec{B}(a, t) = \frac{1}{2} \mu_0 \epsilon_0 a \frac{dE_z}{dt} \vec{e}_\theta$;

$$\vec{\Pi}(a) = \frac{\vec{E}(a) \wedge \vec{B}(a)}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} (E_z(t) \vec{e}_z \wedge \frac{1}{2} \mu_0 \epsilon_0 a \frac{dE_z}{dt} \vec{e}_\theta) = \frac{1}{2} \epsilon_0 a E_z \frac{dE_z}{dt} (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta) = -\frac{1}{2} \epsilon_0 a E_z \frac{dE_z}{dt} \vec{e}_r ;$$

$$d) \Phi_{\text{sortant}} = \mathcal{P}_{em, \text{sortant}} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} = -\epsilon_0 \pi a^2 e E_z \frac{dE_z}{dt} ; -\mathcal{P}_{em, \text{sortant}} = \mathcal{P}_{em, \text{reçue}} = \frac{dW}{dt} ;$$

$-\mathcal{P}_{em, \text{sortant}}$ est la puissance reçue par le condensateur, donc $dW = -\mathcal{P}_{em, \text{sortant}} dt$.

Exercice 29. OemPPH de direction quelconque

f. $f = \frac{c}{\lambda} = 5 \cdot 10^{14}$ Hz ; onde lumineuse dans le domaine visible ($\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ m = 600 nm).

Pour une onde de la forme $f(M, t) = f_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$ on a $f(M, t) = f_m \cos(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z) + \varphi)$

$$\vec{k} = \frac{K}{3} (2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + \vec{e}_z) \text{ avec } k = \frac{2\pi}{\lambda} = 10,5 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}, \text{ et } k = \frac{K}{3} \sqrt{4 + 9 + 1} \text{ soit } K = 8,4 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$$

g. Plan d'onde = plan équi-phase : équation $2x + 3y + z = cte$

h. Equation de Maxwell Gaus dans le vide : $\text{div } \vec{E} = 0 = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + 0$, soit $\frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{\partial E_y}{\partial y}$ ce qui donne tous calculs faits : $E_y = -E_x$.

i. OPP : on peut utiliser la relation de structure :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\frac{K}{3}(2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + \vec{e}_z) \wedge (E_x \vec{e}_x - E_x \vec{e}_y)}{\omega} = \frac{KE_x}{3\omega} (\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z) = \frac{k\sqrt{14}E_x}{\omega} (\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z) = \frac{\sqrt{14}E_x}{c} (\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)$$

j. $u_{em}(M, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(M, t) + \frac{1}{2} \frac{B^2(M, t)}{\mu_0}$ avec $E = Bc$ et $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, on en déduit $u_{em} = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$ soit

$\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$: uniformément répartie dans l'espace

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_k = \epsilon_0 c E^2 \vec{u}_k \text{ soit } \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \langle \epsilon_0 c E^2 \rangle = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}$$

$\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle$ est uniforme (indépendant du point de l'espace considéré).

Exercice 30. Bilan de puissance d'un conducteur

2) Conductivité électrique γ en $S \cdot m^{-1}$ (métaux : $\gamma \approx 10^6 - 10^7 S \cdot m^{-1}$, solutions électrolytiques (comme l'eau de mer) : $\gamma \approx 1$ à $100 \text{ mS} \cdot \text{cm}^{-1} = 0,1$ à $10 S \cdot m^{-1}$).

3) Intensité traversant le métal :

$$I \stackrel{\text{définition}}{=} \iint_j \vec{j} \cdot \vec{dS} \stackrel{\text{loi d'Ohm locale}}{=} \iint \gamma \vec{E} \cdot \vec{dS} \stackrel{\vec{E} \text{ uniforme section droite}}{=} \gamma E S = \gamma E \pi R^2 = I$$

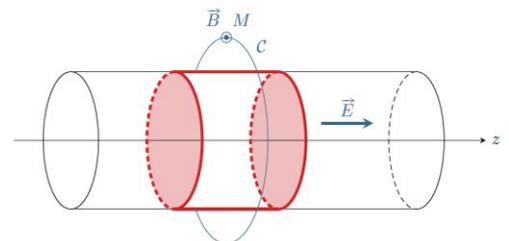
Calcul du **champ magnétique** créé par I : cf. EM3, application du théorème d'Ampère $\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$ (choix des coordonnées : cylindriques, symétries et invariances : $\vec{B} = B_\theta(r) \vec{e}_\theta$, choix d'un contour d'Ampère : cercle de rayon r et d'axe (Oz), passant par le point M étudié, orienté dans le sens trigonométrique, calcul de la circulation de \vec{B} sur le contour d'Ampère : $\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = 2\pi r B$ et expression de $I_{\text{enlacé}}$ avec disjonction des cas :

$$r \geq R : I_{\text{enlacé}} = I = \pi R^2 \gamma E$$

$$r \leq R : I_{\text{enlacé}} = \pi r^2 j = \pi r^2 \gamma E$$

Finalement,

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 \pi R^2 \gamma E}{2\pi r} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 R^2 \gamma E}{2r} \vec{e}_\theta & r \geq R \\ \frac{\mu_0 \pi R r^2 \gamma E}{2\pi r} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 r \gamma E}{2} \vec{e}_\theta & r \leq R \end{cases}$$



4) Puissance volumique dissipée par effet Joule : $p_{\text{Joule},v} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$

Puissance totale dissipée par effet Joule dans le volume du tronçon : $\mathcal{P}_{\text{Joule}} = p_{\text{Joule},v} V = \gamma E^2 \pi R^2 \ell$

- 5) Vecteur de Poynting : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$, correspondant à la densité de flux de puissance électromagnétique rayonnée vers l'extérieur ; avec $\vec{E} = E\vec{e}_z$ et $\vec{B} = B\vec{e}_\theta$, $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta = -\frac{EB}{\mu_0} \vec{e}_r = -\frac{E}{\mu_0} \frac{\mu_0 r \gamma E}{2} \vec{e}_r = -\frac{r \gamma E^2}{2} \vec{e}_r$.

Puissance rayonnée au travers des parois du tronçon de cylindre : flux sortant du vecteur de Poynting en $r = R$. Sur les surfaces verticales du cylindre (cf. en couleur sur schéma), le flux est nul ; on a donc :

$$\mathcal{P}_{ray} = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{lat}} \vec{\Pi} \cdot dS\vec{e}_r = -\frac{R\gamma E^2}{2} \times 2\pi R\ell$$

Soit $\boxed{\mathcal{P}_{ray} = -\pi\gamma R^2 E^2 \ell}$

Puissance rayonnée négative : l'énergie ne sort pas mais entre dans le cylindre au travers des parois

- 6) Egalité des deux termes en valeur absolue : $\boxed{\mathcal{P}_{ray} + \mathcal{P}_{Joule} = 0}$: toute la puissance dissipée par effet Joule dans le cylindre y entre par rayonnement (cohérent en l'absence d'autre source de puissance dans le tronçon de cylindre étudié). Ce résultat est par ailleurs cohérent avec l'équation intégrale de Poynting :

$$\frac{d\mathcal{E}_{em}}{dt} = -\iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} - \mathcal{P}_{Joule} = 0$$

avec en régime stationnaire l'énergie électromagnétique contenue dans le système qui est constante.

Exercice 31. Champ du vide ? 2 | 2

- 1) M.G. dans le vide : $\text{div}(\vec{E}) = 0$.

Ici, $\text{div}(\vec{E}) = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)_{z,x} + \left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)_{x,y} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)_{y,z} = -\frac{1}{\delta} E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right) \neq 0$: incompatible avec M.G., un tel champ ne peut exister dans le vide.

- 2) $\text{div}(\vec{E}) = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)_{z,x} + \left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)_{x,y} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)_{z,x} = -\frac{1}{\delta} E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right) + \left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)_{z,x} = 0$

soit $\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)_{z,x} = \frac{1}{\delta} E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right)$ d'où $E_y(x, y, t) = -E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \sin\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right) + K$, avec K valeur moyenne temporelle de E_y , soit également de E , d'où $K = 0$.

- 3) $\vec{E} = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y$

$$\vec{E} = E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right) \vec{u}_x - E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \sin\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right) \vec{u}_y = E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \left(\cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right) \vec{u}_x - \sin\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right) \vec{u}_y\right)$$

Champ magnétique associé déterminer à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday : $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\text{Avec } \text{rot} \vec{E} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{y,z} \\ \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{z,x} \\ \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{x,y} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x(x, y, t) \\ E_y(x, y, t) \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} + \vec{0} + \left[\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)_{y,z} - \left(\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)_{z,x} \right] \vec{e}_z = \vec{0}$$

On a donc $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ soit $\vec{B} = \vec{K}' = \vec{0}$ (valeur moyenne nulle)

- 4) Equation de Maxwell-Ampère : $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \vec{0}$ (cf. $\vec{B} = \vec{K}' = \vec{0}$)

soit $\vec{j} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \omega E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \sin\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right) \vec{e}_y$: cette région vide de charge n'est pas vide de courant.

- 5) Densité volumique d'énergie : $u_{em}(M, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(M, t) + \frac{1}{2} \frac{B^2(M, t)}{\mu_0}$ avec $E = Bc$ et $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, soit $u_{em} = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$

avec $E^2 = \|\vec{E}\|^2 = E_0^2 \exp\left(-2\frac{x}{\delta}\right) \left(\cos^2\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right) + \sin^2\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right)\right) = E_0^2 \exp\left(-2\frac{x}{\delta}\right)$

soit $u_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \exp\left(-2\frac{x}{\delta}\right)$: la densité d'énergie dépend de la zone de l'espace considérée, et tend vers zéro quand x augmente

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \vec{0} \quad \text{puisque } \vec{B} = \vec{0} \quad \text{pas de transport d'énergie}$$