# TD CHAPITRE EM.5 : PROPAGATION D'ONDES ELECTROMAGNETIQUES

## CONSEILS A SUIVRE ; ERREURS A EVITER

1. Un courant variable peut être source de champ électrique (courant variable → champ magnétique variable → champ électrique), et dans ce cas, ce sont les symétries et invariances de la distribution de courant qui donneront direction et variable utile du champ électrique.
2. De façon analogue, un champ magnétique peut être créé par une distribution de charge variable dans le temps.
3. Il faut savoir que le flux du vecteur de Poynting à travers une surface $S$ représente la puissance électromagnétique, et connaitre sa dimension ; attention ! e flux à travers une surface fermée correspond à la puissance sortant du volume ainsi défini !
4. Il faut connaître la structure d'une onde plane, savoir que $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$ est un trièdre direct et que $E = Bc$, ce qui permet de retrouver la relation de structure.
5. NE PAS CONFONDRE direction de PROPAGATION ($\vec{k}$) et direction de POLARISATION ($\vec{E}$).
6. Le vecteur de Poynting est nécessairement de même direction et de même sens que $\vec{k}$.
7. Vous devez savoir RETROUVER l'expression de la densité volumique moyenne d'énergie pour une OPPM en fonction de l'amplitude du champ électrique.
8. Il faut maitriser les ondes mécaniques et tout particulièrement l'étude de la corde de Melde !
9. L'onde résultante après réflexion sur un conducteur parfait est une onde stationnaire, l'énergie ne se propage pas.
10. Attention !! la relation de structure est valable pour des ondes planes progressives, mais pas pour des ondes stationnaires ! il faut donc en cas de besoin l'utiliser pour chacune des composantes du champ électrique (incidente et réfléchie), et ensuite seulement utiliser le principe de superposition pour accéder au champ magnétique.

## APPLICATIONS DE COURS

**Exercice 1. Equation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide** IMPORTANT | 1 | 2

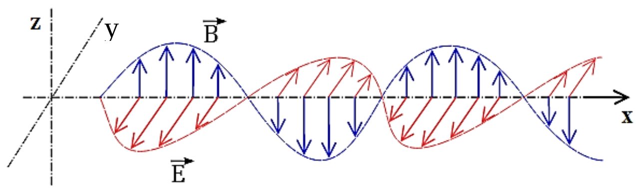
Rappeler l'expression des équations de Maxwell dans le vide. Etablir l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide et définir la célérité $c$ de ces ondes.

**Donnée :** Formule du double rotationnel : $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,(\vec{a})\right) = \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,(\mathbf{div}\,(\vec{a})) - \vec{\Delta}\vec{a}$

---

**Exercice 2. Structure des ondes planes progressives électromagnétiques** IMPORTANT | 1 | 1

1) On donne l'allure du champ électromagnétique d'une onde plane progressive monochromatique. Le champ électrique est contenu dans un plan horizontal tandis que le champ magnétique est dans le plan vertical. Trouver le sens de propagation de l'onde.




2) Le champ électrique d'une onde électromagnétique plane est donné par : $\vec{E} = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)\, \vec{e}_z$.

Donner l'expression du champ magnétique associé à cette onde.

---

**Exercice 3.** **Relation de dispersion** IMPORTANT | 1 | 1 ou 2

Considérons une OPPH de la forme $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)\ \vec{e}_y$. Etablir la relation entre $\omega$ et $k$, dite relation de dispersion.

---

**Exercice 4.** **OemPPH et notation complexe** 1 | 2 ou 3

Considérons une onde électromagnétique plane se propageant dans le vide dans la direction et le sens d'un vecteur $\vec{u}_k$ quelconque. On note dans le cas général, avec $\vec{k} = k\vec{u}$, et les 6 constantes $E_{0i}$ et $\varphi_i$ telles que $\vec{E}$ est perpendiculaire à $\vec{u}_k$ et $\vec{k}$ :

$$\vec{E} = \left| \begin{array}{l} E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \varphi_x) \\ E_{0y} \cos(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \varphi_y) \\ E_{0z} \cos(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \varphi_z) \end{array} \right.$$

**a.** Donner l'expression du champ électrique complexe associé $\underline{\vec{E}}$, en faisant apparaître l'amplitude complexe $\underline{\vec{E_0}}$ à expliciter.

**b.** On se place dans le cas où $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp \mathrm{i}(\omega t - kx)\overrightarrow{e_y}$. Etablir la relation de dispersion à partir des champs complexes

**c.** Donner l'expression des équations de Maxwell dans le vide en représentation complexe.

**d.** En déduire la relation de structure entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

---

**Exercice 5.** **OemPPM polarisée** IMPORTANT | 1 | 2 ou 3

**1)** On considère une onde plane progressive monochromatique se propageant suivant l'axe $Oz$ et polarisée suivant $Ox$. Représenter pour cette onde les vecteurs $\vec{k}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{\Pi}$.

**2)** Identifier les directions de propagation et de polarisation des champs électriques ci-dessous, ainsi que l'équation du plan d'onde pour la question a) seulement. Exprimer le champ magnétique associé.

**a.** $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)\ \vec{e}_y$

**c.** $\vec{E} = -E_0 \cos(\omega t + kx + \varphi)\ \vec{e}_z$

**b.** $\underline{\vec{E}} = E_0\, e^{i(\omega t - kz)} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}\ \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_y \right)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| **d.** | $E_x = 0$ | $E_y = A\cos(\omega t - kx)$ | $E_z = A\cos(\omega t - kx)$ |
| **e.** | $E_x = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{k}{\sqrt{2}}(y+z)\right)$ | $E_y = 0$ | $E_z = 0$ |

---

**Exercice 6.** **Énergie transportée par une onde plane** IMPORTANT | 1 | 1

On considère une onde électromagnétique plane se propageant dans le vide dans la direction $\vec{u}$.

**a.** Rappeler les relations liant les vecteurs $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{u}$.

**b.** À l'aide de la densité volumique d'énergie, montrer que l'énergie électromagnétique est également répartie sous les formes électrique et magnétique.

**c.** Rappeler la définition du vecteur de Poynting. Que représente le flux de ce vecteur à travers la surface $(S)$ délimitant un volume $\mathcal{V}$ ?

**d.** Exprimer le vecteur de Poynting dans le cas de l'onde plane précédente en fonction du champ électrique.

---

### Exercice 7. Caractéristiques ondulatoires des ondes émise par des lasers IMPORTANT | 1 | 1

1) Un laser hélium-néon (He-Ne) émet un faisceau lumineux cylindrique de rayon $r = 1{,}0\ mm$ d'une onde plane monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 632{,}8\ nm$. La puissance moyenne émise est $P = 1{,}0\ mW$.

*On donne :* $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ H.m^{-1}$.

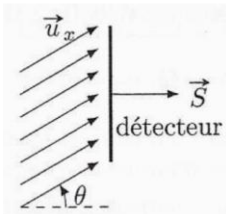
Calculer les amplitudes $E_{max}$ et $B_{max}$ des champs électrique et magnétique.

2) Le **Laser Mégajoule** (LMJ) sert à étudier, à toute petite échelle, le comportement des matériaux dans des conditions extrêmes similaires à celles atteintes lors du fonctionnement nucléaire des armes (http://www-lmj.cea.fr/). Le LMJ est dimensionné pour délivrer sur une cible de quelques millimètres, en quelques milliardièmes de seconde, une énergie lumineuse supérieure à un million de joules. Il a été mis en service fin 2014, avec une première campagne de physique des armes. Évaluer la puissance et la puissance surfacique d'un tel instrument s'il délivre une énergie de $1{,}2\ MJ$ par impulsions de durée de l'ordre de la nanoseconde en étant focalisé sur une aire de l'ordre du $\mathrm{mm}^2$. Déterminer l'amplitude $E_0$ du champ électrique associé.

---

### Exercice 8. Un problème d'orientation IMPORTANT | 2 | 2

On souhaite déterminer la puissance lumineuse d'un faisceau laser collimaté, se propageant dans la direction de vecteur unitaire $\overrightarrow{u_x}$, polarisé rectilignement dans la direction $\overrightarrow{u_z}$ et de longueur d'onde $\lambda = 630$ nm. On dispose pour cela d'un détecteur optique dont la surface utile $(S)$ a une aire $S = 2{,}0$ mm², placé sur le trajet du faisceau laser comme indiqué sur le schéma. Ce détecteur délivre un signal électrique $s$ proportionnel à la puissance moyenne rayonnée à travers la surface $(S)$ : $s = K\langle\mathcal{P}_{ray}\rangle$.




L'air sera assimilé au vide et le faisceau laser à une onde plane. La perméabilité magnétique du vide est $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m$^{-1}$, la célérité de la lumière dans le vide est $c = 3{,}0.10^8$ m.s$^{-1}$.

1) Donner l'expression du champ électrique de cette OemPPH puis celle du champ magnétique associé. On notera $E_0$ l'amplitude du champ électrique.
2) Déterminer les valeurs instantanées puis moyennes du vecteur de Poynting et de la densité volumique d'énergie électromagnétique.
3) Déterminer l'expression de $s$ en fonction des données de l'exercice.
4) Comment orienter le détecteur pour optimiser la mesure ?
5) Le coefficient $K$ est $K = 1{,}0.10^3$ V.W$^{-1}$ et la valeur maximale de la tension mesurée est $s = 2{,}0$ V. En déduire la puissance moyenne du laser puis l'amplitude du champ électrique correspondant.

## ■ Exercices

### ■ Ondes planes progressives

### Exercice 9. Structure de l'onde plane IMPORTANT | 1 | 1

Les composantes du champ électrique d'une onde électromagnétique plane sont données par :

$$E_x = E_y = 0 \text{ et } E_z = E_0 \sin(ky + \omega t)$$

Donner l'expression de $\vec{B}$.

---

### Exercice 10. Longueurs d'onde de quelques ondes radios IMPORTANT | 1 | 1

Déterminer la longueur d'onde $\lambda$, le nombre d'onde $\sigma$ (en $cm^{-1}$) et la norme du vecteur d'onde $k$ pour :

1) Une station grande onde de $\lambda$ fréquence $\nu = 250$ kHz
2) Une station FM de fréquence $\nu = 100$ MHz
3) Un téléphone portable de fréquence $\nu = 1{,}8$ GHz

---

**Exercice 11. Caractéristiques d'une onde** IMPORTANT | 1 | 1 ou 2

Dans le vide, on considère une onde plane, progressive, monochromatique représentée en notation complexe par : $\underline{\vec{E}} = E_0\, e^{j(\omega t - kz)}\, \vec{e}_x$. Sa fréquence est 20 $MHz$. On donne $E_0 = 10\ V.m^{-1}$. On demande :

**a.** Les expressions en notation réelle du champ électrique $\vec{E}$ et du champ magnétique associé $\vec{B}$.

**b.** Les caractéristiques de cette onde (toutes ne demandent pas un calcul) : amplitudes de $\vec{E}$ et $\vec{B}$, vecteur d'onde, longueur d'onde.

---

**Exercice 12. Direction de polarisation et direction de propagation pour une OPPM** IMPORTANT | 1 | 2

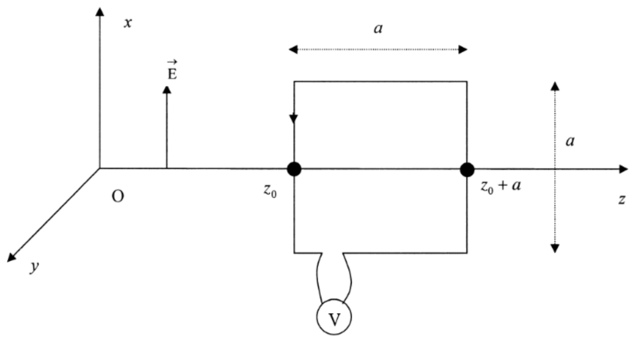
On donne ci-dessous le champ électrique d'une onde électromagnétique dans différents cas.
Préciser dans chaque cas : la direction de polarisation, la direction de propagation et l'expression du champ magnétique correspondant.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** | $E_x = E_0 \cos(\omega t - kz)$ | $E_y = 0$ | $E_z = 0$ |
| **b.** | $E_x = E_0 \cos(\omega t + kz)$ | $E_y = 0$ | $E_z = 0$ |
| **c.** | $E_x = 0$ | $E_y = 0$ | $E_z = E_0 \cos(\omega t - kx)$ |

---

**Exercice 13. Antenne cadre (Oral banque PT)** 2 | 1

Une antenne cadre est un type d'antenne souple, robuste et bon marché pouvant être utilisée pour de nombreux usages : communication amateur à courte distance, sondes industrielles, radiologie médicale, etc. C'est l'une des premières structures d'antennes, dont l'usage remonte à Hertz, qui les a utilisées lors de ses expériences pionnières sur la propagation des ondes électromagnétiques. Il s'agit d'une simple boucle, presque fermée sur un voltmètre. On la suppose ici rectangulaire, destinée à recevoir une onde radio amateur de fréquence 27 MHz.




Déterminer l'amplitude du champ électrique de l'onde incidente en fonction de la tension efficace lue sur le voltmètre.

## Energie électromagnétique, puissance et vecteur de Poynting

**Exercice 14. Quelques ordres de grandeurs** IMPORTANT | 2 | 1

3) Un **laser hélium-néon** (laser rouge classique) émet un faisceau de diamètre 1 mm pour une puissance de 1 mW. Retrouver la norme du vecteur de Poynting correspondant.

4) Un **téléphone portable** (1 GHz) émet une puissance de 1 W de façon sensiblement uniforme dans l'espace. Calculer la puissance rayonnée par unité de surface à 10 cm.

**Exercice 15. Laser (Oral ATS, 14 fois, 2022)** IMPORTANT | 1 ou 2 | 2

Soit un laser qui produit une onde plane de section transversale $S = 1\ mm^2$, de puissance $P = 10\ W$ et tel que $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k x)\, \vec{e_z}$.

1. Déterminer la direction et le sens de propagation de l'onde, ainsi que sa polarisation.
2. Donner l'expression du vecteur d'onde en fonction de la pulsation spatiale puis en fonction de la pulsation temporelle.
3. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ crée par l'onde.
4. Déterminer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ associé à l'onde.
5. Retrouver les amplitudes $E_0$ et $B_0$ des champs électriques et magnétiques $\vec{B}$ et $\vec{E}$.
6. Question supplémentaire : donner les 4 équations de Maxwell dans le vide dans une zone dans charge ni courants puis retrouver l'expression de l'équation de propagation des champs.
7. Question bonus : sens physique du vecteur de Poynting

*Données (pas toujours fournies !) :* $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} H.m^{-1}$ et $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{A}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\ \vec{A}\right) - \vec{\Delta}\vec{A}$.

**Version 2 : bain de soleil (2 fois, 2022)**

Soit un champ électromagnétique se propageant dans le vide selon l'axe $\overrightarrow{u_x}$ avec $\vec{E} = E(x,t)\overrightarrow{u_y}$ et $\vec{B}(x,t)$.

1) Rappeler les équations de Maxwell et les simplifier en exploitant les hypothèses de l'énoncé.
2) Montrer que l'équation de propagation de $\vec{E}$ dans le vide est, dans ces conditions, $\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$. Exprimer $c$ et commenter.

La solution de cette équation peut s'écrire $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k x)\, \overrightarrow{u_y}$ (ou $\vec{E} = E_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right] \overrightarrow{e_y}$)

3) Quel nom donne-t-on à ce type de solution ? Quel est le sens de propagation de l'onde ? quelle est sa vitesse de propagation ?
4) Calculer le champ magnétique correspondant. Quel est le rapport entre l'amplitude des deux champs ? Donner une représentation spatiale de l'onde électromagnétique.
5) Calculer alors le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et prouver que $\langle \Pi \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$, où $\langle\ \ \rangle$ représente la valeur moyenne.
6) Le rayonnement en provenance du Soleil arrive au sol avec une puissance surfacique d'environ 1 kW.m$^{-2}$, calculer l'amplitude du champ électrique correspondant. Peut-on s'électrocuter avec un « bain de soleil » ?

---

**Exercice 16. Énergie reçue par le toit d'une maison** IMPORTANT | 2 | 1

Le soleil rayonne au niveau de la Terre un champ électrique d'amplitude environ $1{,}0.10^3\ V/m$.

1) Déterminer la puissance moyenne reçue par unité de surface sur la Terre.
2) Trouver alors un ordre de grandeur de la puissance que reçoit le toit d'une maison.
3) Quelle est l'énergie récupérable au cours d'une journée en supposant un éclairement effectif pendant le quart d'une journée ? Le résultat peut être exprimé dans une unité hors SI.
4) Comparer ce résultat à la consommation électrique journalière d'une famille.

*On donne :* $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ H.m^{-1}$.

*Ordres de grandeur de la puissance de quelques appareils domestiques*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10 kW | cuisinière | 2 kW | radiateur électrique, chauffe-eau |
| 3 kW | lave-linge, sèche-linge | 1 kW | micro-ondes, cafetière, grille-pain, fer à repasser, aspirateur |

2,5 kW four 200 W ordinateur, TV, réfrigérateur, congélateur

### Exercice 17. Commande à distance du verrouillage des portes d'un véhicule *(ATS 2012)* IMPORTANT | 2 | 1

Les véhicules modernes disposent de l'ouverture centralisée à partir d'une commande intégrée à la clé. Suivant la fonction que veut mettre en œuvre l'opérateur (ouverture des portes, fermeture...), un signal est émis par la clé sous forme d'onde électromagnétique.

- $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{A}) - \vec{\Delta}\vec{A}$
- $c = 3{,}00.10^8$ m. s$^{-1}$ : célérité de la lumière dans le vide ou dans l'air
- $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H. m$^{-1}$ : perméabilité du vide

1) Rappeler l'expression des équations de Maxwell dans un milieu non chargé, non conducteur et assimilable au vide. On précisera les unités du champ magnétique $\vec{B}$ et du champ électrique $\vec{E}$.
2) Déduire des équations de Maxwell l'équation de propagation vectorielle vérifiée par le champ électrique $\vec{E}$ dans un milieu non chargé, non conducteur et assimilable au vide.

On considère une onde électromagnétique pour laquelle l'expression du champ électrique est donnée en coordonnées cartésiennes par la formule :

$\vec{E}(x,t) = E_0 cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]\vec{e}_z$ où $E_0$ est une constante positive, $\omega$ est la pulsation de l'onde et $t$ la variable temporelle.

3) À partir de l'expression de $\vec{E}$, préciser la direction et le sens de propagation de l'onde considérée.
4) Montrer que cette onde vérifie l'équation de propagation déterminée à la question 2) à condition que $c$, $\varepsilon_0$ et $\mu_0$ soient reliées par une relation que l'on déterminera.
5) À l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ de cette onde en fonction de $E_0, c, \omega, x, t$ et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.
6) Rappeler l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ associé à une onde électromagnétique Quelle est la signification physique de ce vecteur ? Quelle est son unité ?
7) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ relatif à l'onde considérée.
8) On note $\langle\vec{\Pi}\rangle$ la valeur moyenne de $\vec{\Pi}$ au cours du temps. Exprimer $\langle\vec{\Pi}\rangle$ en fonction de $c$, $E_0$, $\mu_0$ et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

La clé émet une onde de puissance moyenne $P = 50\ mW$ répartie uniformément dans toutes les directions de l'espace de manière sphérique.

9) Déterminer à $d = 10$ m la valeur de $\langle\vec{\Pi}\rangle$. En déduire l'intensité du champ électrique $E_0$ et l'intensité du champ magnétique $B_0$ de l'onde.
10) Comment doit-on placer une antenne constituée d'un cadre conducteur rectiligne formant un carré pour détecter le champ magnétique ? Illustrer votre réponse d'un schéma.
11) La fréquence de l'onde émise est $f = 400\ MHz$. En déduire la valeur de sa longueur d'onde.

### Exercice 18. Onde sphérique 2 | 2 ou 3

On considère un émetteur d'ondes électromagnétiques que l'on assimile à une source ponctuelle : il peut s'agir d'un émetteur de radio, d'un satellite, d'une étoile qui rayonne, etc. L'onde émise est sphérique, de la forme en coordonnées sphériques $\vec{E}(M,t) = E_0(r)\cos(\omega t - kr)\,\overrightarrow{e_\theta}$ avec $k = \frac{\omega}{c}$.

Le milieu de propagation est assimilé au vide.

1) Par analogie avec une onde plane, identifier le vecteur d'onde $\vec{k}$ de l'onde sphérique.

2) On admet qu'une telle onde vérifie localement la même relation de structure qu'une onde plane. En déduire l'expression du champ magnétique associé.

3) Exprimer le vecteur de Poynting et sa moyenne temporelle.

4) Exprimer la puissance moyenne $\mathcal{P}$ rayonnée à travers une sphère de rayon $r$. Justifier par un argument physique que cette puissance est indépendante de $r$. En déduire que $E_0(r) = \frac{A}{R}$ avec $A$ une constante à déterminer.

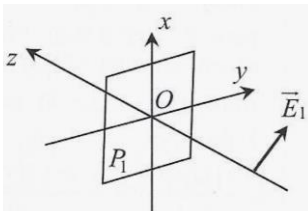
---

**Exercice 19. Polariseur et analyseur** IMPORTANT | 2 | 2

On modélise un film polarisant dichroïque, noté $P_1$, par une lame d'épaisseur négligeable constituée d'un milieu anisotrope. On suppose que le caractère anisotrope du milieu se traduit par une transparence vis-à-vis des ondes dont le champ électrique est parallèle à une direction $(Ox)$ attachée au plan du polariseur, dite axe du polariseur, et par une opacité vis-à-vis des ondes dont le champ électrique est parallèle à une direction $(Oy)$ orthogonale à $(Ox)$. On admet que dans le cas général, le champ électrique associé à une onde de polarisation quelconque se propageant suivant l'axe $(Oz)$ normal à la surface du polariseur est de la forme :

$$\overrightarrow{E_1} = \left| \begin{array}{c} E_{0x}\cos(kz - \omega t + \varphi_x) \\ E_{0y}\cos(kz - \omega t + \varphi_y) \\ 0 \end{array} \right.$$

Le caractère transverse de l'onde impliquant l'absence de composante suivant la direction de propagation $(Oz)$. Les amplitudes des composantes transverses $E_{0x}$ et $E_{0y}$ sont positives. Dans le cas d'une lumière non polarisée, les phases à l'origine $\varphi_x$ et $\varphi_y$ sont différentes et aléatoires.




**1)** Une lumière non polarisée à laquelle on associe une OPPM arrive en incidence normale au point O de la surface du polaroïd. Donner la forme du champ $\overrightarrow{E_2}$ émergeant du polariseur dans le système d'axe $(O, x, y, z)$ lié à sa surface. Justifier brièvement la terminologie d'usage de « polariseur » pour décrire ce film polaroïd.

**2)** On place à présent un second polaroïd $P_2$, identique au premier et parallèle à celui-ci, sur le trajet de la lumière émergeante du polariseur $P_1$. On note $(OX)$ son axe et on suppose que celui-ci fait un angle $\alpha$ avec l'axe $(Ox)$ de $P_1$. On note $I$ l'intensité lumineuse transportée par l'onde, qui est définie comme le flux du vecteur de Poynting moyen par unité de surface à travers une surface unitaire perpendiculaire à la direction de propagation.

**a)** Donner l'expression de l'intensité $I_2$ de l'onde incidente $P_2$ ainsi que celle, notée $I_3$, de l'onde qui en émerge. En déduire la relation entre $I_2, I_3$ et $\alpha$, dite loi de Malus.

**b)** On place un écran derrière $P_2$. Que se passe-t-il lorsque les directions $(Ox)$ et $(OX)$ sont orthogonales ?

**c)** Partant de la situation décrite précédemment, on place entre les deux polaroïds une lame transparente composée d'un milieu permettant de générer, à partir d'une polarisation incidente rectiligne, une polarisation émergeante elliptique ou circulaire (on parle de lame à retard également dite lame quart d'onde). Qu'observe-t-on à l'écran si un opérateur fait tourner l'axe $(OX)$ du polaroïd $P_2$ de façon continue ?

**d)** Justifier, d'après ce qui précède, la terminologie d'usage d' « analyseur » utilisée pour décrire les polaroïd $P_2$.

## ■ Réflexion d'une onde plane

### Exercice 20. Onde et conducteur métallique 2 | 2

Une **onde incidente** plane progressive monochromatique de pulsation $\omega$ et de vecteur d'onde $\vec{k_i} = k\,\vec{e_z}$ ($k > 0$), est caractérisée par son champ électrique : en notation complexe, $\underline{\vec{E_i}} = E_0 \exp\big(i(\omega t - kz)\big)\ \vec{e_x}$.

**a.** Quelle est la nature de la polarisation de l'onde incidente ?

**b.** Exprimer le champ magnétique $\underline{\vec{B_i}}$ de cette onde.

Un **conducteur parfait** occupe toute la partie de l'espace correspondant à $z > 0$ ; sa surface libre avec l'air, dont les propriétés électromagnétiques sont assimilées à celles du vide, est représentée par le plan $Oxy$.

**c.** Que valent les champs électrique $\vec{E_c}$ et magnétique $\vec{B_c}$ dans le conducteur parfait ?

### Onde réfléchie

**d.** Quelle est, sur le conducteur, la densité surfacique de charge $\sigma$ ?
Donner l'expression complète du champ électrique $\underline{\vec{E_r}}$ de l'onde réfléchie.

**e.** Exprimer le champ magnétique $\underline{\vec{B_r}}$ de cette onde.

**f.** Représenter les vecteurs $\vec{k_i}$, $\vec{k_r}$, $\underline{\vec{E_i}}$, $\underline{\vec{E_r}}$, $\underline{\vec{B_i}}$ et $\underline{\vec{B_r}}$ en $z = 0$ à une date $t$ donnée.

**g.** Quelle est, sur le conducteur, la densité surfacique de courant $\vec{j_s}$ ?

### Onde stationnaire résultante

**h.** Exprimer, en notations réelles, les champs électrique $\vec{E}(z,t)$ et magnétique $\vec{B}(z,t)$ de l'onde stationnaire résultante.

**i.** Donner les caractéristiques de cette onde et montrer, à l'aide de schémas, les différences entre cette onde stationnaire et une onde progressive.

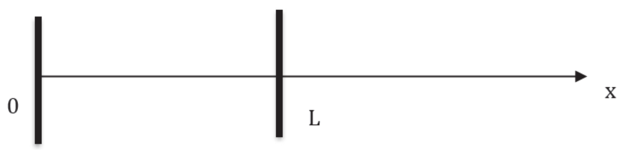
**j.** Exprimer $w(z,t)$ puis $\langle w(z)\rangle$.

**k.** Exprimer $\vec{\Pi}(z,t)$ puis $\langle\vec{\Pi}(z)\rangle$.

*Cavité*

### Exercice 21. Etude d'une cavité résonante *(écrit banque PT 2020)* IMPORTANT | 2 | 2

*On considère une onde électromagnétique sinusoïdale de fréquence $f$, polarisée rectilignement située entre deux conducteurs parfaits situés en $x = 0$ et $x = L$. L'espace entre les deux conducteurs est le vide.*




**1)** Retrouver l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique.

**2)** On cherche un champ sous la forme $\vec{E}(x,\mathrm{t}) = \mathrm{g}(x)\cos(2\,\pi\,\mathrm{f}\,\mathrm{t})\,\vec{\mathrm{u}}_y$. A quel type d'onde cela correspond-il ?

**3)** Que peut-on dire du champ électrique dans un conducteur parfait. Pourquoi ?

**4)** On admet la continuité du champ tangent aux interfaces conducteur/vide. Quelles sont alors les conditions aux limites vérifiées par le champ dans la cavité ?

**5)** Etablir l'équation différentielle vérifiée par $g(x)$ et la résoudre.

**6)** En déduire qu'un champ électromagnétique harmonique ne peut exister dans la cavité que pour certaines fréquences. On exprimera ces fréquences ainsi que leur longueur d'onde associée.

---

### Exercice 22. Cavité résonante - bis IMPORTANT | 2 | 2

On s'intéresse à une cavité contenue entre deux plans parallèles infinis, taillée dans un conducteur métallique parfait entre $z = 0$ et $z = a$. On s'intéresse à un champ électromagnétique qui est la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques polarisées rectilignement (selon $\vec{u}_x$ par exemple) de sens de propagation opposés $\pm\vec{u}_z$.

**a.** Quelle est la forme du champ électrique dans la cavité ?

**b.** Montrer que seules certaines longueurs d'onde discrètes $\lambda_n$ peuvent exister dans la cavité. Quelles sont les fréquences $f_n$ associées ?

**c.** Représenter sur un même graphique l'allure, à un instant donné, du champ électrique pour les 3 plus basses fréquences. Combien de nœuds et de ventres le mode $n$ possède-t-il ?

**d.** En admettant que dans le domaine de l'acoustique, un tuyau d'orgue (tube) soit régi par des équations analogues à celle d'une cavité électromagnétique, identifier les tuyaux d'un orgue produisant les sons les plus graves et les plus aigus. On supposera que le mode $n = 1$ est prédominant dans chaque tube.

---

**Exercice 23. Réflexion sous incidence normale** **2 | 2**

1) Un espace délimité par deux plans conducteurs distants de $a = 6\ cm$. Chaque plan présente un coefficient de réflexion en énergie de $R = 0{,}99995$. Au bout de combien de temps l'onde ne présente-t-elle plus que $1\%$ de son énergie initiale ?

2) Un objet de la vie courant utilise la réflexion totale des OEM sur un conducteur parfait. Préciser quel est cet objet et expliquer comment il est fabriqué.

---

**Exercice 24. Guide d'onde (Oral banque PT)** IMPORTANT **| 2 | 2 ou 3**

Un guide d'onde est constitué de deux plans parfaitement conducteurs situés en $y = 0$ et $y = a$ entre lesquels est confinée une onde électromagnétique de la forme :

$$\underline{\vec{E}} = \left[Ae^{ik_2y} + Be^{-ik_2y}\right]e^{i(\omega t - k_1x)}\overrightarrow{e_z}$$

Donnée : on rappelle la relation de passage pour le champ électrique à l'interface entre deux milieux 1 et 2 :

$$\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}$$

Avec $\vec{u}$ le vecteur normal dirigé de 1 vers 2.

1. Montrer que cette onde est une superposition de deux ondes planes progressives harmoniques (OPPH) dont on exprimera les vecteurs d'ondes notés $\overrightarrow{k_+}$ et $\overrightarrow{k_-}$.
2. Que valent les champs dans un conducteur parfait ? Etablir une relation entre $A$ et $B$ et une condition sur $k_2$ dépendant d'un entier $n$.
3. Déterminer les inclinaisons $\theta_+$et $\theta_-$ des deux OPPH avec l'axe du guide en fonction de leur longueur d'onde $\lambda$ et de la distance $a$.
4. En déduire que toutes les ondes ne peuvent pas se propager dans le guide.
5. Exprimer l'onde totale. Commenter sa structure dans les directions $x$ et $y$.

## EXERCICES COMPLEMENTAIRES

**Exercice 25. Direction de polarisation et direction de propagation pour une OPPM** IMPORTANT **| 1 | 2**

On donne ci-dessous le champ électrique d'une onde électromagnétique dans différents cas.

Préciser dans chaque cas : la direction de polarisation, la direction de propagation et l'expression du champ magnétique correspondant.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **f.** | $E_x = E_0 \cos\left(\omega t - k\left(\frac{y+\sqrt{3}z}{2}\right)\right)$ | $E_y = 0$ | $E_z = 0$ |
| **g.** | $E_x = 0$ | $E_y = \frac{\sqrt{3}}{2} E_0 \cos(\omega t - kx)$ | $E_z = \frac{1}{2} E_0 \cos(\omega t - kx)$ |

### Exercice 26. Puissance rayonnée par le Soleil

Le **flux solaire reçu sur Terre** est $1{,}4\ \mathrm{kW.m^{-2}}$. Si on tient compte de l'absorption par l'atmosphère, on mesure en fait $0{,}9\ \mathrm{kW.m^{-2}}$. Retrouver la puissance rayonnée par le Soleil, sachant qu'il est à $8$ minutes – lumière de la Terre.

### Exercice 27. Champ électrique induit par un solénoïde infini 2 | 3

**a.** Rappeler la valeur du champ magnétique créé par un solénoïde infini d'axe $z'z$, de rayon $a$, comportant $n$ spires par unité de longueur et parcouru par un courant $i(t) = I_m \cos(\omega t)$ variable (dans le cadre de l'ARQS).

**b.** Quelle est la conséquence locale de ce champ magnétique variable ? Exprimer l'équation de Maxwell correspondante.

**c.** On peut montrer par des considérations de symétrie que le champ électrique créé est dans la direction $\vec{E} = E_\theta\, \vec{e}_\theta$ ; justifier par des considérations d'invariance que $\vec{E} = E_\theta(r,t)\, \vec{e}_\theta$.

**d.** **Calcul du champ électrique à l'intérieur du solénoïde**

**Méthode locale** : à l'aide de l'équation locale exprimée plus haut, déterminer le champ électrique à l'intérieur du solénoïde.

**Méthode intégrale** (plus délicate) : exprimer la circulation de $\vec{E}$ sur un cercle $(\Gamma)$ –orienté– d'axe $z'z$ et utiliser le théorème de Stokes pour en déduire le champ électrique à l'intérieur du solénoïde.

*Données :*

Théorème de Stokes

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{a}\,.\,d\overrightarrow{M} = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\,\vec{a}\,.\,d\vec{S}$$

La circulation d'un champ vectoriel $\vec{a}$ le long d'une courbe fermée $(\Gamma)$ orientée est égale au flux de son rotationnel sortant d'une surface $(S)$ qui s'appuie sur $(\Gamma)$.

Expression du rotationnel en coordonnés cylindriques :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{a}) = \left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial a_z}{\partial \theta}\right)_{z,r} - \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)_{r,\theta}\right] \vec{e}_r + \left[\left(\frac{\partial a_r}{\partial z}\right)_{r,\theta} - \left(\frac{\partial a_z}{\partial r}\right)_{\theta,z}\right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\left(\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r}\right)_{\theta,z} - \left(\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)_{z,r}\right] \vec{e}_z$$

### Exercice 28. OemPPH de direction quelconque 2 | 2

On étudie une onde électromagnétique dont le champ électrique est de la forme :

$\vec{E} = E_x\overrightarrow{e_x} + E_y\overrightarrow{e_y}$ avec $E_x = E_0 exp[i(\omega t - \frac{K}{3}(2x + 3y + z))]$.

L'onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde est $\lambda = 6.10^{-7}$ m.

1. Calculer la fréquence de l'onde, son vecteur d'onde $k$ et la valeur numérique de la constante $K$. Identifier le domaine du spectre électromagnétique auquel l'onde appartient.
2. Établir l'équation cartésienne d'un plan d'onde.
3. À partir de l'équation de Maxwell-Gauss, exprimer $E_y$ en fonction de $E_x$.
4. Exprimer le champ magnétique de cette onde en fonction de $E_x$ et *c*.
5. Exprimer la densité moyenne d'énergie électromagnétique associée à cette onde.
6. Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting de cette onde. Commenter.

**Exercice 29. Bilan de puissance d'un conducteur** ***(oral banque PT)*** **2 | 2 |**

*Bilan d'énergie électromagnétique.*

Considérons un conducteur cylindrique de rayon $R$, de longueur infinie, d'axe $Oz$, soumis à un champ électrique $\vec{E}$ uniforme et stationnaire orienté suivant $\overrightarrow{u_z}$. On raisonne sur un tronçon de cylindre de longueur $\ell$`.

**1 -** Quel paramètre caractérise l'aspect conducteur électrique d'un matériau ? Donner son unité et un ordre de grandeur.

**2 -** Calculer l'intensité traversant le cylindre. On rappelle que le champ magnétique créé par le cylindre est :

$$\vec{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 \pi R^2 \gamma E}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta} = \dfrac{\mu_0 R^2 \gamma E}{2r}\overrightarrow{e_\theta} & r \geq R \\ \dfrac{\mu_0 \pi R r^2 \gamma E}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta} = \dfrac{\mu_0 r \gamma E}{2}\overrightarrow{e_\theta} & r \leq R \end{cases}$$

**3 -** Déterminer la puissance dissipée par effet Joule, la puissance volumique dissipée par effet Joule étant de la forme :

$$p_{Joule,v} = \vec{j}.\vec{E} = \gamma E^2$$

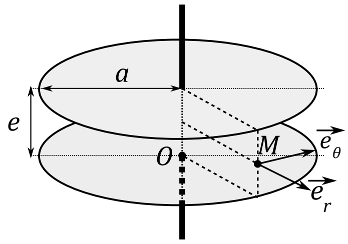
.**4 -** Exprimer la puissance rayonnée à travers les parois du cylindre.

**5 -** En déduire le bilan de puissance et le commenter.

---

**Exercice 30. Aspect énergétique de la charge d'un condensateur** **2 | 2 ou 3**

Soit un condensateur à faces parallèles, il est constitué d'armatures circulaires planes de rayon $a$, distantes de $e$.
Un circuit électrique permet de charger lentement le condensateur. On suppose que le champ électrique est uniforme entre les armatures et nul en dehors. On travaillera en coordonnées cylindriques avec la base $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.




**a.** Déterminer l'énergie électrique $W$ entre les plateaux lorsque le champ est égal à $\vec{E}(M,t) = E_z(t)\vec{e}_z$.

**b.** Lorsque le condensateur se charge, le champ varie avec le temps. Déterminer l'expression de la variation de l'énergie : $\frac{dW}{dt}$.

**c.** La variation du champ électrique est couplée avec celle d'un champ magnétique dont les lignes de champ sont des cercles centrés sur l'axe du condensateur : $\vec{B}(M,t) = B_\theta(r,t)\,\vec{e}_\theta$.

- ⇨ À l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère, déterminer l'expression du champ magnétique en $M$ au bord du condensateur.
- ⇨ En déduire l'expression du vecteur de Poynting sur la surface latérale du condensateur et la puissance électromagnétique à travers la surface latérale du condensateur.

**d.** Comparer ce dernier résultat à $\frac{dW}{dt}$. Conclure.

*Expression du rotationnel en coordonnés cylindriques :*

$$\overrightarrow{rot}(\vec{a}) = \left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial a_z}{\partial \theta}\right)_{z,r} - \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)_{r,\theta}\right]\vec{e}_r + \left[\left(\frac{\partial a_r}{\partial z}\right)_{r,\theta} - \left(\frac{\partial a_z}{\partial r}\right)_{\theta,z}\right]\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\left(\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r}\right)_{\theta,z} - \left(\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)_{z,r}\right]\vec{e}_z$$

---

**Exercice 31. Champ du vide ?** **2 | 2**

Thalia, en train de recopier les notes que lui a fournies son amie Justine, reste perplexe devant l'expression du champ électrique suivant : $\vec{E}(x,y,t) = E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right)\overrightarrow{u_x}$ avec $E_0 > 0$. Justine lui affirme en effet que ce champ peut exister dans un milieu vide de charges.

6) Justifier pourquoi Thalia a raison de remettre en cause les notes prises par son amie.
7) Thalia propose de rajouter à ce champ une composante $E_y(x,y,t)$ dans la direction $\overrightarrow{u_y}$. En supposant que la valeur moyenne temporelle de ce champ électrique reste nulle, déterminer l'expression de $E_y(x,y,t)$.

8) En déduire l'expression globale du champ électrique puis celle du champ magnétique associé, en supposant de même que la valeur moyenne temporelle du champ magnétique est nulle.

9) Cette région vide de charges peut-elle être également vide de courants ? on déterminera si besoin l'expression du vecteur densité volumique de courant $\vec{j}(x, y, z, t)$.

10) Déterminer l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique ainsi que l'expression du vecteur de Poynting.

---