

Questions de cours de physique incontournables - ATS –23-24

■ MES1

1. ❤️❤️ Effectuer les conversions suivantes : $S = 5 \text{ cm}^2$ en m^2 ; $V = 1 \mu\text{m}^3$ en m^3 , $V' = 0,02 \text{ m}^3$ en L; $c = 0,1 \text{ mol. L}^{-1}$ en mol. m^{-3} ; $v = 120 \text{ km. h}^{-1}$ en m.s^{-1} .

Grandeur	$S = 5 \text{ cm}^2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$	$V = 1 \mu\text{m}^3 = 10^{-18} \text{ m}^3$	$V' = 0,02 \text{ m}^3 = 20 \text{ L}$	$c = 0,1 \text{ mol. L}^{-1} = 10^2 \text{ mol. m}^{-3}$	$v = 120 \text{ km. h}^{-1} = 33,3 \text{ m. s}^{-1}$
----------	--	--	--	--	---

2. ❤️❤️ Les formules suivantes sont-elles homogènes ? soigneusement justifier

- a) Masse réduite μ d'un système de deux masses m_1 et m_2 : $\mu = \frac{m_1+m_2}{m_1.m_2}$.

$$\left[\frac{m_1+m_2}{m_1.m_2} \right] = \frac{[m_1+m_2]}{[m_1.m_2]} = \frac{M}{M^2} = M^{-1} \text{ avec } [\mu] = M : \text{les 2 termes de l'égalité n'ont pas même dimension, inhomogène !}$$

il faudrait définir $\mu = \frac{m_1.m_2}{m_1+m_2}$

- b) Accélération d'un mouvement rectiligne : $a_{(t)} = \frac{k.t}{v_{(t)}^2}$ où k est sans dimension, t temps, v vitesse.

$$\left[k \frac{t}{v^2} \right] = T. [v]^{-2} = T^3 L^{-2}; \text{ ce n'est donc pas la dimension d'une accélération : } [a] = \frac{L}{T^2}; \text{ inhomogène !}$$

- c) Avec x et x_0 longueurs, v et v_0 vitesses, ω pulsation, t et τ des temps :

$$x = v_0 \omega \cos(\omega t); \quad x = x_0 \cos(\omega t + v_0 \tau)$$

$$x = v_0 \omega \cos(\omega t) : [\cos(\omega t)] = 1, \text{ d'où}$$

$$[v_0 \omega \cos(\omega t)] = [v_0 \omega] = [v_0]. [\omega] \text{ avec } v_0 \text{ vitesse soit } [v_0] = L.T^{-1} \text{ et } \omega \text{ pulsation soit } [\omega] = T^{-1}$$

$$\text{On a donc } [v_0 \omega \cos(\omega t)] = L.T^{-2} \neq [x] = L : \text{ inhomogène !}$$

$$x = x_0 \cos(\omega t + v_0 \tau) : \text{L'argument d'un cosinus doit être adimensionnel et les deux termes d'une somme de même dimension ; or } [\omega t] = 1 \text{ et } [v_0 \tau] = L.T^{-1}.T = L \neq 1 : \text{ inhomogène !}$$

3. ❤️ La tension $u_c(t)$ dans un circuit obéit à une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c(t)}{dt} + \omega_0^2 u_c(t) = 0.$$

Déterminer les dimensions des grandeurs ω_0 et Q .

$$\text{Les termes d'une somme sont de même dimension : } \left[\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} \right] = \frac{[U]}{T^2} = \left[\frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c(t)}{dt} \right] = [\omega_0^2 u_c(t)]$$

$$\text{Avec } [\omega_0^2 u_c(t)] = [\omega_0]^2 [U] = \frac{[U]}{T^2}, \text{ soit } [\omega_0] = T^{-1} : \omega_0 \text{ homogène à une fréquence}$$

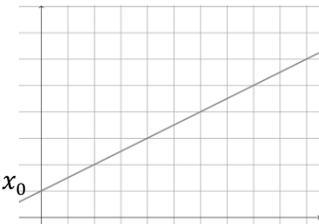
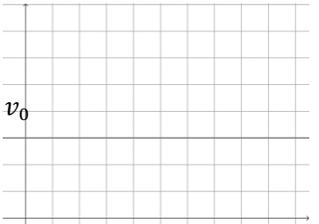
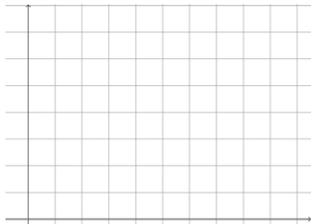
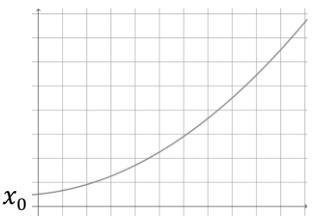
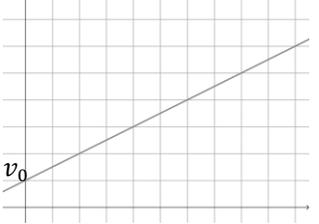
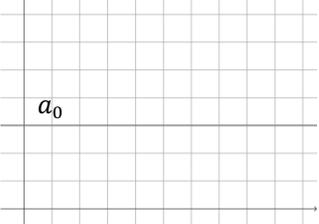
$$\text{Et } \left[\frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c(t)}{dt} \right] = \frac{[\omega_0]}{[Q]} \left[\frac{du_c(t)}{dt} \right] = \frac{[\omega_0] [U]}{[Q] T} = \frac{[U]}{[Q] T^2} = \frac{[U]}{T^2} \text{ soit } [Q] = 1 : Q \text{ est une grandeur adimensionnelle.}$$

MECANIQUE

■ MK1

4. ❤️ Mouvement rectiligne uniforme ou mouvement rectiligne uniformément accéléré : décrire les caractéristiques du mouvement, établir les expressions de la position, la vitesse et l'accélération pour des conditions initiales connues ($x_0 = x(t=0)$ et $v_0 = v(t=0)$). Tracer l'allure des graphes $x(t)$, $v(t)$ et $a(t)$.

Principaux résultats à établir (attention ! veiller à la rigueur de la rédaction : $x(t) = \int v(t)dt + K$; détermination de K à l'aide de la condition initiale $x_0 = x(t = 0)$, etc.)

	$x(t)$	$v(t)$	$a(t)$
translation rectiligne uniforme MRU	$x(t) = v_0 t + x_0$ 	$v(t) = v_0$ 	$a(t) = 0$ 
translation rectiligne uniformément accélérée MRUA	$x(t) = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$ 	$v(t) = a_0 t + v_0$ 	$a(t) = a_0$ 

■ MK2

5. Considérons un ressort vertical, de constante de raideur k et de longueur à vide L_0 , dont l'extrémité haute est fixe ; on accroche à l'autre extrémité une boule de masse m .

♥ Exprimer son énergie potentielle totale

Déterminer par une étude de l'énergie potentielle la position d'équilibre de la masse, et étudier sa stabilité par le calcul.

Système : masse : $E_p = E_{p\text{ pes}} + E_{p\text{ él}} = -mgx + \frac{1}{2}k(x - l_0)^2 + cte$ (Ox axe descendant)

Positions d'équilibre : elles correspondent à des extrema d'énergie potentielle totale du système, il faut donc rechercher les positions telles que la dérivée de l'énergie potentielle totale s'annule.

$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_{\text{éq}}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_{\text{éq}} = \frac{mg}{k} + l_0}$$

Stabilité : Une position d'équilibre stable correspond à un minimum local d'énergie potentielle, associé à une dérivée seconde positive en cette position-là $x_{\text{éq}}$, tandis qu'une position d'équilibre instable correspond à un maximum local d'énergie potentielle, soit à une dérivée seconde négative en $x_{\text{éq}}$.

$$\boxed{\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{\text{éq}}} = k > 0 \Rightarrow \text{position d'équilibre stable}}$$

6. Equilibre du pendule simple : Une bille assimilable à un point matériel M de masse m est suspendue à une tige de longueur ℓ et de masse négligeable, reliée à un point fixe O . La tige tourne librement autour d'un axe horizontal passant par O . La position du pendule est repérée par l'angle θ que fait la tige avec la verticale descendante.

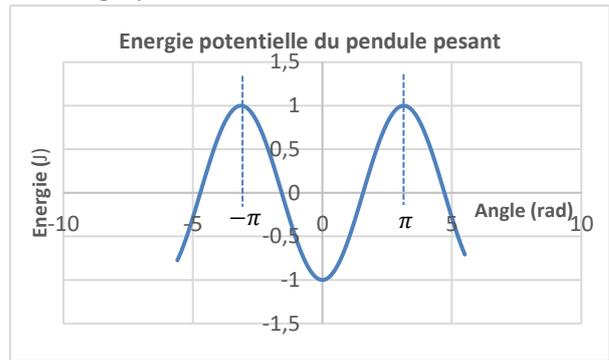
- Déterminer l'énergie potentielle du point M en fonction notamment de θ , angle du fil avec la verticale à un instant t donné.
- Etablir l'expression des positions d'équilibre et discuter de leur stabilité.

Avec un axe Oy vertical DESCENDANT : $E_p = -mgy + cte$ et $y = +\ell \cos \theta$ D'où : $E_p = -mg\ell \cos \theta + cte$

1) Une position d'équilibre stable correspond à un minimum de l'énergie potentielle.

Une position d'équilibre instable correspond à un maximum de l'énergie potentielle.

**Graphiquement : Équilibre stable en $\theta_{\text{eq},1} = 0 [2\pi]$;
équilibre instable en $\theta_{\text{eq},2} = \pi [2\pi]$.**



Par un calcul systématique : Il s'agit d'un système conservatif à 1 seul degré de liberté (ici θ) ; les **positions d'équilibre** sont donc telles que $\left. \frac{dE_p}{d\theta} \right|_{\theta_{\text{eq}}} = 0, \Leftrightarrow$

$$mg\ell \sin \theta_{\text{eq}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\theta_{\text{eq}} = 0[\pi]}$$

Stabilité de ces positions d'équilibre :

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = mg\ell \cos \theta, \text{ d'où}$$

$$\left. \frac{d^2 E_p}{d\theta^2} \right|_{\theta_{\text{eq},1}=0} = mg\ell > 0 : \theta_{\text{eq},1} = 0 \text{ équilibre } \mathbf{stable} ; \quad \left. \frac{d^2 E_p}{d\theta^2} \right|_{\theta_{\text{eq},2}=\pi} = -mg\ell < 0 : \theta_{\text{eq},2} = \pi \text{ équilibre } \mathbf{instable}$$

7. ❤️❤️ Un étudiant de prépa ATS glisse sur une piste de ski depuis une altitude $h = 15 \text{ m}$. On note α l'angle entre la piste et l'horizontale et on néglige les frottements. Déterminer sa vitesse finale sachant qu'il est parti du haut de la piste sans vitesse initiale.

Système : skieur + skis supposé ponctuel de masse m , étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Forces : pesanteur et réaction normale du support si on néglige les frottements. La pesanteur dérive de l'énergie potentielle de pesanteur : force conservative, tandis que la réaction normale du support ne travaille pas. Le système est donc conservatif : $E_m = \text{cte}$ ou $\Delta E_m = 0 = E_m(F) - E_m(0)$

Considérons comme état initial le skieur en haut de la pente, avec une vitesse encore nulle, et comme état final le skieur en bas de la piste avec la vitesse v_f .

Avec un axe vertical descendant, d'origine O la position initiale du skieur en haut de la piste :

Energie potentielle de pesanteur : $E_{p_p} = -mgz + \text{cte}$

Energie mécanique initiale : $E_{m_0} = E_{p_{p,0}} + E_{c_0} = 0$ (vitesse initiale donc énergie cinétique nulles)

Energie mécanique finale : $E_{m_f} = E_{p_{p,f}} + E_{c_f} = \frac{1}{2}mv_f^2 - mgz_f = \frac{1}{2}mv_f^2 - mgh$

Conservation de l'énergie mécanique, $0 = \frac{1}{2}mv_f^2 - mgh$, soit $\boxed{v_f = \sqrt{2gh}}$. A.N. $v_f \approx 17 \text{ m.s}^{-1} \approx 61 \text{ km.h}^{-1}$.

8. ❤️ Une petite voiture de masse m est lancée à partir du point A sur une piste horizontale de longueur AB prolongée en B par un demi-cercle vertical de rayon R , de point le plus haut noté C. On supposera qu'elle ne peut décoller de cette piste et qu'elle se déplace sans frottements. On donne $AB = R = 1 \text{ m}$; $m = 0,5 \text{ kg}$; $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$. Quelle vitesse initiale faut-il lui communiquer pour qu'elle atteigne le point C ?

Système : voiture de masse m , conservatif. Avec un axe vertical ascendant : $\Delta E_m = 0$ avec $E_{p_p} = +mgz + \text{cte}$

état initial : voiture au point A, avec $v_{A,\text{min}}$ vitesse minimale lui permettant d'atteindre le haut du demi-cercle C :

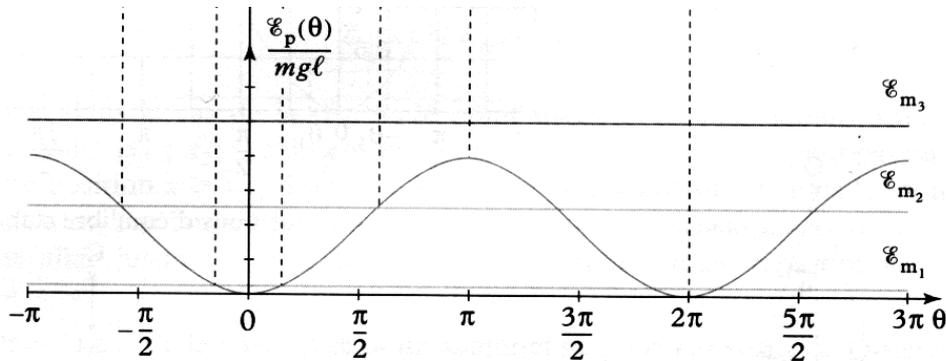
$$E_{m_A} = 0 + \frac{1}{2}mv_{A,\text{min}}^2$$

état final : point C atteint avec la vitesse $v_C = 0$: $E_{m_C} = 0 + 2mgR$,

$$E_{m_C} = E_{m_A} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{v_{A,\text{min}} = \sqrt{4gR}}. \text{ A.N. } v_{A,\text{min}} = 6,3 \text{ m.s}^{-1} = 22,8 \text{ km.h}^{-1}.$$

■ MK3

9. Un point matériel M de masse m est suspendu à une tige rigide de masse négligeable et de longueur ℓ . A $t = 0$, le point M est lâché depuis un angle α par rapport à la verticale, avec une vitesse initiale v_0 .
- ♥♥ Exprimer l'énergie potentielle du pendule en fonction de θ , angle du fil avec la verticale à un instant t donné.
 - ♥ Déterminer la vitesse v du point M en fonction de θ .
 - ♥ A l'aide de la courbe d'énergie potentielle ci-dessous, indiquer les caractéristiques du mouvement du pendule pour les différentes énergies mécaniques \mathcal{E}_m représentées.



Système étudié : bille considérée comme un point M.

Bilan des forces d'exerçant sur le système :

- Poids, associé à l'énergie potentielle de pesanteur
- Tension du fil, qui ne travaille pas : système conservatif.

$E_p - mgy = -mgl \cos \theta$ (choix origine E_p en O)

2) système conservatif : $\mathcal{E}_m = cte$.

Energie mécanique initiale : $\mathcal{E}_{m_0} = \mathcal{E}_{c_0} + \mathcal{E}_{p_0} = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgl \cos \alpha$

Energie mécanique en un point quelconque caractérisé par l'angle θ : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv^2 - mgl \cos \theta$

Conservation de l'énergie mécanique : $\mathcal{E}_{m_0} = \mathcal{E}_m \Leftrightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gl(\cos \theta - \cos \alpha)}$

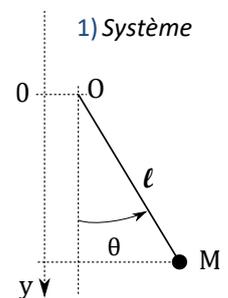
3) Sur la courbe d'énergie potentielle, positions d'équilibre stable : minima d' E_p : $\theta_{\text{eq1}} = 0 [2\pi]$; positions d'équilibre instable (maxima) : $\theta_{\text{eq2}} = \pi [2\pi]$.

Positions accessibles telles que $\mathcal{E}_m \geq E_p$

Pour l'énergie mécanique \mathcal{E}_{m_1} , puits de potentiel très restreint, amplitude du mouvement faible.

Pour $\mathcal{E}_{m_2} > \mathcal{E}_{m_1}$, puits de potentiel beaucoup moins restreint, amplitude plus élevée

Pour \mathcal{E}_{m_3} , tous les angles sont accessibles. mouvement de révolution sans oscillations.



10. ♥♥ On étudie la chute d'une bille sphérique en acier, de masse m , dans l'huile, celle-ci étant lâchée, à un instant t_0 pris comme origine des dates, sans vitesse initiale. La bille est repérée par son abscisse z sur un **axe vertical descendant Oz**. On néglige la poussée d'Archimède. On peut estimer que les forces de frottement dues à l'huile sont de la forme : $\vec{F}_{\text{frot}} = -h\vec{v}$ où v est la vitesse de la bille et h un coefficient positif, fonction du liquide et de la forme de la bille, mais indépendant de la vitesse de la bille.

- Etablir l'équation différentielle du mouvement.
- Mettre cette équation différentielle sous sa forme canonique, en introduisant la **constante de temps** (ou **temps caractéristique**) τ du système et en indiquant la signification physique de ce temps caractéristique.
- la résoudre en détaillant soigneusement les étapes, tracer l'allure de la courbe de la vitesse et indiquer (sans démonstration) la signification du temps caractéristique. Donner l'expression de la vitesse limite atteinte

Système : bille, de masse m

BAME - poids : $E_{pp} = -mgz + cte$;

- force de frottement fluide (force non conservative)

Energie mécanique E_m de la bille à t quelconque : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - mgz \underset{MR}{=} \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz$

avec $\dot{z} = \frac{dz}{dt} \underset{MR}{=} v$.

Théorème de la puissance mécanique : $\frac{dE_m}{dt} = P_{nc}$

Avec $P_{nc} = \mathcal{P}_{frot} = \vec{F}_{frot} \cdot \vec{v} = -hv^2 = -h\dot{z}^2$ et $\frac{dE_m}{dt} = m\dot{z}\ddot{z} - mg\dot{z}$

Soit $\frac{dE_m}{dt} = m\dot{z}\ddot{z} - mg\dot{z} \underset{TPM}{=} -h\dot{z}^2 \iff m\dot{z}\ddot{z} - mg\dot{z} + h\dot{z}^2 = 0 = \dot{z}(m\ddot{z} + h\dot{z} - mg)$

on s'intéresse au mouvement de la bille, donc $\dot{z} \neq 0$ (ou alors : $\dot{z} = 0$: solution physiquement sans intérêt pour notre étude).

Soit équation du mouvement :

$$m\ddot{z} + h\dot{z} = mg \quad \text{ou} \quad m \frac{d\dot{z}}{dt} + h\dot{z} = mg \quad \text{ou} \quad m \frac{dv}{dt} + hv = mg$$

Remarque : équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants et second membre constant

- Mise sous forme canonique : On commence par ramener à 1 le coefficient du terme de plus haut degré (en divisant par m , ici) :

$$\frac{d\dot{z}}{dt} + \frac{h}{m}\dot{z} = g$$

Constante de temps ou temps caractéristique par définition tel que $\frac{d\dot{z}}{dt} + \frac{1}{\tau}\dot{z} = g$ soit par identification $\tau = \frac{m}{h}$

- Temps caractéristique : ordre de grandeur de la durée du régime transitoire ; le régime permanent (la valeur asymptotique) est atteint après quelques τ (4 à 5 τ)
- Résolution de l'équation différentielle

1. Solution générale de l'équation homogène (SGEH) : $\dot{z}_H = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

2. Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre, ou équation complète (SPEC) :

$\frac{d\dot{z}}{dt} + \frac{1}{\tau}\dot{z} = g$; Le 2nd membre étant constant, on cherche une solution particulière \dot{z}_p constante ; on a alors

Solution particulière $\dot{z}_p = K = cte$ tq : $\frac{d\dot{z}_p}{dt} = 0$, soit $0 + \frac{1}{\tau}\dot{z}_p = g$ ou $\dot{z}_p = \tau g$

- On en déduit la solution générale de l'équation complète (SGEC) : $\dot{z} = \dot{z}_H + \dot{z}_p = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \tau g$
- On termine en déterminant la constante d'intégration A à l'aide d'une condition initiale (CICl).

$\dot{z}(t=0) = 0$, d'où $A \exp\left(-\frac{0}{\tau}\right) + \tau g = 0$; Soit $A = -\tau g$

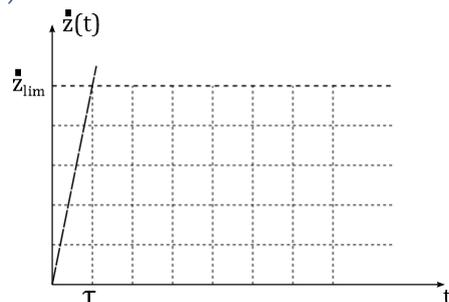
Finalement, vitesse de la bille : $\dot{z}(t) = v(t) = g\tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$

4) **Vitesse limite** : Méthode N°1 : $\dot{z}_{lim} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\dot{z}(t) = g\tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)\right) = g\tau = \dot{z}_{lim}$, avec

$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) = 0$

OU Méthode N°2 : \dot{z}_{lim} tq $\dot{z}_{lim} = cte$ soit $\frac{d\dot{z}_{lim}}{dt} = 0$ et $0 + \frac{1}{\tau}\dot{z}_{lim} = g$
ou $\dot{z}_{lim} = \dot{z}_p = \tau g$

- La tangente à l'origine coupe l'asymptote à la date $t = \tau$.



■ MK4

11. Soit un système M de masse m relié à un ressort horizontal de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 , se déplaçant avec des frottements : $\vec{f} = -h\vec{v}$, avec v vitesse du point matériel et h coefficient positif indépendant de cette vitesse.

A l'aide du théorème de la puissance mécanique, montrer que l'équation différentielle du mouvement est $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = k\ell_0$

♥♥ La mettre sous forme canonique en précisant les noms, dimensions et unités des constantes introduites.

$$\text{Energie potentielle : } E_p = E_{pe} + E_{pp} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + mgz_0 + cte = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 + cte$$

$$\text{Energie cinétique : } E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2; \quad \text{Energie mécanique : } E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 + cte$$

$$\text{Théorème de la puissance mécanique : } \frac{dE_m}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}(x - \ell_0) = -h\dot{x}^2$$

On s'intéresse au mouvement de la bille, donc $\dot{x} \neq 0$: équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants liant x et t :

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = k\ell_0$$

$$\text{Forme canonique : } \ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\ell_0 \quad \text{soit } \frac{h}{m} = \frac{\omega_0}{Q} \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2 \text{ d'où } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{1}{h}\sqrt{km}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{h}{m} \\ \frac{k}{m} \end{array} \right] = T^{-1} \text{ et } \left[\frac{k}{m} \right] = T^{-2} = [\omega_0^2], \quad \text{pulsation propre : } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{en rad.s}^{-1} \quad [\omega_0] = T^{-1}$$

$$[Q] = 1; \text{ facteur de qualité de l'oscillateur, sans unité.}$$

12. Soit un système M de masse m relié à un ressort vertical de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 , se déplaçant sans frottements ; on repère la position du point M à l'aide de l'axe (Oz) descendant où O représente le point d'attache du ressort. Il vérifie l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{z} + k(z - l_0) = mg$$

Résoudre cette équation différentielle après l'avoir mise sous forme canonique pour les conditions initiales suivantes : vitesse initiale v_0 , position initiale z_0 .

$$\text{Forme canonique : } \ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 l_{\text{éq}} \text{ avec } l_{\text{éq}} = l_0 + \frac{mg}{k} \text{ position d'équilibre ; Pulsation propre : } \frac{k}{m} = \omega_0^2 \text{ d'où}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \quad \text{en rad.s}^{-1} \quad [\omega_0] = T^{-1}$$

♥♥ Méthode N°1 :

$$\text{SGEH : } z_H(t) = Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

SPEC : $z_p(t) = K = l_{\text{éq}}$ (le second membre étant constant, on recherche la solution particulière stationnaire (sous forme de constante).

$$\text{SGEC = SGEH + SPEC soit } z(t) = z_H(t) + z_p(t) = l_{\text{éq}} + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = l_{\text{éq}} + Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\text{CICI : } \begin{array}{l} z(t_0 = 0) \stackrel{\text{C.I.}}{\equiv} z_0 \stackrel{\text{énoncé}}{\equiv} A \cos(\omega_0 t_0) + B \sin(\omega_0 t_0) + l_{\text{éq}} \stackrel{\text{formule}}{\text{à } t=0} \Rightarrow \boxed{A = z_0 - l_{\text{éq}}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \dot{z}(t_0 = 0) \stackrel{\text{C.I.}}{\equiv} v_0 \stackrel{\text{énoncé}}{\equiv} -A\omega_0 \sin(\omega_0 t_0) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t_0) \stackrel{\text{formule}}{\text{à } t=0} \Rightarrow \boxed{B = \frac{v_0}{\omega_0}} \end{array}$$

$$z(t) = (z_0 - l_{\text{éq}}) \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + l_{\text{éq}}$$

13. Considérons un oscillateur d'équation différentielle : $a \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + c x(t) = 0$ qu'on peut mettre sous la forme canonique suivante : $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$.

a) ♥ Donner l'équation caractéristique associée à l'oscillateur ainsi que son discriminant

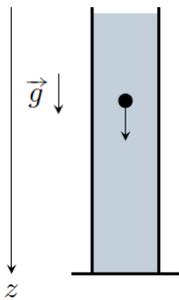
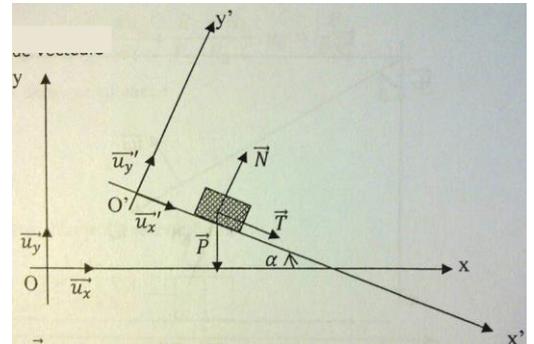
- b) ❤ Pour l'un des trois régimes aperiodique, critique ou pseudo-periodique, donner la condition d'existence associée sur Δ et établir la condition de son existence sur Q et donner l'allure de la courbe $x(t)$ associée en expliquant l'influence de Q sur l'allure de la courbe.
- c) ❤ Dans le cas du régime pseudo-periodique, donner les expressions de la pseudopulsation et du coefficient d'amortissement dans l'exponentielle
- d) Donner la solution générale à l'équation homogène associée (établir les expressions des racines).

a) Equation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ ou $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$
 Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$

	REGIME APERIODIQUE	REGIME CRITIQUE	REGIME PSEUDO-PERIODIQUE
Conditions	$\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$	$\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$	$\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$
Amortissement	Amortissement élevé	Amortissement critique	Amortissement faible
Solutions de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$	2 racines réelles r_1 et r_2 : $r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	Une racine double r_0 : $r_0 = \frac{-b}{2a} = -\omega_0$	2 racines complexes conjuguées r_1 et r_2 : $r_1, r_2 = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = -\lambda \pm j\Omega$ avec $\Omega = Im(r_i) $ et $\lambda = Re(r_i) $
solutions générales à l'équation homogène	$x_H(t) = \mu_1 \exp(r_1 t) + \mu_2 \exp(r_2 t)$	$x_H(t) = (\mu_1 + \mu_2 t) \exp(r_0 t)$	$x_H(t) = e^{-\lambda t} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$ $= D e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi)$

■ MK5

14. ❤❤ Déterminer les composantes des différentes forces représentées dans le schéma ci-contre dans la base (\vec{u}_x', \vec{u}_y') puis dans la base (\vec{u}_x, \vec{u}_y) ; quelle sera la base la plus adaptée à l'étude de cet exercice ?



15. ❤ On étudie un viscosimètre à chute de bille constitué d'une éprouvette remplie de glycérol, dans laquelle chutent des billes sphériques en acier de masse m et rayon R connus. La force de frottement exercée par le glycérol sur la bille est : $\vec{f} = -6\pi\eta_g R \vec{v}$
 où η_g est la viscosité dynamique du glycérol que l'on cherche à mesurer.

Établir l'équation différentielle vérifiée par la norme v de la vitesse de la bille.

- **Système** : bille de masse $m = \rho_a \frac{4\pi R^3}{3}$ étudiée dans le référentiel \mathcal{R} terrestre supposé galiléen.
- **Bilan des forces** : force de frottement visqueux $\vec{F}_S = -6\pi\eta_m R \vec{v}$

Poussée d'Archimède \vec{F}_A exercée par le glycérol sur la bille :

$$\vec{F}_A = -m_{\text{glycérol, déplacé}} \vec{g} = -\rho_m V_{\text{bille}} \vec{g} = -\rho_m \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{g}$$

Poids \vec{P} de la bille :

$$\vec{P} = m_{bille} \vec{g} = \rho_a V_{bille} \vec{g} = \rho_a \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{g}$$

- En appliquant le principe fondamental de la dynamique au système gouttelette dans le référentiel \mathcal{R} terrestre supposé galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho_a \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{d\vec{v}}{dt} = (\rho_a - \rho_m) \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{g} - 6\pi\eta_m R \vec{v}$$

$$\rho_a \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{d\vec{v}}{dt} + 6\pi\eta_m R \vec{v} = (\rho_a - \rho_m) \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{g}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{9\eta_m}{2\rho_a R^2} \vec{v} = \frac{(\rho_a - \rho_m)}{\rho_a} \vec{g}$$

- Soit \vec{e}_z le vecteur unitaire de l'axe (Oz) descendant. En l'absence de vitesse initiale et avec une accélération initiale selon \vec{e}_z , la bille va avoir un mouvement initial selon l'axe vertical (Oz), sa vitesse initiale est alors selon cet axe. La force de frottement qui apparaît avec la vitesse est donc également selon cet axe. Ainsi, à tout instant, l'accélération et la vitesse sont selon \vec{e}_z ; le mouvement est par conséquent rectiligne selon \vec{e}_z : $\vec{OM} = z\vec{e}_z$ et $\vec{v} = v\vec{e}_z$.
- Par projection de l'équation différentielle du mouvement selon \vec{e}_z :

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{9\eta_m}{2\rho_a R^2} v = \frac{\rho_a - \rho_m}{\rho_a} g = \frac{\rho_a - \rho_m}{\rho_a} g}$$

16. On considère un ressort vertical de raideur k et de longueur à vide l_0 . Son extrémité supérieure est fixe, et une masse m ponctuelle est reliée à son extrémité inférieure.

- ♥♥ En utilisant la 2^{ème} loi de Newton, déterminer la longueur du ressort à l'équilibre, puis établir l'équation différentielle du mouvement, en considérant l'existence d'une force de frottements fluides de la forme $\vec{f} = -h\vec{v}$ pour chaque
- L'examineur choisira l'un des cas de figure suivants : $h = 0$, $h^2 = 4km$, $h^2 = \frac{km}{16}$, $h^2 = 9km$

♥ Indiquer la nature du régime

** Résoudre si on lâche la masse depuis cette position d'équilibre avec une vitesse initiale v_0 .

Equilibre : Principe fondamental de la statique (absence de frottements car absence de vitesse à l'équilibre) :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \quad \text{projeté sur } \vec{u}_z : mg - k(l_{\text{éq}} - l_0) = 0 \quad l_{\text{éq}} = l_0 + \frac{mg}{k}$$

$$\text{PFD projeté sur } \vec{u}_z : mg - k(z - l_0) - h\dot{z} = m\ddot{z} \quad \text{soit} \quad m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = kl_0 - mg$$

Equations différentielles	Equations caractéristiques	Discriminant
$m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = kl_0 - mg$ $\frac{d^2z(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz(t)}{dt} + \omega_0^2 z(t) = \omega_0^2 z_e(t)$	$mr^2 + hr + k = 0$ $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$	$\Delta = h^2 - 4km$ $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$

Solutions générales à l'équation homogène, dont la forme dépend de la valeur du facteur de qualité

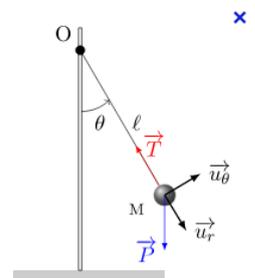
	REGIME APERIODIQUE	REGIME CRITIQUE	REGIME PSEUDO-PERIODIQUE
Conditions	$\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow h^2 > 4km$	$\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow h^2 = 4km$	$\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow h^2 < 4km$
	$h^2 > 4km : \text{cas de } h^2 = 9km$	$h^2 = 4km$	$h^2 < 4km : \text{cas de } h = 0, h^2 = \frac{km}{16}$

Amortissement	Amortissement élevé	Amortissement critique	Amortissement faible
Solutions de l'équation caractéristique	Deux racines réelles r_1 et r_2 : $r_1, r_2 = -\lambda \pm \Omega$	Une racine double r_0 : $r_0 = -\omega_0$	Deux racines complexes conjuguées $r_1, r_2 = -\lambda \pm j\Omega$ avec Ω valeur absolue de la partie imaginaire : pseudo pulsation $-\lambda$: partie réelle
Forme générale et formes utiles des solutions homogènes	$x(t) = \mu_1 \exp(r_1 t) + \mu_2 \exp(r_2 t)$	$x(t) = (\mu_1 + \mu_2 t) \exp(r_0 t)$	$x(t) = e^{-\lambda t} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) = D e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi)$

17. ♥ Etablir l'équation différentielle du mouvement du pendule ainsi que l'expression de la tension du fil à l'aide du principe fondamental de la dynamique. A quelle condition le fil reste-t-il tendu ?

Données : en coordonnées polaires, $\overrightarrow{v(M)}_R = L \dot{\theta} \overrightarrow{u}_\theta$ et $\overrightarrow{a(M)}_R = (-L \dot{\theta}^2) \overrightarrow{u}_r + (L \ddot{\theta}) \overrightarrow{u}_\theta$

- **Système** : point M de masse m , étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen
- **Bilan des actions mécaniques extérieures** : M subit
 - Son poids, vertical descendant : $\overrightarrow{P} = m \overrightarrow{g} = mg \cos \vartheta \overrightarrow{u}_r - mg \sin \vartheta \overrightarrow{u}_\theta$
 - La tension du fil dirigée selon le fil vers O et de norme T inconnue : $\overrightarrow{T} = -T \overrightarrow{u}_r$
 - Selon la 2^{ème} loi de Newton dans un référentiel galiléen : $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} = m \overrightarrow{a(M)}_R$



	\overrightarrow{P}	+	\overrightarrow{T}	=	$m \overrightarrow{a(M)}_R$
\overrightarrow{u}_r	$mg \cos \vartheta$	+	$-T$	=	$-mL \dot{\theta}^2$
$\overrightarrow{u}_\theta$	$-mg \sin \vartheta$	+	0	=	$mL \ddot{\theta}$

Fil tendu si $T = mg \cos \theta + \frac{mv^2}{L} > 0$; vitesse à déterminer à l'aide par exemple du TEM (ou intégrale première de l'équation différentielle du mouvement).

18. Considérons un iceberg en équilibre dans l'eau (on pourra modéliser ce dernier par un bloc rectangulaire de hauteur h et de surface S). ♥♥ Exprimer les différentes forces s'exerçant sur l'iceberg. ♥ Quel est le rapport de la hauteur immergée à la hauteur totale ?

Données : $\rho_{liq} = 1 \text{ g.cm}^{-3}$ et $\rho_{glace} = 0,9 \text{ g.cm}^{-3}$.

- **Système** : iceberg étudié dans le référentiel \mathfrak{R} terrestre supposé galiléen.
- **Bilan des forces** :

Poussée d'Archimède \overrightarrow{F}_A exercée par la mer sur l'iceberg (on négligera la poussée d'Archimède exercée par l'air) :

$$\overrightarrow{F}_A = -m_{eau, déplacé} \overrightarrow{g} = -\rho_e V_i \overrightarrow{g} = -\rho_e h_i S \overrightarrow{g}$$

Poids \overrightarrow{P} de l'iceberg : $\overrightarrow{P} = m \overrightarrow{g} = \rho_g V \overrightarrow{g} = \rho_g h S \overrightarrow{g}$

- En appliquant le principe fondamental de la dynamique au système iceberg dans le référentiel \mathfrak{R} terrestre supposé galiléen :

$$m \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = (\rho_g h - \rho_e h_i) S \overrightarrow{g} = \vec{0}$$

- Soit \overrightarrow{e}_z le vecteur unitaire de l'axe (Oz) ascendant. Par projection de l'équation du mouvement selon \overrightarrow{e}_z :

$$0 = \rho_g h - \rho_e h_i \quad \text{soit} \quad \frac{h_i}{h} = \frac{\rho_g}{\rho_e} = 92\%$$

19. ♥♥ Un étudiant de prépa ATS glisse sur une piste de ski depuis une altitude $h = 15 \text{ m}$. Sa vitesse initiale est nulle. On note α l'angle entre la piste et l'horizontale. Soit une force de frottement solide constante F . La déterminer si la vitesse en bas de la pente est nulle.

Systeme : skieur ; Référentiel : terrestre, supposé galiléen

Base : Ox , axe de plus grande pente, orienté vers le bas, Oy : orthogonal à Ox , dirigé vers le haut

Bilan des forces : poids (force conservative) $\vec{P} = mg(\sin \alpha \vec{u}_x - \cos \alpha \vec{u}_y)$

réaction du support (ne travaille pas) $\vec{R} = R\vec{u}_y$

force de frottements : $\vec{F} = -f\vec{u}_x$

Théorème de l'énergie mécanique entre A et B : $\Delta E_m = W_{nc}$

$$E_m(B) - E_m(A) = W_{nc} \text{ avec } E_m(A) = mgh \text{ et } E_m(B) = 0 \text{ et } W_{nc} = -fd = -f \frac{h}{\sin \alpha}$$

$$-mgh = -f \frac{h}{\sin \alpha} \Rightarrow f = \frac{mgh \sin \alpha}{h} = mg \sin \alpha$$

MK6

20. ♥♥ Considérons l'équation différentielle : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_0 \cos(\omega t)$.

Donner la forme de la solution $x(t)$ en régime sinusoïdal forcé, présenter la grandeur complexe associée $\underline{x}(t)$, et exploiter l'équation différentielle pour établir l'expression de $\underline{x}(t)$ en fonction des grandeurs caractéristiques du système et de l'excitation. Etablir l'expression de l'amplitude ; indiquer comment obtenir la phase à l'origine de la solution.

En régime sinusoïdal forcé, réponse $x(t)$ de la forme $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

On pose $\underline{x}(t) = X_m e^{i(\omega t + \varphi)} = X_m e^{i\varphi} e^{i\omega t}$, on a alors $\underline{\dot{x}}(t) = i\omega \underline{x}(t)$ donc $\underline{\ddot{x}}(t) = (i\omega)^2 \underline{x}(t) = -\omega^2 \underline{x}(t)$

A partir de l'équation différentielle

$$\underline{\ddot{x}} + \frac{\omega_0}{Q} \underline{\dot{x}} + \omega_0^2 \underline{x} = \omega_0^2 X_0 e^{i\omega t} = -\omega^2 \underline{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \times i\omega \underline{x}(t) + \omega_0^2 \underline{x} = \left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} \times i\omega + \omega_0^2\right) \underline{x} \text{ soit}$$

$$\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} \times i\omega + \omega_0^2\right) X_m e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \omega_0^2 X_0 e^{i\omega t}$$

$$X_m e^{i\varphi} = \frac{\omega_0^2 X_0}{\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} i\omega + \omega_0^2\right)} \text{ avec } X_m = |X_m e^{i\varphi}| = \left| \frac{\omega_0^2 X_0}{\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} i\omega + \omega_0^2\right)} \right| = \frac{\omega_0^2 X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q} \omega\right)^2}} \text{ et } \text{Arg}(X_m) = \varphi$$

21. Considérons l'amplitude complexe d'expression : $\underline{X}_M(u) = X_m e^{i\varphi} = \frac{\omega_0^2 X_0}{\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} i\omega + \omega_0^2\right)}$.

- a) ♥ Etablir l'expression de l'amplitude X_M en fonction de la pulsation réduite $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ et indiquer les caractéristiques de la réponse fréquentielle selon la valeur du facteur de qualité : asymptotes, allure des courbes de réponse X_M .

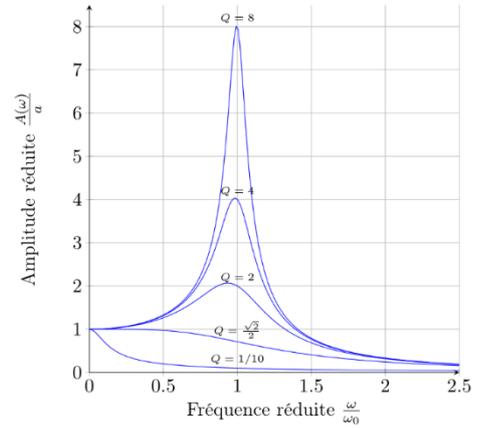
b) Existence et caractéristiques de la résonance : donner les résultats.

$$\underline{X}_M = X_m e^{i\varphi} = \frac{X_0}{1 - u^2 + i\frac{u}{Q}}$$

$$X_M = |\underline{X}_M| = \frac{X_0}{\left|1 - u^2 + i\frac{u}{Q}\right|} = \frac{X_0}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}$$

Allure de la courbe : aux faibles fréquences, $X_M \rightarrow X_0$, aux hautes fréquences : $X_M \rightarrow 0$.

Condition de résonance : pas de résonance aux faibles facteurs de qualité ($Q < 1/\sqrt{2}$), et pour les facteurs de qualité élevés, la pulsation de résonance est $\omega_r \approx \omega_0$ avec $X_M(\omega_0) = QX_0$



THERMODYNAMIQUE

■ THMO

22. ❤️❤️ L'eau a pour formule H_2O . On donne : 1_1H et ${}^{16}_8O$. Quelle est la masse molaire de l'eau ? la quantité de matière contenue dans 3,60 g d'eau ? dans 1,00 kg d'eau ? Quelle est la masse de $5,00 \cdot 10^{-2}$ mol d'eau ?

1) Masse molaire d'un atome : $A \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ avec A nombre de masse de l'atome, soit $M(H) = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M(O) = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, d'où $M(H_2O) = 2M(H) + M(O) = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

2) $n_1 = \frac{m}{M} = 0,2 \text{ mol}$; avec $m = 3,60 \text{ g}$; 3) $n_2 = \frac{m}{M} = 55,6 \text{ mol}$; avec $m = 1 \text{ kg}$ attention aux unités !!

4) $m = nM = 0,9 \text{ g}$, avec $n = 5,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$ (La masse molaire étant en g/mol, on obtient une masse en g)

■ THM1 et 2

23. ❤️❤️ On considère un pneumatique de voiture monté sur sa jante. On admettra que le pneu se comporte comme une enveloppe parfaitement étanche, qui délimite un volume constant, et que le gaz qu'il contient se comporte comme un gaz parfait.

La pression dans ce pneumatique, mesurée à $\theta_A = 20^\circ C$, est $p_A = 3,0 \text{ bar}$, $V_A = 35 \text{ L}$.

- 1) Déterminer le nombre de moles de gaz contenues dans le pneu.
- 2) Quelle sera la pression dans le pneu pour une température du gaz à l'intérieur du pneu de $\theta_B = 10^\circ C$?

$$1) n = \frac{p_A V_A}{RT_A} = \frac{3 \cdot 10^5 \times 35 \cdot 10^{-3}}{8,3 \times 293} \approx 4,3 \text{ mol} \quad 2) p_B = \frac{T_B p_A}{T_A} = 2,90 \text{ bar}$$

24. Un système constitué de $n = 1,00 \text{ mol}$ de gaz parfait subit la succession suivante de transformations réversibles :

1. Etat (1) à état (2) compression adiabatique
2. Etat (2) à état (3) dilatation à pression constante
3. Etat (3) à état (4) détente isotherme
4. Etat (4) à état (1) refroidissement isochore

Chaque état est défini par la pression P_i , la température T_i et le volume V_i (i variant de 1 à 4).

On appelle γ le coefficient de Laplace du gaz parfait étudié. On définit $a = V_1/V_2$ et $b = V_4/V_3$.

- 1) ❤️❤️ Représenter sommairement le cycle dans le diagramme de Clapeyron ; indiquer en justifiant si le cycle est moteur ou récepteur.

- 2) ❤️ Ecrire les différentes relations pouvant être exploitées pour relier les pressions, volumes et températures pour les états (2), (3) et (4),

Données connues : γ ; n ; P_1 ; T_1 ; a ; b

cycle moteur : la transformation CDE (partie haute du cycle) correspond à une détente, le travail du cycle sera donc négatif.

1) cycle moteur : la transformation CDE (partie haute du cycle) correspond à une détente, le travail du cycle sera donc négatif.

2) Exploiter les données de l'énoncé :

n ; P_1 ; T_1 ; $a = V_1/V_2 = 9$ et $b = V_4/V_3 = 3$

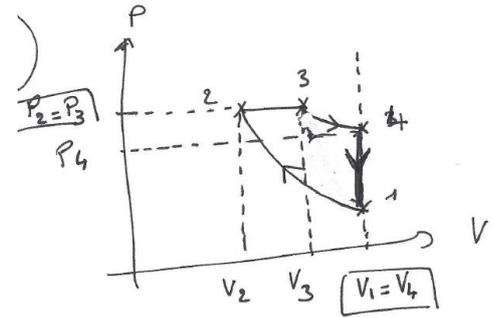
Exploiter l'équation d'état des gaz parfaits ainsi que la conservation de la matière :

$$P_1 V_1 = nRT_1 \quad (1) \quad \text{puis} \quad \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P_3 V_3}{T_3} = \frac{P_4 V_4}{T_4} \quad (2)$$

Exploiter la nature de chaque transformation :

1-2 : adiabatique réversible pour un G.P. : Lois de Laplace : $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$ soit $P_2 = P_1 a^\gamma$ (3)

2-3 isobare : $P_2 = P_3$ d'où $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}$; 3-4 isotherme : $T_3 = T_4$ d'où $P_3 V_3 = P_4 V_4$; 4-1 isochores : $V_1 = V_4$ d'où $\frac{P_4}{T_4} = \frac{P_1}{T_1}$



25. Après avoir défini chacun de ces termes, établir en justifiant soigneusement l'expression du travail des forces de pression dans les cas classiques suivants : évolution isochore, monobare ; isobare, évolution isotherme d'un gaz parfait. Exprimer les bilans d'énergie associés en l'absence de travail autre que celui des forces de pression.

Transformation	Propriété	Travail W reçu par le système
Isochore ❤️ ❤️	$V = cte$	$W_{A \rightarrow B} = 0$
Monobare	$P_{ext} = cte$	$W_{A \rightarrow B} = -P_{ext}(V_B - V_A)$
Isobare	$P = cte$	$W_{A \rightarrow B} = -P(V_B - V_A)$
Isotherme + GP	$T = cte$	$W_{A \rightarrow B} - nRT \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = nRT \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)$

■ THM3 et 4

26. ❤️ Rappeler les expressions des variations d'énergie interne et d'enthalpie dans le cas de gaz parfaits et des ❤️ ❤️ phases condensées incompressibles et indilatables

❤️ ❤️ Après avoir rappelé les caractéristiques de chaque transformation, ❤️ Donner le bilan d'énergie issu du premier principe de la thermodynamique pour les transformations suivantes : isochore, ❤️ ❤️ monobare avec équilibre de pression avec le milieu extérieur dans l'état initial et l'état final, adiabatique, ❤️ ❤️ cycle, isotherme pour un corps vérifiant la première loi de Joule. On considèrera que le seul travail est le travail des forces de pression.

Nature du système	Expressions de la variation ΔU d'énergie interne	Expressions de la variation ΔH d'enthalpie
Gaz parfait ❤️	$\Delta U = C_v \Delta T = nC_{v,m} \Delta T = \frac{nR}{\gamma-1} \Delta T$	$\Delta H = C_p \Delta T = nC_{p,m} \Delta T = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \Delta T$
PCII (Phase condensée incompressible indilatable) ❤️ ❤️	$\Delta U \approx \Delta H \approx C \Delta T \approx mc \Delta T$	

Transformation	Propriété ❤️ ❤️	Forme utile du bilan d'énergie issu du premier principe
Isochore	$V = cte$ $W = 0$	$\Delta U = Q_v$

Isobare ♥♥	$P = cte$	$\Delta H = Q_p$
Adiabatique	$Q = 0$	$\Delta U = W_{adiab}$
Cyclique ♥♥	$E_i = E_f$	$\Delta U_{cycle} = 0$
Isotherme + 1 ^{ère} et 2 ^{nde} Loi de Joule	$T = cte$	$\Delta U = 0$ $\Delta H = 0$

27. ♥♥ Un calorimètre contient $m_1 = 95$ g d'eau à $T_1 = 20$ °C. On ajoute $m_2 = 70$ g d'eau à $T_2 = 50$ °C. Quelle serait la température d'équilibre si on pouvait négliger la capacité thermique du calorimètre ?

{eau 1 + eau 2 + calorimètre} ; transformation monobare à pression atmosphérique (avec équilibre dans l'état initial et l'état final) et adiabatique, le calorimètre étant supposé idéal.

$$\Delta H \underset{\substack{\text{1er p. +} \\ \text{monobare avec éq.}}}{=} Q_p \underset{\text{adiabatique}}{=} 0$$

H fonction d'état extensive, en négligeant le calorimètre et en considérant l'eau comme une phase condensée :

$$\Delta H \underset{\substack{H \text{ fonction} \\ \text{d'état extensive}}}{=} \Delta H_1 + \Delta H_2 \underset{\substack{\text{modèle} \\ \text{PCIH}}}{=} m_1 c_e (T_f - T_1) + m_2 c_e (T_f - T_2) \underset{\substack{\text{1er p. +} \\ \text{monobare avec éq.}}}{=} Q_p \underset{\text{adiabatique}}{=} 0$$

Soit $m_1(T_f - T_1) + m_2(T_f - T_2) = 0$ et $(m_1 + m_2)T_f - m_1T_1 - m_2T_2 = 0$

$$T_f = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}$$

A.N. : $T_f = 32,7^\circ\text{C}$ Attention ! températures en K pour le calcul !

28. On place dans un calorimètre une masse $M = 400$ g d'eau liquide ($c = 4,19 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$) que l'on chauffe à l'aide d'une résistance électrique alimentée par un courant d'intensité $0,85$ A, sous une tension de 220 V. Il en résulte un accroissement régulier de la température de l'eau de $4,86$ K par minute.

Déterminer la capacité thermique et ** la valeur en eau du calorimètre.

Système : calorimètre + masse M d'eau liquide

Puissance dissipée par effet Joule par la résistance : $P = UI$

Energie reçue par le système par effet Joule pendant une durée $\Delta t = 1$ min : $Q_{joule} = \int_t^{t+\Delta t} UI dt = UI\Delta t$

Transformation monobare (ayant lieu à pression atmosphérique) : Bilan enthalpique

$$\Delta H \underset{\substack{\text{1er p. +} \\ \text{monobare avec éq.}}}{=} Q_p \underset{\substack{\text{calorifugé} \\ \text{+ résistance}}}{=} Q_{joule} = UI\Delta t$$

Avec $\Delta H = \Delta H_{eau} + \Delta H_{calo} \underset{\text{PCIH}}{=} Mc\Delta T + C_{calo}\Delta T$, et avec $\Delta T = 4,86$ K et $C_{calo} = m_{eq\ calo}c$

A.N. : $m_{eq\ calo} = 151$ g

29. Une maison subit, pendant une durée dt , des pertes thermiques à travers mur et toit d'expression :

$$\delta Q_{pertes} = K (T(t) - T_0) dt$$

où $T(t)$ est la température intérieure, T_0 la température extérieure et K un facteur constant.

Le chauffage de la maison est coupé à l'instant $t = 0$, on note T_1 la température initiale, on suppose T_0 constante. $T_1 > T_0$.

On note C_{maison} la capacité thermique totale de l'habitation.

a) Réaliser un bilan énergétique pour la maison sur une durée infinitésimale dt . En déduire l'équation différentielle liant T et t .

b) Déterminer l'évolution $T(t)$ de la température intérieure au cours du temps.

a) Bilan énergétique entre t et $t + dt$, alors que la température de la maison passe de T à $T + dT$ (avec $dT < 0$)
L'énergie mécanique de la maison ne varie pas.

La transformation ayant lieu à pression atmosphérique, le premier principe appliqué à la maison entre t et $t + dt$:

$$dH \underset{\text{isobare}}{=} \delta Q_{\text{reçu par la maison}} = -\delta Q_{\text{pertes}}$$

La variation d'enthalpie entre t et $t + dt$ est (système global suivant la seconde loi de Joule)

$$dH = C_{\text{maison}} (T + dT - T) = C_{\text{maison}} dT$$

d'où $C_{\text{maison}} dT = -K (T(t) - T_0) dt$ soit $C_{\text{maison}} \frac{dT}{dt} + K (T(t) - T_0) = 0$ ou encore

$C_{\text{maison}} \frac{dT}{dt} + KT(t) = KT_0$ L'équation différentielle liant T et t peut s'écrire

$$\frac{dT}{dt} + \frac{K}{C_{\text{maison}}} T(t) = \frac{K}{C_{\text{maison}}} T_0$$

b) Résolution : On définit la constante de temps du problème : $\tau = \frac{C_{\text{maison}}}{K}$

L'équation est alors $\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau} T(t) = \frac{1}{\tau} T_0$

La solution générale de cette équation est $T(t) = T_0 + A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

À l'instant initial, $T(t=0) = T_1 = T_0 + A$ d'où $A = T_1 - T_0$

La température intérieure de la maison est donnée par : $T(t) = T_0 + (T_1 - T_0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ Avec $\tau = \frac{C_{\text{maison}}}{K}$

■ THM5

30. ♥♥ Une masse $m = 100 \text{ g}$ d'eau passe de l'état solide à -10°C à l'état liquide à $+10^\circ\text{C}$ sous une pression de 1 atm. Calculer pour cette évolution la variation d'enthalpie de l'eau.

Données :

Enthalpie de fusion de l'eau : $l_f = 334 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ à 0°C sous 1 atm

Capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_l = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$; de l'eau solide : $c_s = 2,1 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

L'enthalpie étant une fonction d'état, on peut choisir un chemin fictif commode d'un point de vue théorique ; ici, on peut considérer que le solide est entièrement réchauffé de θ_i à θ_0 , puis qu'il est entièrement fondu à la température θ_0 , puis que le liquide obtenu est réchauffé de θ_0 à θ_f , soit $\Delta H = m (c_s(\theta_0 - \theta_i) + l_f + c_l(\theta_f - \theta_0)) = 39,7 \text{ kJ}$ où $\theta_0 = 0^\circ\text{C}$.

31. ♥ Extrait d'une table pour une vapeur d'eau saturante :

Vapeur d'eau saturante $P = 10 \text{ bar}$ $\theta = 179,86^\circ\text{C}$	Volume massique		Enthalpie massique	
	liquide	vapeur	liquide	vapeur
	$v_l (\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1})$	$v_v (\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1})$	$h_l (\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1})$	$h_v (\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1})$
	$1,127 \cdot 10^{-3}$	0,1947	761,2	2772

Un ballon de $10,0 \text{ m}^3$ contient 169 kg d'eau sous 10,0 bar. Quel est l'état de l'eau ? On précisera sa pression et sa température, son titre en vapeur ainsi que son enthalpie totale et ♥♥ son enthalpie de vaporisation à cette température

Sous 10 bar, on a $v_l = 1,127 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ et $v_v = 0,1947 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$.

Le système étudié a un volume massique $v = \frac{V}{m} = \frac{10}{169} \approx 6 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$, compris entre v_l et v_v : il s'agit donc d'un mélange diphasique liquide - vapeur. D'après la règle des moments, $x_v = \frac{v - v_l}{v_v - v_l} = 0,3$: mélange {30 % vapeur, 70 % liquide} sous 10 bar, à $179,86^\circ\text{C}$;

$H = m((x_v h_v + (1 - x_v) h_l)) = 230,6 \text{ MJ}$. Et $\Delta_{\text{vap}} h = h_v - h_l = 2010,8 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

32. ❤️ Considérons un changement d'état liquide-vapeur étudié à une température T quelconque. On définit sur l'isotherme associée le point L correspondant au point d'ébullition, le point V correspondant au point de rosée, ainsi que deux points M_1 et M_2 quelconques du palier diphasique, caractérisés respectivement par les titres x_{v1} et x_{v2} en vapeur.

Exprimer en fonction des titres, enthalpie de vaporisation et/ou masse totale les variations d'enthalpie et variations d'enthalpies massiques associées aux transformations ❤️ ❤️ L-V, ❤️ ❤️ L- M_1 , M_1 -V, V- M_2 - M_1 - M_2 .

transfo	L-V	L- M_1	M_1 -V	V- M_2	M_1 - M_2
Variation d'enthalpie massique Δh	$\Delta h = \Delta_{vap} h$	$\Delta h = x_{v1} \Delta_{vap} h$	$\Delta h = (1 - x_{v1}) \Delta_{vap} h$	$\Delta h = -(1 - x_{v2}) \Delta_{vap} h$	$\Delta h = (x_{v2} - x_{v1}) \Delta_{vap} h$

33. Etudions la détente dite de **Joule -Kelvin** du fluide réfrigérant R112 (fréon 12) dans une machine frigorifique : cette détente a lieu dans un système calorifugé (on considèrera donc que le système subit une transformation **adiabatique**), dans des conditions telles que la détente est **isenthalpique**.

Nous allons étudier la détente $A \rightarrow B$, avec A liquide saturant à $T_A = 303$ K, B mélange diphasique à $T_B = 263$ K, (titre en vapeur x_{vB}). Déterminer les caractéristiques de l'état final en utilisant du diagramme des frigoristes (cf. **diagramme en annexe 2**).

a) ❤️ Utilisation des tables thermodynamiques (cf. données ci-dessous) ;

b) ❤️ ❤️ Utilisation du diagramme des frigoristes (cf. **diagramme en annexe**).

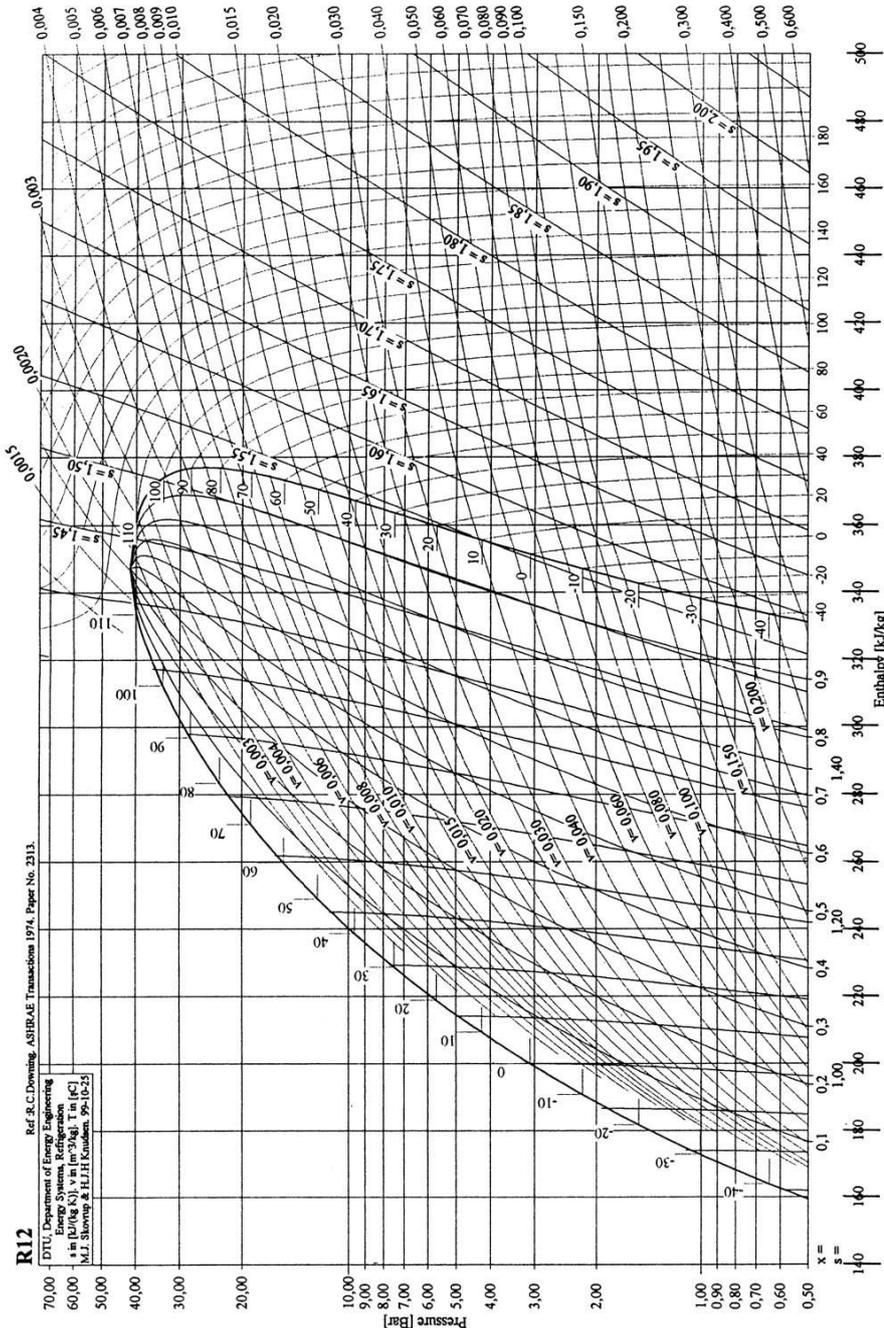
$$a) \Delta h_{AB} = 0 \Leftrightarrow h_A = h_B \Leftrightarrow h_L(T_A) = h_B \quad \text{or} \quad x_{vB} = \frac{h_B - h_L(T_B)}{h_V(T_B) - h_L(T_B)} = \frac{h_L(T_A) - h_L(T_B)}{h_V(T_B) - h_L(T_B)}$$

b) Point A = liquide saturant à T_A , point B = intersection de l'isotherme T_B et de l'isenthalpe (verticale) passant par A, puis règle des moments : $x_{vB} = \frac{LB}{LV}$ avec L et V associés à l'isotherme T_B

Table 1 (continued)
DuPont™ Freon® 12 Saturation Properties — Temperature Table

Temp °C	Pressure [kPa]	Volume [m³/kg]		Density [kg/m³]		Enthalpy [kJ/kg]			Entropy [kJ/K-kg]		Temp °C
		Liquid v_f	Vapour v_g	Liquid d_f	Vapour d_g	Liquid H_f	Latent H_{fg}	Vapour H_g	Liquid S_f	Vapour S_g	
-20	150.7	0.0007	0.1098	1458.0	9.109	181.6	162.1	343.7	0.9305	1.5710	-20
-19	156.7	0.0007	0.1059	1455.0	9.446	182.5	161.6	344.1	0.9341	1.5700	-19
-18	162.8	0.0007	0.1021	1452.0	9.792	183.4	161.2	344.6	0.9376	1.5690	-18
-17	169.1	0.0007	0.0986	1449.0	10.150	184.3	160.8	345.1	0.9412	1.5680	-17
-16	175.6	0.0007	0.0951	1446.0	10.510	185.2	160.3	345.5	0.9447	1.5680	-16
-15	182.3	0.0007	0.0918	1443.0	10.890	186.1	159.9	346.0	0.9482	1.5670	-15
-14	189.2	0.0007	0.0887	1440.0	11.270	187.1	159.3	346.4	0.9517	1.5670	-14
-13	196.3	0.0007	0.0857	1437.0	11.670	188.0	158.9	346.9	0.9552	1.5660	-13
-12	203.6	0.0007	0.0828	1434.0	12.080	188.9	158.5	347.4	0.9587	1.5660	-12
-11	211.1	0.0007	0.0800	1431.0	12.500	189.8	158.0	347.8	0.9622	1.5650	-11
-10	218.8	0.0007	0.0774	1428.0	12.920	190.7	157.6	348.3	0.9656	1.5640	-10
-9	226.7	0.0007	0.0748	1425.0	13.370	191.6	157.1	348.7	0.9691	1.5640	-9
-8	234.8	0.0007	0.0724	1421.0	13.820	192.6	156.6	349.2	0.9726	1.5630	-8
-7	243.2	0.0007	0.0700	1418.0	14.280	193.5	156.2	349.7	0.9760	1.5630	-7
-6	251.8	0.0007	0.0678	1415.0	14.760	194.4	155.7	350.1	0.9795	1.5620	-6
-5	260.6	0.0007	0.0656	1412.0	15.240	195.3	155.3	350.6	0.9829	1.5620	-5

Temp °C	Pressure [kPa]	Volume [m ³ /kg]		Density [kg/m ³]		Enthalpy [kJ/kg]			Entropy [kJ/K-kg]		Temp °C
		Liquid v _f	Vapour v _g	Liquid d _f	Vapour d _g	Liquid H _f	Latent H _{fg}	Vapour H _g	Liquid S _f	Vapour S _g	
8	397.6	0.0007	0.0439	1370.0	22.800	207.6	148.7	356.3	1.0270	1.5560	8
9	410.0	0.0007	0.0426	1367.0	23.480	208.5	148.2	356.7	1.0300	1.5560	9
10	422.7	0.0007	0.0414	1363.0	24.180	209.5	147.7	357.2	1.0340	1.5550	10
11	435.7	0.0007	0.0402	1360.0	24.900	210.4	147.2	357.6	1.0370	1.5550	11
12	448.9	0.0007	0.0390	1356.0	25.630	211.4	146.6	358.0	1.0400	1.5550	12
13	462.5	0.0007	0.0379	1353.0	26.380	212.3	146.2	358.5	1.0440	1.5540	13
14	476.4	0.0007	0.0368	1350.0	27.150	213.3	145.6	358.9	1.0470	1.5540	14
15	490.6	0.0007	0.0358	1346.0	27.930	214.3	145.0	359.3	1.0500	1.5540	15
16	505.1	0.0007	0.0348	1343.0	28.740	215.2	144.5	359.7	1.0540	1.5530	16
17	520.0	0.0008	0.0338	1339.0	29.560	216.2	143.9	360.1	1.0570	1.5530	17
18	535.1	0.0008	0.0329	1336.0	30.400	217.2	143.3	360.5	1.0600	1.5530	18
19	550.6	0.0008	0.0320	1332.0	31.260	218.2	142.8	361.0	1.0640	1.5520	19
20	566.4	0.0008	0.0311	1329.0	32.130	219.1	142.3	361.4	1.0670	1.5520	20
21	582.6	0.0008	0.0303	1325.0	33.030	220.1	141.7	361.8	1.0700	1.5520	21
22	599.0	0.0008	0.0295	1322.0	33.950	221.1	141.1	362.2	1.0740	1.5510	22
23	615.9	0.0008	0.0287	1318.0	34.890	222.1	140.5	362.6	1.0770	1.5510	23
24	633.0	0.0008	0.0279	1315.0	35.850	223.1	139.9	363.0	1.0800	1.5510	24
25	650.6	0.0008	0.0272	1311.0	36.830	224.1	139.3	363.4	1.0830	1.5510	25
26	668.5	0.0008	0.0264	1307.0	37.830	225.1	138.7	363.8	1.0870	1.5500	26
27	686.7	0.0008	0.0257	1304.0	38.850	226.0	138.2	364.2	1.0900	1.5500	27
28	705.3	0.0008	0.0251	1300.0	39.900	227.0	137.5	364.5	1.0930	1.5500	28
29	724.3	0.0008	0.0244	1296.0	40.970	228.0	136.9	364.9	1.0960	1.5490	29
30	743.7	0.0008	0.0238	1293.0	42.070	229.0	136.3	365.3	1.1000	1.5490	30
31	763.4	0.0008	0.0232	1289.0	43.180	230.0	135.7	365.7	1.1030	1.5490	31



34. ♥ ♥ Quelle est l'énergie dégagée par la combustion de 10 g de propane (C_3H_8) sachant que l'enthalpie de réaction de combustion d'une mole de propane est $\Delta_r H = -2\,244 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$?

♥ Cette énergie sert à chauffer 3 kg d'eau liquide, dont la température initiale est 15°C . Quelle est sa température finale ?

Données : Masses molaires de H et C : 1 et $12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;

Capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_0 = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

1) propane : $M(C_3H_8) = 3M(C) + 8M(H) = 3 \times 12 + 8 = 44 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; Nombre de moles : $n = \frac{m}{M} = \frac{10}{44} \approx 0,23 \text{ mol}$.

Système : composants chimiques. En considérant le propane comme réactif limitant, on a la réaction totale de $n = \frac{m}{M} = \xi_\infty$

moles de propane d'où $Q_{\text{dégagée/réaction}} = -Q_{\text{reçue}} \underset{\text{monoP}}{\equiv} -\Delta H \underset{\substack{\text{réaction chimique} \\ \text{à } T, P \text{ constants}}}{\equiv} -n\Delta_r H = 510 \text{ kJ}$

2) En supposant que cette transformation a de nouveau lieu à pression atmosphérique et en considérant le système eau :

$$\Delta H_{\text{eau}} \underset{\text{monoP}}{\equiv} Q_P = Q_{\text{reçue/eau}} = Q_{\text{dégagée/réaction}} \underset{\text{PCI}}{\equiv} m_{\text{eau}} c_0 (T_f - T_0)$$

Température finale de 56°C .

■ THM 6 et 7

35. Lecture d'un diagramme entropique pour l'eau (cf. annexe 2)

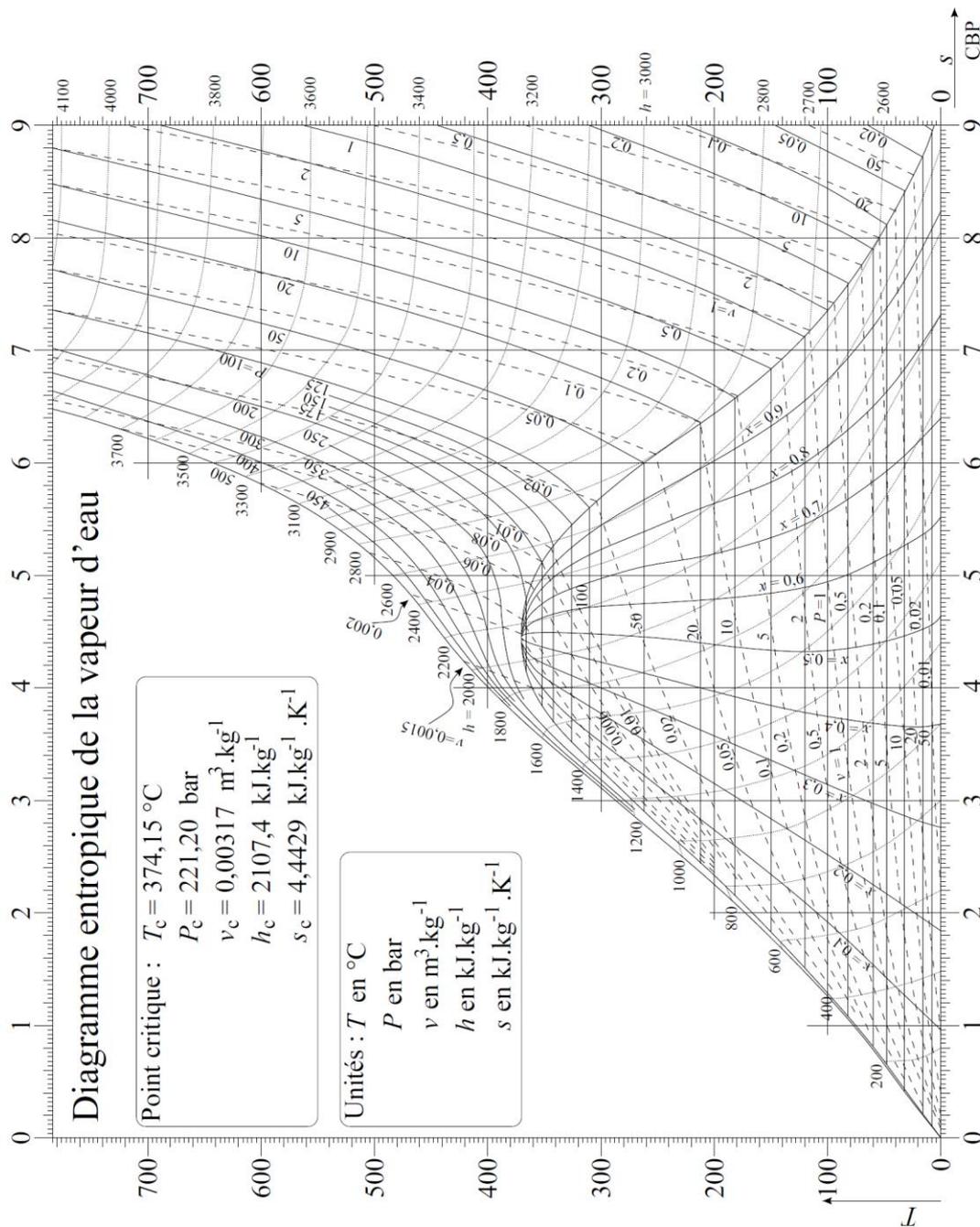
- 1) ♥ ♥ Pour $T = 350^\circ\text{C}$, quelle est la pression de vapeur saturante ?
- 2) ♥ ♥ Pour $P = 20 \text{ bar}$ et $h = 1200 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, quel est l'état physique de l'eau ?
- 3) ♥ Pour $x = 50 \%$ et $T = 500 \text{ K}$, quelle est l'entropie massique du fluide ? de la phase vapeur ? de la phase liquide ?
- 4) Quelle est la chaleur latente de vaporisation à $T = 200^\circ\text{C}$?

a. $p_{\text{sat}}(350^\circ\text{C}) \approx 175 \text{ bar}$

b. Mélange environ {15% vap, 85% liq}

c. $s(50\%) \approx 4,4 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$; $s_v \approx 6,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$; $s_l \approx 2,5 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

d. $l_{\text{vap}}(200^\circ\text{C}) \approx 2775 - 850 = 1925 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ou $l_{\text{vap}}(200^\circ\text{C}) = T_{\text{vap}} \Delta s_{\text{vap}} = 473 \times 4,1 = 1,94 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.



36. ♥♥ Compléter le tableau des principales caractéristiques des machines thermiques dithermes : forme du 1^{er} principe sur un cycle, signes des différents échanges d'énergie, efficacité, efficacité de Carnot (conditions d'obtention ?)

Machine cyclique ditherme	Moteur	Réfrigérateur	Pompe à chaleur
Formes du premier principe sur un cycle pour les machines cycliques dithermes			
$\Delta U_{cycle} = 0$ <small>ξ_{cycle+} U fonction d'état</small>	$\xi = W + Q_c + Q_f$ <small>1er principe</small>	$\Leftrightarrow P_{méca} + P_{th,c} + P_{th,f} = 0$	$\xi = 0$ <small>1er principe +cycle+ U fonction d'état</small>
Travail reçu W reçu par le système	$W < 0$	$W > 0$	$W > 0$

Quantité de chaleur Q_f reçue en provenance de la source froide	$Q_f < 0$	$Q_f > 0$	$Q_f > 0$
Quantité de chaleur Q_c reçue en provenance de la source chaude	$Q_c > 0$	$Q_c < 0$	$Q_c < 0$
Efficacité <i>expression toujours vérifiée</i>	$e_m = r = \frac{-W}{Q_c} = \frac{-\mathcal{P}_{méca}}{\mathcal{P}_{th,c}}$	$e_{frig} = CoP_{frig} = \frac{Q_f}{W} = \frac{\mathcal{P}_{th,c}}{\mathcal{P}_{méca}}$	$e_{PAC} = CoP_{PAC} = -\frac{Q_c}{W} = -\frac{\mathcal{P}_{th,c}}{\mathcal{P}_{méca}}$
Efficacité de Carnot = <i>efficacité théorique maximale vérifiée dans le cas d'un cycle réversible</i>	$e_{mot,c} = r_{mot,c} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$	$e_{frig,max} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$	$e_{PAC,max} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$

37. A l'aide des principes de la thermodynamique, établir l'expression de l'efficacité maximale (CoP maximal) d'un moteur, d'un réfrigérateur ou une PAC (au choix de l'examinateur) cyclique ditherme en fonction des températures des sources chaude et froide, ainsi que les conditions dans lesquelles elle est atteinte.

Bilans issus des principes de la thermodynamique sur un cycle au système :

$$\Delta U_{cycle} \underset{\substack{1er\ principe \\ cycle+U \\ fonction\ d'état}}{=} W + Q_{ch} + Q_{fr} \underset{=}{=} 0 \quad (1)$$

$$\Delta S \underset{\substack{2nd\ principe \\ cycle \\ ditherme}}{=} S_e + S_c \underset{=}{=} \frac{Q_{fr}}{T_{fr}} + \frac{Q_{ch}}{T_{ch}} + S_c \underset{\substack{cycle+S \\ fonction\ d'état}}{=} 0$$

d'après le second principe, $S_c \geq 0$, avec égalité pour une transformation réversible, d'où

$$\frac{Q_{fr}}{T_{fr}} + \frac{Q_{ch}}{T_{ch}} \leq 0 \quad (2); \text{ inégalité de Clausius.}$$

$$\text{Expression de l'efficacité du moteur : } \eta_{moteur} = \left| \frac{\text{grandeur d'intérêt}}{\text{grandeur de coût}} \right| = \frac{-W}{Q_{ch}} \quad (3)$$

$$\text{Or d'après (1), } -W = Q_{ch} + Q_{fr} \quad \text{soit dans (3) : } \eta_{moteur} = 1 + \frac{Q_{fr}}{Q_{ch}}$$

$$\text{D'après (2) : } \frac{Q_{fr}}{Q_{ch}} \leq -\frac{T_{fr}}{T_{ch}}$$

$$\text{Finalement, pour un moteur ditherme : } \eta_{moteur} = 1 + \frac{Q_{fr}}{Q_{ch}} \leq 1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}}$$

$$\text{Efficacité de Carnot : } \boxed{\eta_{carnot,m} = 1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}}}$$

obtenue pour un fonctionnement réversible, correspondant à l'efficacité maximale pouvant être atteinte.

38. ♥ On étudie les transformations du fluide réfrigérant d'un réfrigérateur, fluide qui décrit le cycle suivant :

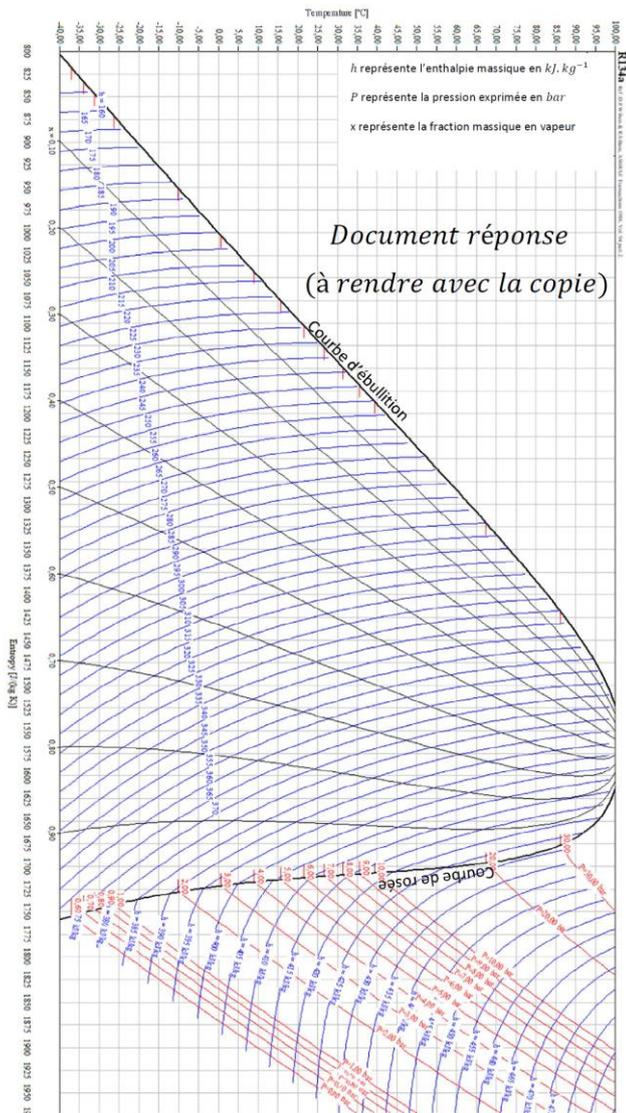
- Avant d'entrer dans le compresseur, le fluide est un gaz surchauffé (état A $\{T_A, P_A\}$). Le compresseur impose une compression adiabatique et irréversible. Le fluide reste à l'état gazeux (état B $\{T_B, P_B\}$).
- Le fluide circule ensuite dans le condenseur où il opère un refroidissement isobare puis une liquéfaction complète isobare (et donc isotherme) à la pression P_B . On obtient un liquide saturant (état C $\{T_C, P_C\}$).
- Le liquide subit une détente isenthalpique dans le détendeur (détente de type Joule-Thomson) faisant apparaître un mélange diphasé en sortie du détendeur (état D $\{T_D, P_D\}$).
- Le fluide pénètre dans l'évaporateur et évolue de manière isobare jusqu'à l'état A.

Données : $P_A = 2 \text{ bar}$, $P_B = 7 \text{ bar}$, $T_A = 5 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_B = 55 \text{ }^\circ\text{C}$

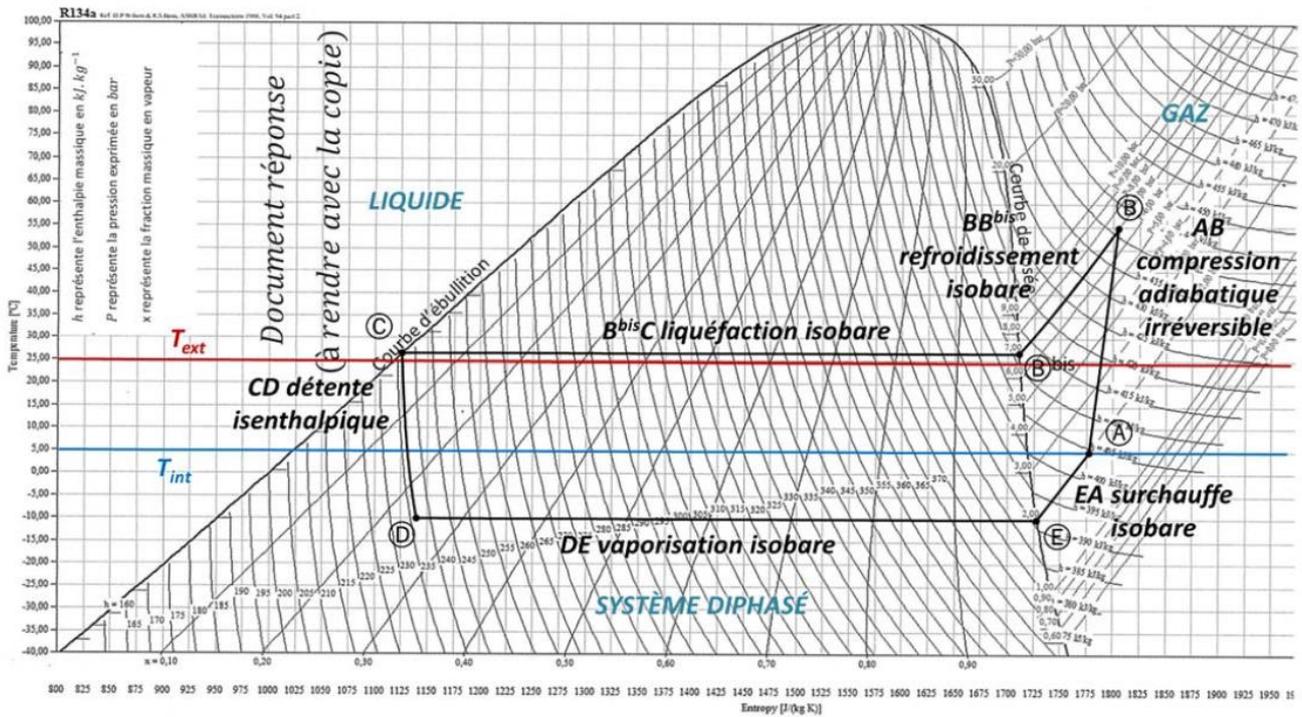
1) Tracer sur le diagramme entropique fourni en annexe page suivante le cycle en repérant les points A, B, C et D.

La chaleur est échangée avec la source froide dans l'évaporateur, on donne : $q_f = (h_A - h_D)$, le travail est fourni par le compresseur, avec $w = (h_B - h_A)$.

2) Déterminer l'efficacité réelle de ce frigo, définir et calcule l'entropie de carnot et commenter.



1. Cf diagramme ci-dessous : Position des points A, B, C et D.



2. Pour l'évaporateur, $q_f = (h_A - h_D)$; AN : $h_A - h_D = (405 - 235) = 170 \text{ kJ/kg}$
 Pour le compresseur, $w = (h_B - h_A)$; AN : $h_B - h_A = (442 - 405) = 37 \text{ kJ/kg}$
 Coefficient de performance CoP_{vrai} : $CoP_{vrai} = \frac{q_f}{w}$; AN : $CoP_{vrai} = \frac{1,70}{0,37} \approx \frac{20}{4} \approx 5$
3. $CoP_{vrai} < CoP_C$ car les transformations sont en réalité toutes irréversibles.

39. ♥ ♥ Enoncer le 1^{er} principe industriel en définissant soigneusement les différents termes (donner les 2 formes : massique et puissances) ; compléter le tableau ci-dessous.

Organe	rôle	Signes des échanges d'énergie w_i et q
Compresseur		
Vanne de détente (détendeur)		
Turbine		
Echangeur thermique, chaudière, etc.		

$$(h_s - h_e) = w_i + q \quad (\text{J/kg}) \qquad D_m [(h_s - h_e)] = P_i + P_{th} \quad (\text{J/s})$$

Avec h_e et h_s enthalpies en entrée et en sortie de l'organe considéré, w_i travail massique indiqué (autre que le travail des forces de pression) et q quantité de chaleur massique reçus par le système entre l'entrée et la sortie de l'organe ;

D_m débit massique de fluide, P_i puissance mécanique indiquée (autre que le travail des forces de pression) et P_{th} puissance thermique reçus par le système entre l'entrée et la sortie de l'organe

Organe	rôle	Echanges d'énergie
Compresseur	augmenter la pression d'un gaz	$w_i > 0 ; q = 0$
Vanne de détente (détendeur)	diminuer la pression d'un fluide	$w_i = 0 ; q = 0$
Turbine	mise en mouvement par le fluide	$w_i < 0 ; q = 0$
Echangeur thermique, chaudière, etc.	Faire varier la température du fluide ou faire un changement d'état	$w_i = 0 ; q \neq 0$

40. ♥♥ Le diagramme ci-dessous représente le cycle de fonctionnement d'une machine frigorifique réelle. Indiquer les positions de l'évaporateur et du condenseur, puis déterminer l'efficacité réelle de cette machine ainsi que l'efficacité de Carnot d'une machine frigorifique réversible fonctionnant entre les mêmes températures :

$$T_C = 25^\circ\text{C} \text{ et } T_F = -10^\circ\text{C}.$$

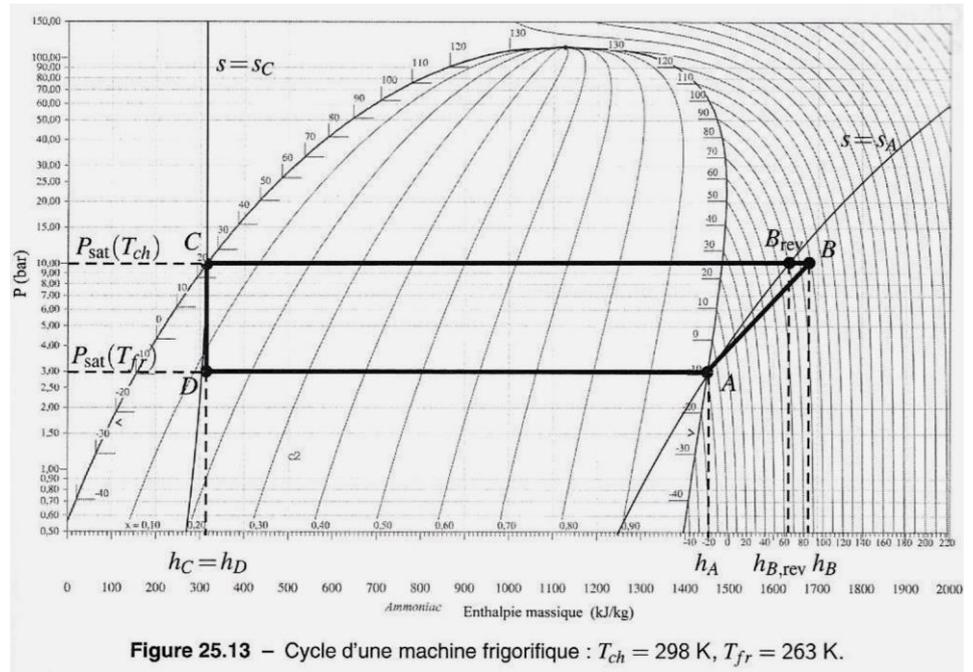


Figure 25.13 – Cycle d'une machine frigorifique : $T_{ch} = 298 \text{ K}$, $T_{fr} = 263 \text{ K}$.

Machines thermiques avec fonctionnement récepteur : $q_{fr} > 0$, évaporateur, étape DA ; $q_c < 0$, condenseur, étape BC ;

$$e_{frigo} = \frac{\text{grandeur utile}}{\text{grandeur de coût}} = \frac{q_{fr}}{W_u} = \frac{q_{\text{évaporateur}}}{W_{u,\text{compresseur}}} = \frac{q_{DA}}{W_{u,AB}}$$

En appliquant le premier principe industriel aux transformations DA et AB :

$$e_{frigo} = \frac{\Delta h_{\text{évaporateur}}}{W_{\text{compresseur}}} = \frac{\Delta h_{DA}}{\Delta h_{AB}} = \frac{h_A - h_D}{h_B - h_A}$$

$$h_A = 1450 \text{ kJ/kg}; \quad h_D = 310 \text{ J/kg}; \quad q_{fr} = 1140 \text{ kJ/kg}; \quad h_B = 1680 \text{ kJ/kg}; \quad w_{\text{compresseur}} = 230 \text{ kJ/kg};$$

$$e_{frigo} = \frac{q_{fr}}{w_u} = 5; \quad e_{\text{carnot}} = \frac{T_{fr}}{T_c - T_{fr}} = \frac{263}{298 - 263} = 7,5$$

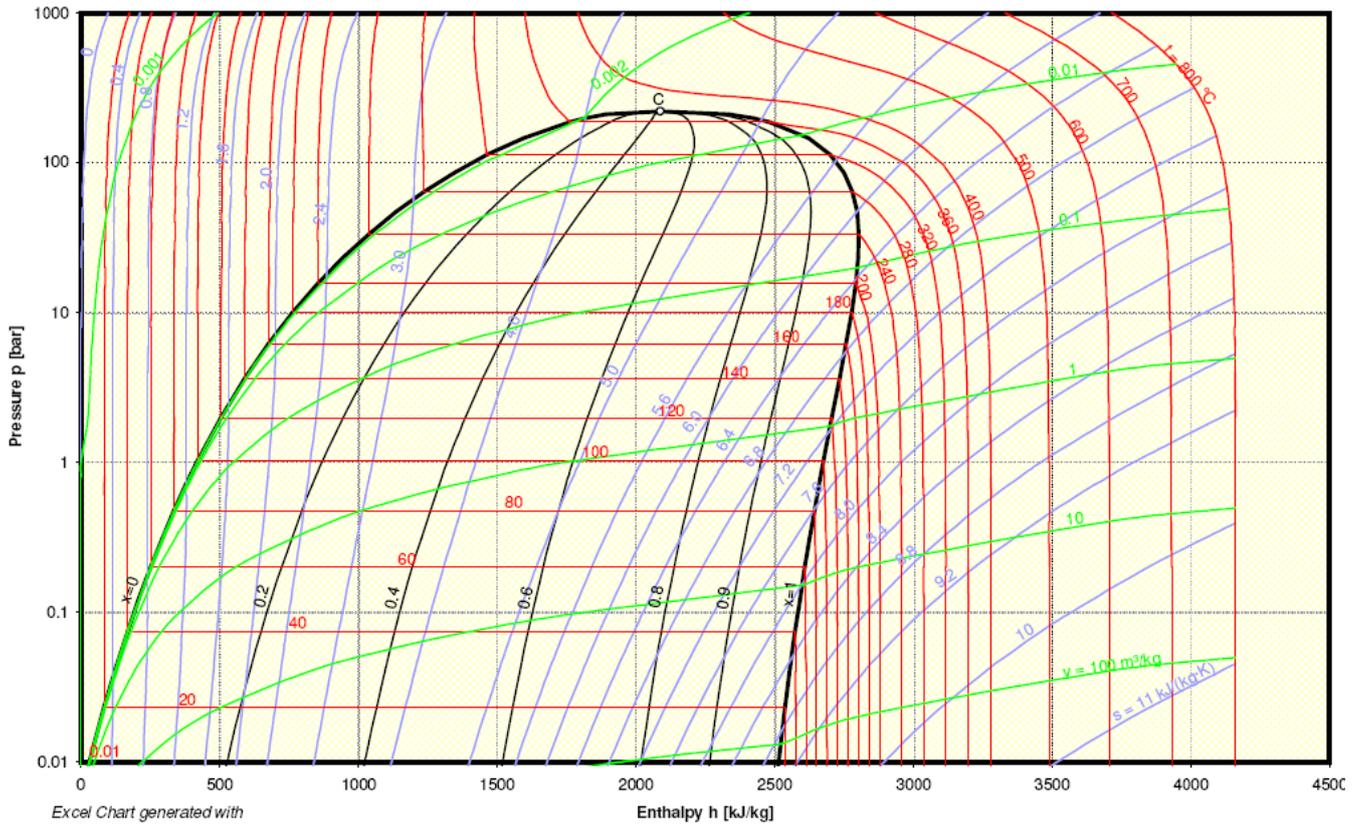
Cycle irréversible ; sources d'irréversibilité : compression non isentropique ; détente isenthalpique et échange de chaleur avec gradient de température de B jusqu'à la courbe de rosée irréversibles.

41. ♥ Dans une machine à vapeur, l'eau décrit un cycle de Rankine :

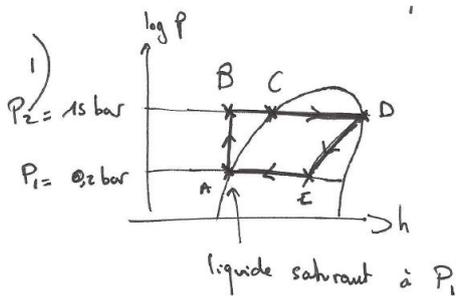
- Dans l'état A l'eau est à l'état de liquide saturant seul, dans les conditions de pression et température $P_1 = 0,2 \text{ bar}$ et $T_1 = 60^\circ\text{C}$;
- Transformation AB : l'eau est comprimée de façon adiabatique réversible dans une pompe, jusqu'à la pression $P_2 = 15 \text{ bar}$;
- Transformation BC : l'eau est injectée dans la chaudière et s'y réchauffe de manière isobare jusqu'à la température $T_2 = 200^\circ\text{C}$, telle que $P_{\text{sat}}(T_2) = P_2$;
- Transformation CD : l'eau se vaporise entièrement à la température T_2 ;
- Transformation DE : l'eau est admise dans le cylindre à T_2 et P_2 et effectue une détente adiabatique réversible jusqu'à la température T_1 ; on obtient un mélange liquide-vapeur ;
- Transformation EA : le piston chasse le mélange diphasique dans le condenseur où il se liquéfie totalement.

1) Représenter ce cycle sur le diagramme des frigoristes de l'eau représenté ci-dessous.

logP-H diagram



2) Calculer le rendement de ce moteur et le comparer au rendement de Carnot. Quelles sont les causes d'irréversibilité ?



* AB: isentropique, or modèle ψ
 condensée incompressible: isS \Leftrightarrow
 isT \Leftrightarrow ish \Rightarrow verticale.
 jusqu'à $P_2 = 15 \text{ bar}$

- * BC: isobare jusqu'à T_2 ; liquide saturant
- * CD: isT donc iso P à P_2 et T_2 ; vapeur saturant, $x_v = 1$.
- * DE: isentropique jusqu'à $T_1 = 60^\circ\text{C}$ (dessiné / analogie aux voisines)
- * EA: vaporisation isT à T_1 donc à P_1 (mélange diphasique).

- 2) $q_{AB} = q_{DE} = 0$ (isentropiques adiabatiques)
- 1^{er} principe pour les fluides en écoulement: $\Delta h = w_{ul} + q$ (massique).
- * $q_{BC} = h_C - h_B$ ($w_{ul,BC} = 0$ dans la chaudière)
- 860 kJ.kg⁻¹ 240 kJ.kg⁻¹ (par lecture graphique.)

$$q_{BC} = 620 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

* Idem pour $q_{CD} = h_D - h_C$ A.N.: $q_{CD} = 1340 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
 2800 (kJ.kg⁻¹) 860 (coût énergétique de la vaporisat. ↑)

* Idem pour $q_{EA} = h_A - h_E$ A.N.: $q_{EA} = -1940 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
 240 2080 (kJ.kg⁻¹)

3) Rendement d'un moteur: $\rho = \frac{-W}{Q_{ch}} = \frac{-W}{q_{chaude}} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C}$

$\rho = 1 + \frac{q_F}{q_C}$ Ici: $q_C = q_{BC} + q_{CD}$ et $q_F = q_{EA}$
 dans la chaudière

Soit $\rho = 1 + \frac{q_{EA}}{q_{BC} + q_{CD}}$ A.N.: $\rho = 0,28$

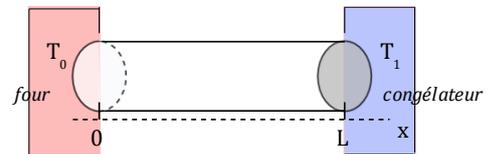
En considérant la source froide à T_1 et la source chaude à $T_2 = T_{max} = 200^\circ\text{C}$

cf cours: $\rho_{Carnot} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ A.N.: $\rho_{Carnot} = 0,30$
 $> \rho_{réel}$

Sources d'irréversibilité: ∇ transfo BC = transfert thermique par contact avec la chaudière à T_2 alors que b(Σ) est à $1 \nabla <$.
 irréversibilités ↑

THM8

42. ♥♥ Considérons une tige calorifugée latéralement, aux extrémités de laquelle on impose une différence de température, considérée comme un système à une dimension cartésienne (cf. ci-contre), étudiée en régime stationnaire en l'absence de source de chaleur interne. A l'aide d'un bilan d'enthalpie, établir l'expression de la température $T(x)$.



Pour les ♥♥ : admettre flux stationnaire en régime stationnaire puis faire la fin de la démonstration

- Ecrire le bilan d'enthalpie pour une tranche d'épaisseur dx : $d^2H \stackrel{\text{1er principe monobare}}{=} \delta^2Q$
- En régime stationnaire, $d^2H \stackrel{\text{stationnaire}}{=} 0$ soit $\delta^2Q = 0$
- En exprimant la quantité de chaleur reçue (entrée en x - sortie en $x + dx$) à l'aide des flux thermiques :
 $\delta^2Q = (\Phi(x) - \Phi(x + dx)) dt = 0$ soit $\Phi(x) = \Phi(x + dx) = cte$
- ♥♥ En introduisant le vecteur densité de flux et en exploitant la loi de Fourier :

$$\Phi(x) = \iint_{\text{section}} \vec{J}_Q(x) d\vec{S} \stackrel{\text{loi de Fourier}}{=} \iint_{\text{section}} -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) d\vec{S} \stackrel{\substack{\text{vecteurs colinéaires} \\ \text{gradient uniforme sur } S}}{=} -\lambda \frac{dT}{dx} S = cte$$

- ♥♥ soit $\frac{dT}{dx} = cte$ et $T(x) = ax + b$ (ou $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$)
- ♥♥ Détermination de a et b à l'aide des conditions aux limites :

$$T(x=0) = T_0 \text{ et } T(x=L) = T_1 \text{ d'où } T(x) = \left(\frac{T_1 - T_0}{L}\right)x + T_0$$

43. a) ♥ À partir de la loi de Fourier et de l'expression du flux thermique en régime stationnaire, retrouver l'expression de la résistance thermique R_{th} d'un mur d'épaisseur e , de surface S et de conductivité λ , les faces de ce matériau étant maintenues à $T_1 = 273 \text{ K}$ et $T_2 = 293 \text{ K}$ (on supposera le problème à une seule dimension). On donne $S = 2 \text{ m}^2$; $e = 10 \text{ cm}$; $\lambda = 0,9 \text{ SI}$.

b) ♥♥ On place sur le premier matériau une épaisseur e' d'un matériau isolant $\lambda' = 0,03 \text{ SI}$. Quelle doit être la valeur de e' pour diviser les pertes thermiques par 10 ?

a) Démarche attendue : En régime stationnaire, en l'absence de source interne, le flux est conservatif, soit $\Phi(x) =$

$$\Phi(x+dx) = \Phi, \text{ avec } \Phi = \iint_x \vec{J}_Q \cdot d\vec{S} = j_{Qx} S \text{ soit } j_{Qx} = cte$$

$$\text{Loi de Fourier : } \vec{J}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}T \text{ soit en cartésiennes à 1D : } j_{Qx} = -\lambda \frac{dT}{dx} \stackrel{j_{Qx}=cte}{=} -\lambda \frac{T_2 - T_1}{e};$$

$$\Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{e} (T_1 - T_2) \text{ soit } R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$$

b) Avec $\Phi = \frac{\Delta T}{R_{th}}$, pour diviser les pertes thermiques donc Φ par 10, il faut multiplier la résistance thermique $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ par 10.

$$\text{Association série : } (R_{th})_{tot} = R_{th} + R'_{th} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{e'}{\lambda' S} = 10R_{th} = 10 \frac{e}{\lambda S} \Rightarrow e' = 9e \frac{\lambda'}{\lambda} = 3 \text{ cm}$$

44. ♥ Etablir l'équation de la chaleur dans le cas à une dimension cartésienne en l'absence de source de chaleur interne

- Premier principe (bilan enthalpique) appliqué au système compris entre x et $x + dx$, entre t et $t + dt$ en l'absence de travail autre que celui des forces de pression, à pression atmosphérique : $d(\delta H) = d^2 H = \delta^2 Q$
- Dans le cas d'un système monophasé : $d(\delta H) = \delta m c dT = \rho S dx c dT$; x fixé : $dT = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x dt$;
- $\delta^2 Q$: flux entrant moins flux sortant, soit $\delta^2 Q = (\Phi(x, t) - \Phi(x + dx, t)) dt = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_t dx dt$
- Avec $\Phi(x) = \iint_{\text{section}} \vec{J}_Q(x) d\vec{S} = j_{Qx} S$, $\delta^2 Q = -\left(\frac{\partial j_{Qx}}{\partial x}\right)_t S dx dt$
- Loi de Fourier : $\vec{J}_Q(x) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$, d'où $j_{Qx} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_t$;
- finalement : équation de la chaleur $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_x - \frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t = 0$ avec $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ diffusivité, telle que $\tau \sim \frac{L^2}{D}$

45. A) Considérons un barreau métallique de diffusivité thermique $D \approx 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Déterminer le temps caractéristique de diffusion sur 1 cm puis sur 1 m.

b) Un étourdi oublie sa cuillère dans l'eau de cuisson des pâtes. Jusqu'à quelle hauteur le manche va-t-il chauffer pendant la cuisson ? Risque-t-il donc de se brûler en la retirant lorsque les pâtes seront cuites ?

a) Combien de temps (dans une unité adaptée !) faut-il pour que les variations de température se fassent ressentir dans une cave enterrée à 2 m de profondeur ?

Donnée : diffusivité du fer $D \sim 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. diffusivité du sol $D \sim 3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

1) Temps de diffusion sur 1 cm	$\tau_1 \approx \frac{L_1^2}{D}$	$\tau_1 \approx 10 \text{ s}$	
Temps de diffusion sur 1 m	$\tau_2 \approx \frac{L_2^2}{D}$	$\tau_2 \approx 10^5 \text{ s}$	$\frac{\tau_2}{\tau_1} \approx 10^4$

- 2) $L = \sqrt{\tau D}$ avec cuisson des pâtes : $\tau \approx 10 \text{ min} = 600 \text{ s}$ d'où $L = \sqrt{\tau D} \approx 10 \text{ cm}$: mieux vaut avoir pris une longue cuillère, et des pâtes qui cuisent rapidement...
- 3) $\tau_1 \approx \frac{L_1^2}{D} \approx 150 \text{ jours}$

MECANIQUE DES FLUIDES

MFL1 et 2

46. Établir la relation de la statique des fluides dans le seul champ de pesanteur, en admettant que le champ de pression ne dépend que de la coordonnée verticale z .

Démonstration attendue : bilan 1d sur une tranche mésoscopique de surface S et d'épaisseur dz plutôt que bilan sur une particule fluide qui utilise le gradient.

La tranche de fluide subit

- des forces pressantes latérales : résultante nulle, les forces se compensent deux à deux par symétrie, la pression ne dépendant que de z .
- la force pressante sur la face du bas : $+P(z)S \vec{e}_z$; sur la face du haut : $-P(z + dz)S \vec{e}_z$
- son poids $dm \vec{g} = -dm g \vec{e}_z = -\mu S dz g \vec{e}_z$

A l'équilibre, $-\mu S dz g \vec{e}_z + P(z)S \vec{e}_z - P(z + dz)S \vec{e}_z = \vec{0}$ D'où $dP = P(z + dz) - P(z) = -\mu g dz$

47. ♥ En partant de la relation fondamentale de la statique des fluides, exprimer le champ de pression dans le modèle de l'atmosphère isotherme, faire apparaître la hauteur caractéristique et l'interpréter.

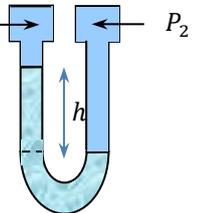
Gaz parfait à T_0 : $P d\tau = dn RT_0$, de masse volumique : $\mu = \frac{dm}{d\tau} = \frac{dnM}{d\tau} = \frac{PM}{RT_0}$

Relation fondamentale de la statique des fluides avec z altitude : $dP = -\mu g dz = -\frac{PM}{RT_0} g dz$

d'où $\frac{dP}{dz} + \frac{Mg}{RT_0} P = 0$ soit avec $H = \frac{RT_0}{Mg}$, $\frac{dP}{dz} + \frac{1}{H} P = 0$, de solution $P(z) = A \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$

Niveau du sol $P(z=0) \stackrel{C.L.}{=} P_0 \stackrel{C.L.}{=} A$; D'où $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$ avec $H = \frac{RT_0}{Mg}$ distance caractéristique des variations de pression

48. ♥♥ Un tube en U est rempli d'un liquide de masse volumique donnée, chacune d'extrémités étant en contact avec une zone de pression P_1 pour l'une et P_2 pour l'autre. Etablir l'expression de la hauteur h du dénivelé en fonction de la différence de pression entre les deux zones étudiées et de la masse volumique du fluide utilisé. **A.N.** pour une différence de pression d'un bar dans le cas du mercure ($d = 13,6$). Donnée : accélération de la pesanteur : $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$



Démarche attendue : Conditions aux limites : $P_A = P_1$ et $P_C = P_2$.

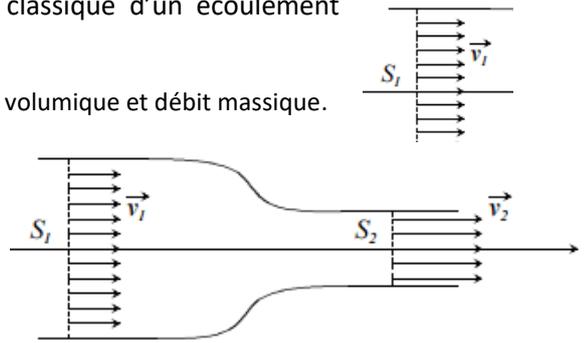
Or $P_C = P_B$ (même fluide, même altitude) et $P_B = P_A + \rho_{eau} dgh$ (relation fondamentale de la statique

des fluides incompressibles) : $P_2 = P_1 + \rho_{eau} dgh$ ou $h = \frac{P_2 - P_1}{\rho_{eau} dg}$ A.N. : $h_{eau} \approx 10 \text{ m}$; $h_{Hg} \approx 70 \text{ cm}$

49. ♥ ♥ Définir et exprimer le débit volumique et le débit massique à travers une surface S (2 expressions pour chaque débit). Exprimer le débit volumique dans le cas simple classique d'un écoulement uniforme dans une section droite (cf. schéma ci-contre).

Soit un écoulement de fluide incompressible : Donner le lien entre débit volumique et débit massique.

Une conduite possède un rétrécissement avec une section diminuant de S_1 vers S_2 ; la vitesse du fluide est supposée uniforme sur la section, v_1 au niveau de S_1 et v_2 au niveau de S_2 . Quelle est la relation liant v_1 , v_2 , S_1 et S_2 ?



Débit volumique D_v : $D_v = \frac{\delta V}{\delta t} = \iint_{M \in S} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \Phi(\vec{v})$

Débit massique D_m : $D_m = \frac{\delta m}{\delta t} = \iint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{j}_m \cdot d\vec{S} = \Phi(\vec{j}_m)$

Écoulement uniforme dans une section droite : $D_v = \frac{\delta V}{\delta t} = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = vS$;

Si $(\rho(M, t) = \rho)$, $D_m = \rho D_v$

$v_1 S_1 = v_2 S_2$

50. ♥ ♥ Circulation sanguine : À la sortie du cœur, l'aorte peut être considérée comme une conduite cylindrique de rayon $a_0 = 1$ cm. Le débit volumique est $D_v = 6 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$ et on suppose que l'écoulement peut être considéré comme stationnaire. La masse volumique du sang est $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Quelle est la vitesse v_0 du sang dans l'aorte ?

- a. Le sang est évacué du cœur dans l'aorte qui se divise ensuite en N_a artères de rayon a_a . Le débit volumique au travers d'une artère est $D_{v,a} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer le nombre N_a d'artères.

Écoulement incompressible : conservation du débit volumique En supposant de plus que les vitesses sont uniformes sur des sections droites : $D_v = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S} = Sv_0$ d'où $v_0 = \frac{D_v}{\pi a_0^2} = 0,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- b. Conservation du débit volumique (« loi des nœuds ») : le débit sortant de l'aorte est égal à la somme des débits sortants dans les artères, d'où : $N_a = \frac{D_v}{D_{v,a}} = 50$.

MFL 3

51. ♥ ♥ On considère un écoulement parfait, incompressible et stationnaire dans une conduite dont la section varie, telle que $S_1 > S_2$ (cf. figure 1).

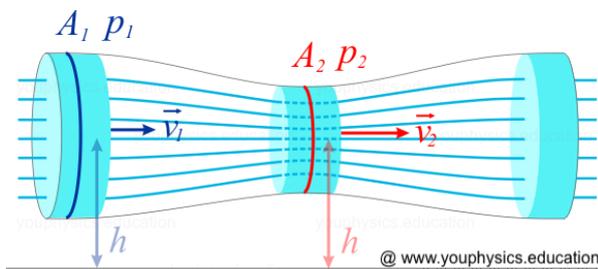


Figure 1

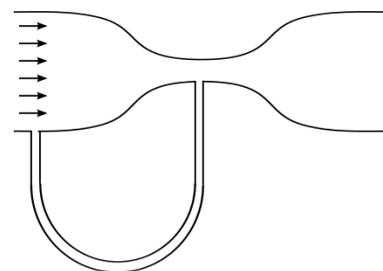


Figure 2

Exprimer la relation entre les vitesses v_1 et v_2 et conclure sur l'évolution de la vitesse dans le rétrécissement. Est-ce cohérent avec les lignes de courant tracées ? Etablir la relation entre les pressions p_1 et p_2 , conclure sur l'effet Venturi. Représenter le niveau de liquide dans le manomètre de la figure 2.

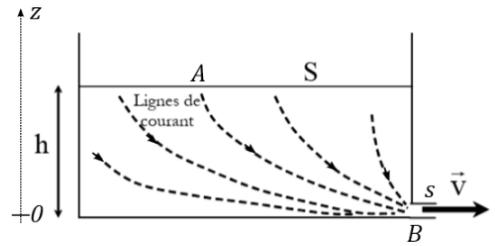
Conservation du débit volumique pour un écoulement incompressible : $D_{v1} = D_{v2}$ soit, pour un écoulement supposé uniforme sur les sections étudiées et des sections droites : $v_1 S_1 = v_2 S_2$

conclusion : $S_1 > S_2$ donne $v_1 < v_2$:

Relation de Bernoulli entre A_1 et A_2 , sur la même ligne de courant : $\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 + gz = cte_{ldc} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 + gz$

conclusion sur les pressions p_1 et p_2 : $p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) > 0$: $p_1 > p_2$: **dépression au niveau des rétrécissements**

52. Vidange de Torricelli : on s'intéresse à une citerne cylindrique, de section S , contenant liquide, munie d'un orifice en bas de la citerne (point B) par lequel le liquide peut s'écouler, la section s du trou étant très faible devant la section S du récipient ($s \ll S$). La surface de la citerne est en contact avec de l'air à la pression P_0 . On suppose qu'au niveau de l'orifice B, le jet est libre et que toutes les conditions sont réunies pour qu'on puisse appliquer la relation de Bernoulli.



- a) ♥ Exprimer la vitesse d'écoulement v_B en fonction de l'accélération g de la pesanteur et de la hauteur de fluide $h(t)$.
- b) ** En déduire le temps T nécessaire pour vider intégralement la citerne.

53. ♥♥ Ecrire une formule de Bernoulli généralisée sous deux ou trois formes à la demande de l'examineur : avec ou sans pompe, turbine, et/ou pertes de charges, en termes de pression ou de hauteur, etc.

Par exemple : Pompe + pertes de charge en pression : $(p_s + \frac{1}{2} \rho v_s^2 + \rho g z_s) - (p_e + \frac{1}{2} \rho v_e^2 + \rho g z_e) = \frac{\mathcal{P}_{pompe}}{D_v} - \Delta p_c$

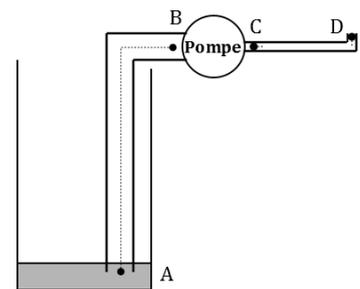
turbine + pertes de charge en hauteur : $(\frac{p_e}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{v_e^2}{g} + z_e) - (\frac{p_s}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{v_s^2}{g} + z_s) = \frac{\mathcal{P}_{turbine}}{g D_m} + \Delta h_c$

54. ♥♥ Soit un bloc pompe qui puise de l'eau au fond d'un puits de profondeur AB . On connaît les sections des canalisations AB et CD , ainsi que le débit volumique D_v .

La pression atmosphérique est de 1000 hPa , la pression de vapeur saturante de l'eau est de $2,3 \text{ kPa}$ (à 20°C).

E est le point le plus haut atteint par le jet d'eau.

- a) Que vaut la pression en B ? Quand y a-t-il risque de cavitation ?
- b) Quelle puissance actionne la pompe ?



L'écoulement étant incompressible et la section constante, $v_A = v_B$ par conservation du débit volumique. En appliquant la relation de Bernoulli sur la ligne de courant AB en l'absence de puissance mécanique transférée :

$$(p_s + \frac{1}{2} \rho v_s^2 + \rho g z_s) = (p_e + \frac{1}{2} \rho v_e^2 + \rho g z_e)$$

avec écoulement incompressible dans une canalisation à section constante : vitesse constante soit

$$p_B = p_{atm} - \rho g AB = 5 \cdot 10^4 \text{ Pa} > p_{sat} : \text{pas de risque de cavitation.}$$

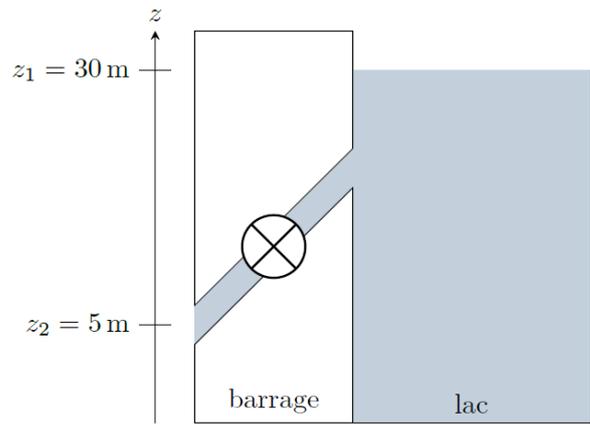
b) Bernoulli généralisé entre A et D , avec $v_A = \frac{D_v}{S_A}$ et $v_D = \frac{D_v}{S_D}$;

$$D_v [(p_s + \frac{1}{2} \rho v_s^2 + \rho g z_s) - (p_e + \frac{1}{2} \rho v_e^2 + \rho g z_e)] = \mathcal{P}_{pompe}$$

$$\mathcal{P}_{pompe} = D_v \left(\frac{1}{2} \rho D_v^2 \left(\frac{1}{S_D^2} - \frac{1}{S_A^2} \right) + \rho g AB \right) \approx D_v \left(\frac{1}{2} \rho \frac{D_v^2}{S_D^2} + \rho g AB \right) \approx 1 \text{ kW}$$

55. ♥♥ L'eau d'un lac de retenue d'un barrage s'écoule par une conduite où se trouve une turbine. La conduite a un diamètre de sortie $D = 2,5\text{m}$ et le débit volumique vaut $Q_{vol} = 25\text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$.

- Calculer la vitesse en sortie de la conduite.
- Calculer la puissance maximale disponible sur la turbine.
- Il y a sur l'installation de la turbine une perte de charge totale $\Delta h_c = 11\text{m}$. Déterminer la puissance réelle en sortie de la turbine.



La vitesse à la surface du lac sera quasiment nulle, étant donné la taille très élevée de la surface du lac devant la section de la conduite par laquelle a lieu l'écoulement. Vitesse en sortie de la conduite :

$$v_s = \frac{Q_{vol}}{S} = \frac{4 Q_{vol}}{\pi D^2} = 5,1\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

En négligeant les pertes de charge pour déterminer la puissance maximale \mathcal{P} disponible sur la turbine, Bernoulli (écoulement PSIH) entre la surface du lac et la sortie de la conduite :

$$\left((P_{atm} + 0 + \rho g z_1) - \left(P_{atm} + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 \right) \right) Q_{vol} = \mathcal{P}$$

$$\boxed{\mathcal{P} = Q_{vol} \left(\rho g (z_1 - z_2) - \frac{1}{2} \rho v_2^2 \right) = 5,8\text{ MW}}$$

Attention signe !! \mathcal{P} est la puissance **cédée par le fluide** à la turbine, donc $\mathcal{P}_i = -\mathcal{P}$!

Puissance dissipée sous forme de pertes de charge ici exprimées sous forme de hauteur : $\mathcal{P}_{dissipée} = Q_{vol} \rho g \Delta h_c$

$$\left((P_{atm} + 0 + \rho g z_1) - \left(P_{atm} + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 \right) \right) Q_{vol} = \mathcal{P}_{réelle} + \mathcal{P}_{dissipée} = \mathcal{P}_{réelle} + Q_{vol} \rho g \Delta h_c = \mathcal{P}$$

A.N. : $\mathcal{P}_{dissipée} = 2,7\text{ MW}$! $\mathcal{P}_{réelle} = \mathcal{P} - \mathcal{P}_{dissipée} = 5,8 - 2,7\text{ MW} = 3,1\text{ MW}$

56. ♥ Dans une conduite horizontale d'une longueur de 525 m où circule un fluide de masse volumique $900\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ avec un débit de $80\text{ m}^3\cdot\text{h}^{-1}$, les frottements font perdre au fluide l'équivalent en pression de 3 cm de fluide pour une longueur de 2 m de canalisation. Quelle serait la puissance minimale de la pompe qui permettrait de faire circuler le liquide sur la longueur de 525 m ?

Perte de charge régulière ; écoulement PSIH : Bernoulli en présence de pertes de charge et d'un élément actif entre l'entrée et la sortie de la canalisation :

$$(p_s + \frac{1}{2} \rho v_s^2 + \rho g z_s) - (p_e + \frac{1}{2} \rho v_e^2 + \rho g z_e) = \frac{\mathcal{P}_{pompe}}{D_v} - \Delta p_{c,tot}$$

or en l'absence de pertes de charge, pour un écoulement horizontal avec une vitesse constante (section constante et écoulement incompressible avec conservation du débit volumique) :

$$(p_s + \frac{1}{2} \rho v_s^2 + \rho g z_s) - (p_e + \frac{1}{2} \rho v_e^2 + \rho g z_e) = 0 \Leftrightarrow (p_s) - (p_e) = 0$$

Pour que la pompe compense les pertes de charge, il faut donc : $\frac{\mathcal{P}_{pompe}}{D_v} - \Delta p_{c,tot} = 0$

avec les pertes de charge totales $\Delta p_{c,tot} = \Delta p_{c,l} L_{tot}$ où $\Delta p_{c,l} = \frac{\rho g \Delta h_c}{L} = 135\text{ Pa/m}$ (pertes de charge linéiques)

$$P_{pompe} = \Delta p_{c,l} D_v = 3\text{ W pour } 1\text{ m} ; P_{pompe} = D_v \Delta p_{c,l} L_{tot} = 1575\text{ W pour } 525\text{ m}.$$

Electromagnétisme

■ EM1

Pour les calculs de champ électrostatique, être particulièrement vigilant quant à la rigueur de la démarche !! étapes attendues :

- 1) Choix des coordonnées,
- 2) Choix du point M quelconque & étudié : le représenter, faire apparaître les vecteurs de la base utilisée
- 3) étude des symétries et invariances,
- 4) choix de la surface de Gauss (soigneusement la définir et vérifier qu'elle passe par M)
- 5) Calcul de la charge intérieure avec éventuelle disjonction des cas,
- 6) calcul du flux sortant à travers la surface de Gauss,
- 7) application du théorème de Gauss,
- 8) vérification de l'homogénéité du résultat attendu...

Distribution	Sphère chargée uniformément en volume (ρ)	Fil infini uniformément chargé (λ)	Cylindre infini chargé en volume (ρ)	Plan $x = 0$ infini chargé (σ)
Champ électrostatique	$r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \vec{e}_r$ $r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$	$r \neq 0 :$ $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$	$r \leq R : \vec{E} = \frac{\rho r}{2 \epsilon_0} \vec{e}_r$ $r \geq R : \vec{E} = \frac{\rho R^2}{2 \epsilon_0 r} \vec{e}_r$	$x > 0 : \vec{E} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{e}_x$ $x < 0 : \vec{E} = -\frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{e}_x$

57. ♥ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un cylindre infini uniformément chargé en volume, avec une densité volumique de charge ρ .
58. ♥ ♥ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par une sphère de rayon R uniformément chargée en volume, avec une densité volumique de charge ρ .
59. ♥ ♥ Déterminer par application du théorème de Gauss le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un plan infini uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique de charge σ .
60. . (pour les ♥ ♥ , guider le calcul du flux).

Attention à la rigueur de la justification de l'expression du flux sortant !

On décompose le flux à travers la surface de Gauss fermée en une somme de flux à travers les différentes surfaces constituant la surface de Gauss fermée

$$\Phi = \oiint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot \overrightarrow{dS}(P) = \Phi_{haut} + \Phi_{bas} + \Phi_{lat} = \iint_{P \in S_{haut}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_{haut}} + \iint_{P \in S_{bas}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_{bas}} + \iint_{P \in S_{lat}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_{lat}}$$

$\Phi_{haut} : \vec{E}$ et $\overrightarrow{dS_{haut}}$ suivant \vec{u}_z . \vec{E} est constant sur S_{haut} :

$$\begin{aligned} \Phi_{haut} &= \iint_{P \in S_{haut}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_{haut}} = \iint E(z) \vec{u}_z \cdot dS_{haut} \vec{u}_z \stackrel{\substack{\vec{E} \text{ et } \overrightarrow{dS} \\ \text{colinéaires}}}{=} \iint E(z) \cdot dS_{haut} \stackrel{\substack{E(z) \text{ constant} \\ \text{sur } S_{haut} \text{ à } z=cte}}{=} E(z) \iint dS_{haut} \\ &= E(z) \cdot S_{haut} = E(z) \cdot S \end{aligned}$$

$\Phi_{bas} : \vec{E} = E(-z) \vec{u}_z$ et $\overrightarrow{dS_{bas}} = dS_{bas} (-\vec{u}_z)$. De plus, $\vec{E}(-z)$ est constant sur S_{bas} :

$$\Phi_{bas} = \iint_{P \in S_{bas}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_{bas}} = \iint E(-z) (\vec{u}_z) \cdot dS_{bas} (-\vec{u}_z) \stackrel{\substack{\vec{E} \text{ et } \overrightarrow{dS} \\ \text{colinéaires}}}{=} \iint -E(-z) \cdot dS_{bas} \stackrel{\substack{E(-z) \text{ constant} \\ \text{sur } S_{bas} \text{ à } -z=cte}}{=} -E(-z) \iint dS_{bas}$$

De plus, $\pi_s = (xOy)$ étant plan de symétrie de la distribution de charges, $E(-z) = -E(z)$, d'où

$$\Phi_{bas} = -E(-z) \iint dS_{bas} = E(z) \iint dS_{bas} = E(z) \cdot S_{bas} = E(z) \cdot S = \Phi_{haut}$$

$\Phi_{lat} : \vec{E}$ et $\overrightarrow{dS_{lat}}$ orthogonaux.

$$\Phi_{lat} = \iint_{P \in S_{lat}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS_{lat}} = 0$$

$$\Phi = \Phi_{haut} + \Phi_{bas} + \Phi_{lat} = 2 E(z) \cdot S$$

61. ♥ ♥ Etablir l'expression de la capacité d'un condensateur plan idéal constitué de deux plaques conductrices de surface S , séparées d'une distance $e \ll S$.

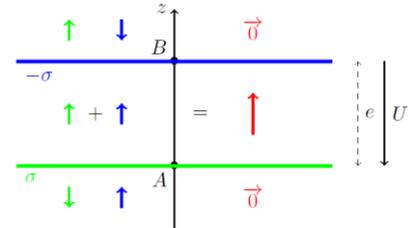
Cf. calcul du champ créé par un plan infini chargé avec σ : $z > 0$: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0} \vec{u}_z$ et $z < 0$: $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2 \varepsilon_0} \vec{u}_z$

Champ créé par l'armature 1 :

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2 \varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Champ créé par l'armature 2 :

$$\vec{E}_2 = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2 \varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z > e \\ \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z < e \end{cases}$$



Principe de superposition : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } z > e \text{ ou } z < 0 \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } 0 < z < e \end{cases}$$

Détermination de V : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, d'après les symétries, V ne dépend que de z : $-\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dz} \vec{u}_z$

$$V = -\int E \cdot dz + cte = -\int \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot dz + cte = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} z + cte$$

Détermination de U : $U = V_1 - V_2 = V(z=0) - V(z=e) = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}$

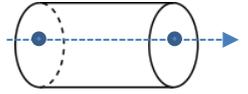
capacité C définie par : $C = \frac{Q}{U}$ soit $C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S \varepsilon_0}{\sigma e} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$

Questions de cours de physique incontournables -suite- ATS –23-24

Electromagnétisme - suite

■ EM2

62. ♥ Un conducteur cylindrique de conductivité γ , de longueur L et de section S , d'axe (Ox) de vecteur unitaire \vec{u}_x , est placé dans un champ électrique \vec{E} parallèle à son axe. Le courant créé est supposé uniforme sur une section du conducteur. Rappeler la forme locale et la forme intégrale de la loi d'Ohm en précisant bien les notations. En déduire la valeur de la résistance du conducteur en fonction des caractéristiques du conducteur.



$$\begin{aligned} \text{Loi d'ohm locale : } \vec{j}(x) &= \gamma \vec{E} \text{ donc } \vec{j}(x) = j(x) \vec{u}_x; I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint j \cdot dS = j(x)S = \gamma E(x)S; \\ \text{Or } dV &= -\vec{E} \cdot d\vec{OM} \text{ avec } U = \int_{V_2}^{V_1} dV = V_1 - V_2 = \Delta V = - \int_{M_2}^{M_1} \vec{E} \cdot d\vec{OM} = + \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \cdot d\vec{OM} = EL; \\ \text{loi d'Ohm globale : } R &= \frac{U}{I} = \frac{EL}{\gamma E(x)S} = \frac{L}{\gamma S}. \end{aligned}$$

■ EM3

63. ♥♥ Un conducteur cylindrique infini de rayon a est parcouru par un courant d'intensité I uniformément réparti dans toute section du conducteur. Exprimer le vecteur densité de courant volumique \vec{j} en fonction de I et a . Calculer le champ magnétique créé en tout point de l'espace.

$$I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = jS = j\pi a^2, \text{ soit } j = \frac{I}{\pi a^2} \text{ et } \vec{j} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z$$

$$\text{Eude des symétries et invariances : } \vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$$

Contour d'Ampère : ici, cercle de rayon r passant par le point M étudié (attention !! orienter !); calcul de la circulation :

$$\oint_{(r)} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \oint_{(r)} B(r) \vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = 2\pi r B(r)$$

$$\text{Courant enlacé : } \text{si } r \geq a, I_{\text{enlacé}} = I; \text{ si } r \leq a, I_{\text{enlacé}} = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z \cdot \pi r^2 \vec{e}_z = \frac{I r^2}{a^2}$$

$$\text{théorème d'Ampère : } \oint_{(r)} \vec{B} \cdot d\vec{M} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

$$\text{si } r \leq a, \text{ alors } \vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta; \text{ si } r \geq a, \text{ alors } \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta.$$

64. ♥ On considère un solénoïde d'axe Oz et de centre O , de longueur infinie, constitué de spires circulaires jointives enroulées sur un cylindre de rayon R , parcourues par un courant d'intensité I . Soit $n = \frac{N}{L}$ le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde. On admet que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul.

$$\text{Symétries et invariances : } \vec{B}(M) = B_z(r) \vec{e}_z = B(r) \vec{e}_z$$

Contour d'Ampère (attention ! l'orienter !) : ici, théorème d'Ampère deux fois de suite : rectangle de longueur L quelconque passant par le point M étudié à l'intérieur du solénoïde, de hauteur h telle que, dont les deux parties horizontales sont repérées par les distances à l'axe r_i et r_j :

Le contour d'Ampère est entièrement à l'intérieur du solénoïde : circulation :

$$\oint_{(C_1)} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = (B(r_1) - B(r_2))L \text{ et } I_{\text{enlacé}} = 0 : \text{ conclusion : champ intérieur uniforme}$$

- Le contour d'Ampère est à cheval entre l'intérieur et l'extérieur du solénoïde ;

$$\oint_{(C_1)} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = (B_{\text{int}} - B_{\text{ext}})L = B_{\text{int}}L \text{ et } I_{\text{enlacé}} = nLI :$$

conclusion : $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_{\text{axe}}$ à l'intérieur du solénoïde. Champ uniforme, lignes de champ parallèles à l'axe.

65. ♥ Considérons un solénoïde d'axe Oz , de longueur $\ell = 40 \text{ cm}$, de section $S = 20 \text{ cm}^2$, contenant $N = 200$ spires, parcouru par un courant I . Il crée un champ magnétique $\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 n I \vec{e}_z$ à l'intérieur du solénoïde. Exprimer et calculer son inductance propre L . Données : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

• Orienter I puis $d\vec{S}$ avec I .

• Calcul du flux de \vec{B}_{int} à travers une spire de la bobine : $\Phi_1 = \iint_{1 \text{ spire}} \vec{B}_{\text{int}} \cdot d\vec{S} = \mu_0 n I S = \frac{\mu_0 N I S}{\ell}$

• Calcul du flux à travers les N spires de la bobine : $\Phi_N = N \Phi_1 = \frac{\mu_0 N^2 I S}{\ell}$

• L'inductance de la bobine longue est : $L = \frac{\Phi}{I} : \quad L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} \quad \text{A.N. : } L = 0,25 \text{ mH}$

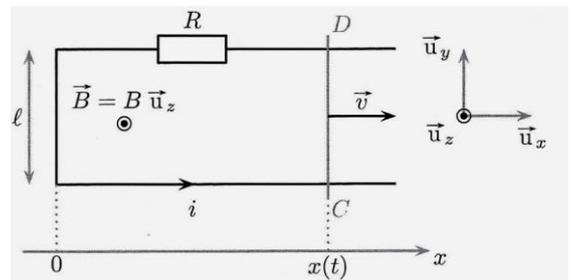
■ EM4

66. ♥ ♥ On considère une barre métallique posée sur deux rails conducteurs ; la distance entre les 2 points de contact est $\ell = CD$. On note R la résistance du circuit électrique, supposée constante.

La barre [CD] est la seule partie mobile du circuit. Elle est mise en mouvement par un opérateur qui exerce une force $\vec{F}_{op} = F_{op} \vec{u}_x = cte$.

L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ orthogonal au plan des rails. On négligera les phénomènes d'auto-induction ainsi que les frottements.

Effectuer une analyse qualitative des phénomènes mis en jeu, puis établir l'équation électrique et l'équation mécanique vérifiées par le système.



⇒ **Analyse qualitative** : la force exercée par l'opérateur met en mouvement la barre, ce qui augmente la surface du circuit donc le flux de \vec{B}_0 : d'après la loi de Faraday, apparition d'une fém induite donc d'un courant induit dans le circuit ; la barre est alors soumise à une force de Laplace qui vient, selon la loi de modération de Lenz, s'opposer à la force de l'opérateur (force de freinage)

⇒ **Equation électrique**

1. Orienter i : Choix orientation : Orientation arbitraire de i .

2. Orienter la surface

3. Calcul du flux : $\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = Bax$

4. Loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ or $\Phi = BS = Bax$, donc $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bav = e$

5. Schéma électrique équivalent, puis équation électrique :

Loi des mailles et caractéristique des dipôles : $e - Ri = 0$ soit $Ri = -Bav$ (E.E.)

⇒ **Equation mécanique**

1. Système ; 2. Bilan des actions mécaniques extérieures : poids \vec{P} ; réactions des rails \vec{R} (normale car pas de frottements) ; Force \vec{F}_{op} ; Force de Laplace : $\vec{F}_{Laplace} = iBa \vec{u}_x$ (attention !!! se déplacer dans le sens de i le long de la tige !!)

3. PFD appliqué à la tige 4. projeté sur \vec{u}_x : $m \frac{dv}{dt} = F_{op} + iBa$ (E.M.)

67. ♥♥ Suite des rails de Laplace générateur (question précédente). On donne les équations électrique et mécanique obtenues : $Ri = -Bav$ (E.E.) et $m \frac{dv}{dt} = F_{op} + iBa$ (E.M.) établir l'expression de la vitesse de la barre ; commenter.

On découple le système : $m \frac{dv}{dt} = F_{op} - (B^2 a^2 / R)v$

La fem induite génère une force (de Laplace) de type frottement fluide $-(B^2 a^2 / R)v$ (cf loi de modération de Lenz : elle s'oppose au mouvement lui ayant donné naissance)

Equation différentielle en v : $\dot{v} + \frac{v}{\tau} = \frac{F_{op}}{m}$ avec $\tau = \frac{mR}{(Ba)^2}$

Résolution en supposant la vitesse initiale nulle : $v = v_{lim} (1 - \exp(-t/\tau))$ avec $v_{lim} = F_{op} \tau / m = F_{op} R / (Ba)^2$.

68. ♥ Suite des rails de Laplace générateur (question précédente). On donne les équations électrique et mécanique obtenues : $Ri = e = -Bav$ (E.E.) et $m \frac{dv}{dt} = F_{op} + iBa$ (E.M.) établir le bilan énergétique associé ; commenter.

Méthode :

- Multiplier (EE) par i : puissances électriques
- Multiplier (EM) par v : puissances mécaniques
- Elimination du terme de couplage

On multiplie (EE) par i : $ei = Ri^2 = -Ba \dot{x} i$

On multiplie (EM) par \dot{x} : $m\dot{x}\dot{v} = F\dot{x} + F_{Lx}\dot{x} = \frac{d(\frac{1}{2}m\dot{x}^2)}{dt} = F\dot{x} + Bia \dot{x}$

- Terme de couplage $Ba\dot{x}i$

$ei = -Ba\dot{x}i$ puissance fournie par le générateur induit

$F_{Lx}\dot{x} = Ba\dot{x}i$ puissance fournie par les forces de Laplace (négative, force opposée au déplacement)

La somme de ces deux puissances est nulle. Il y a conversion de la puissance mécanique apportée par l'opérateur en puissance cinétique (qui met la tige en mouvement) et en puissance électrique, dissipée par effet Joule.

On admettra que cette propriété est toujours vraie : $\mathcal{P}_{induction} + \mathcal{P}_{Laplace} = 0$

D'où $\frac{d(\frac{1}{2}m\dot{x}^2)}{dt} = F\dot{x} - Ri^2 = \frac{dEc}{dt}$

La puissance mécanique apportée par l'opérateur est convertie en puissance cinétique (qui met la tige en mouvement) et en puissance électrique, dissipée par effet Joule.

Ondes

■ MK7

69. ♥ Rappel l'équation d'onde de d'Alembert. Donner l'expression d'une onde plane progressive unidimensionnelle se propageant (dans le sens direct puis indirect) sans atténuation ni déformation, ♥♥ Cas

particulier des ondes sinusoïdales ; relations entre les différentes grandeurs caractéristiques (préciser leurs unités)

Equation d'onde de d'Alembert : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

Onde progressive se propageant dans la direction de l'axe (Ox), dans le sens positif de cet axe, sans atténuation ni déformation : $s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = F(x - ct)$; dans le sens négatif : $s(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right) = G(x + ct)$

Cas sinusoïdal dans le sens direct : $s(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$; A amplitude, ω pulsation ; c célérité de l'onde ; k norme du vecteur d'onde ; φ_0 la phase initiale de l'onde à l'origine O.

1. Analogie et relations

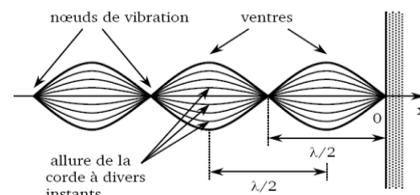
	Période	Fréquence	Pulsation	Relations	
Périodicité temporelle	T	f ou ν	ω	$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$	$ k = \frac{\omega}{c}$ $\lambda = c T$
Périodicité spatiale	λ	σ	k		

2. Dimensions, unités

	φ_0	T	ω	ν	c	x	k	σ
Dimension	0	T	T^{-1}	T^{-1}	L. T^{-1}	L	L^{-1}	L^{-1}
Unité (SI)	rad	s	Rad. s^{-1}	s^{-1}	m. s^{-1}	m	Rad.m $^{-1}$	m^{-1}

70. ♥♥ Donner la forme de l'expression d'une onde stationnaire (cas à 1D) ; Cas particulier des ondes sinusoïdales : donner l'expression de l'onde, représenter en expliquant l'allure associée. ♥ Etablir l'expression de la position des nœuds.

• Onde stationnaire unidimensionnelle : $s(x, t) = f(x).g(t)$, dont les variables t et x sont séparées ; ne se propage pas (/ex., les extrema varient de valeur dans le temps mais sont toujours au même endroit).



• Cas sinusoïdal : $s(x, t) = A \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi)$; modulation spatiale de l'amplitude : $\mathcal{A}(x) = |A \cos(kx + \psi)|$. cf. schéma ci-contre : fuseaux de longueur $\frac{\lambda}{2}$.

• Positions x_N des nœuds telles que $\forall t, y(0, t) = 0$ avec $y(x, t) = A \sin(\omega t + \varphi) \sin(kx)$, soit $\sin(kx_N) = 0$ d'où $kx_N = 0[\pi]$

Les différents nœuds ont alors comme positions $kx_{N,p} = p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$ soit $\frac{2\pi}{\lambda} x_{N,p} = p\pi$ ou encore $x_{N,p} = \frac{p\lambda}{2}$

Distance entre deux nœuds successifs : $x_{N,p+1} - x_{N,p} = \frac{\lambda}{2}$. Tout fuseau a une taille de $\frac{\lambda}{2}$.

71. Dans le cas d'une corde de longueur L fixée aux deux extrémités (en $x = 0$ et en $x = L$) oscillant selon $y(x, t) = A \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi)$, ♥♥ donner les caractéristiques des modes propres en rappelant le lien entre les différentes grandeurs caractéristiques. ♥ Faire la démonstration.

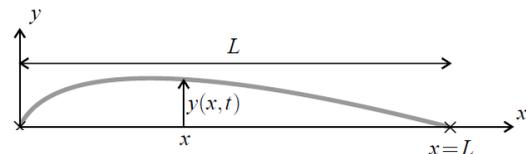
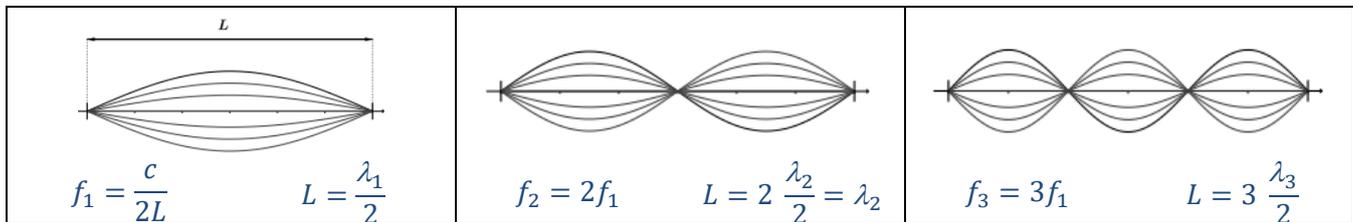


Figure 3.16 – Corde vibrante fixée à ses deux extrémités.

♥♥ Modes propres : avec n entier $L = n \frac{\lambda_n}{2}$; $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = n \frac{\pi}{L}$; $\lambda_n = cT_n = \frac{c}{f_n} = \frac{2L}{n}$; $f_n = n \frac{c}{2L}$; $\omega_n = 2\pi f_n = n \frac{\pi c}{L}$;

Les premiers modes :



♥ Démonstration : Exploitation des deux conditions aux limites : $\forall t, y(0, t) = 0$ et $\forall t, y(L, t) = 0$

Avec $y(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$, les conditions aux limites donnent : $\cos(\psi) = 0$ (1) et $\cos(kL + \psi) = 0$ (2)

$$(1) \Rightarrow \psi = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad (2) \Rightarrow \cos\left(kL \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n L = n\pi, \text{ avec } n \text{ entier}$$

■ EM5

72. ♥ ♥ Établir l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide pour le champ électrique ou magnétique. Identifier à l'aide d'une analyse dimensionnelle la célérité c .

a) Équation pour le champs électrique \vec{E}

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) \stackrel{\substack{\text{formule d'analyse} \\ \text{vectorielle}}}{=} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \overrightarrow{\Delta} \vec{E} \stackrel{\substack{\text{M.G.} \\ \text{div}(\vec{E})=0}}{=} -\overrightarrow{\Delta} \vec{E}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) \stackrel{\substack{\text{M.F.} \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}}{=} \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t} \stackrel{\substack{\text{M.A.} \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}}{=} -\frac{\partial\left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)}{\partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{En égalisant les deux termes : } \overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\Delta} \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

$$\left| \text{Par analyse dimensionnelle : } \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \text{ donc } \boxed{\overrightarrow{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \right.$$

b) Équation pour le champ magnétique \vec{B}

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{B}) - \overrightarrow{\Delta} \vec{B}$$

$$\text{Avec (M}\Phi\text{) : } \text{div}(\vec{B}) = 0 \text{ soit } \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = -\overrightarrow{\Delta} \vec{B}$$

$$\text{Avec (MA) dans le vide : } \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ d'où } \overrightarrow{\text{rot}}\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\overrightarrow{\Delta} \vec{B} \text{ ou}$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\overrightarrow{\Delta} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E})}{\partial t}$$

$$\text{Or selon (MF) : } \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ d'où } \overrightarrow{\Delta} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad \text{D'où } \boxed{\overrightarrow{\Delta} \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

$$[\overrightarrow{\Delta} \vec{a}] = [\vec{a}] \times \frac{1}{L^2} \quad \left[\frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial t^2}\right] = [\vec{a}] \times \frac{1}{t^2} \quad \text{Donc } [\epsilon_0 \mu_0] = \frac{1}{c^2} = \frac{T^2}{L^2} \quad \mathbf{c} \text{ célérité de l'onde en m/s}$$

73. ♥ ♥ Le champ électrique d'une onde électromagnétique plane est donné par : $\vec{E} = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{e}_z$.

Établir l'expression du champ magnétique associé à cette onde. Représenter les vecteurs \vec{E} , \vec{B} et \vec{k} .

$$\text{Variable } t - \frac{x}{c} : \text{propagation selon } + \vec{e}_x \text{ puis relation de structure : } \vec{B} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c} \quad \vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{e}_y$$

74. ♥ Dans le cas d'une OemPPH polarisée rectilignement selon \vec{e}_y , se propageant dans le sens direct dans la direction \vec{e}_x , donner l'expression du champ électrique et établir la relation de dispersion associée (relation entre k et ω).

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y ; \text{ propagation selon } \vec{e}_x : \vec{k} = k\vec{e}_x, \text{ relation de structure :}$$

Relation de dispersion à démontrer en exploitant l'expression de l'OPPH : calcul des dérivées partielles par rapport au temps et à x , qu'il faut injecter dans l'équation de d'Alembert : $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

$$\text{Ici, } \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y$$

$$\text{D'où } \Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Leftrightarrow \forall t, k^2 E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y = \frac{1}{c^2} \omega^2 E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y$$

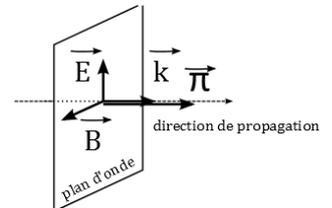
$$\text{En simplifiant, on trouve } k^2 = \frac{1}{c^2} \omega^2 \quad \text{soit en définissant } \omega \text{ et } k > 0 : k = \frac{\omega}{c}$$

75. ♥♥ Expression du vecteur de Poynting, de son lien avec la puissance. ♥ Etablir sa valeur moyenne pour une OemPPH de champ électrique : $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$.

$$\text{Vecteur de Poynting : } \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \text{ avec } \mathcal{P}_{em} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi} \cdot \vec{dS}$$

$$\text{Cas d'une OemPPH : relation de structure } \vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

D'où : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_k = \epsilon_0 c E^2 \vec{u}_k$: Le vecteur de Poynting est colinéaire à la direction de propagation de l'onde



$$\text{vecteur de Poynting moyen : } \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \langle \epsilon_0 c E^2 \rangle = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}$$

76. ♥ Pour une onde électromagnétique stationnaire telle que $\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$ et $\vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z$, établir les positions des nœuds et des ventres (conducteur parfait en $x \geq 0$)

Un nœud est caractérisé par une amplitude nulle et un ventre par une amplitude maximale.

Abscisses (négatives, ici) des nœuds et des ventres, avec $m \in \mathbb{Z}$:

	\vec{E}	\vec{B}
Nœuds	$\sin(kx_N) = 0$ soit $kx_{N,m} = m\pi$ et $x_{N,m} = \frac{m\pi}{k} = m \frac{\lambda}{2}$	$\cos(kx_N) = 0$ soit $kx_{N,m} = \frac{\pi}{2} + m\pi$ et $x_{N,m} = \frac{\pi}{2k} + \frac{m\pi}{k} = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2}$
Ventres	$\sin(kx_V) = \pm 1$ soit $kx_{V,m} = \frac{\pi}{2} + m\pi$ D'où $x_{V,m} = \frac{\pi}{2k} + \frac{m\pi}{k} = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2}$	$\cos(kx_V) = \pm 1$ soit $kx_{V,m} = m\pi$ et $x_{V,m} = \frac{m\pi}{k} = m \frac{\lambda}{2}$

77. ♥♥ Considérons une cavité vide taillée à l'intérieur d'un bon conducteur, que l'on modélise par un conducteur parfait, entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$. Une onde électromagnétique arrive en incidence normale sur la face $x = L$, où elle est réfléchi ; elle se propage en sens inverse jusqu'à rencontrer l'autre face $x = 0$, etc. La superposition des ondes incidente et réfléchi donne une onde stationnaire, le champ électrique étant de la forme : $\vec{E}(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$. Donner les **modes propres de la cavité** (pulsation, fréquence, longueur d'onde) et représenter l'allure des trois premiers modes. ♥ Faire la démonstration.

équation de propagation d'Alembert : $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

On en déduit : $\frac{d^2 f}{dx^2} \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y + \frac{1}{c^2} f(x) \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y = \vec{0}$

En simplifiant : $\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f(x) = 0$ avec $k = \frac{\omega}{c}$ d'où $f(x) = A \cos(kx + \psi)$ soit

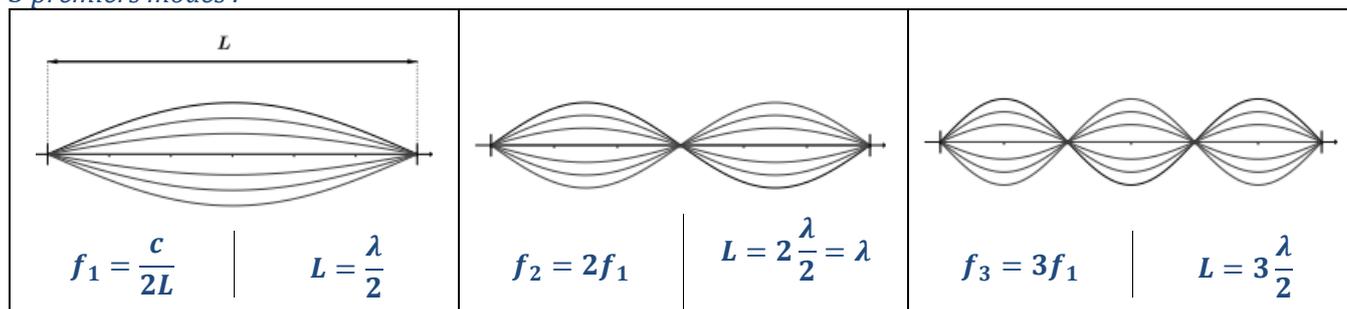
$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

C.L. 1 : $\forall t, \vec{E}(x=0, t) = \vec{0}$ soit $\cos(\psi) = 0$ d'où par ex. $\psi = +\frac{\pi}{2}$

C.L. 2 : $\forall t, \vec{E}(x=L, t) = \vec{0}$ soit $\cos(kL + \psi) = 0 = \cos\left(kL + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n L = n\pi$, avec n entier

On en déduit $k_n = n \frac{\pi}{L}$; $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}$ soit $L = n \frac{\lambda_n}{2}$; $\omega_n = k_n c = n \frac{\pi c}{L}$ $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \frac{c}{2L}$

3 premiers modes :



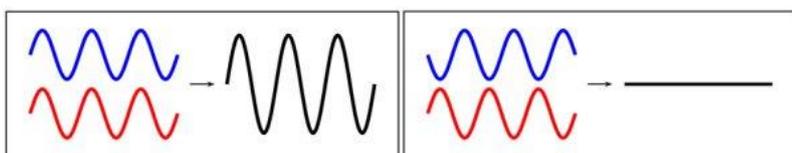
■ EM6

78. ♥♥ Donner en justifiant les conditions d'obtention de franges sombres et brillantes sur le déphasage puis sur la différence de marche et ♥ l'ordre d'interférence.

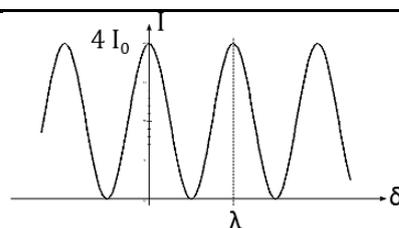
Avec

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{\delta}{\lambda}\right) \right] = 2I_0 [1 + \cos(\Delta\varphi)]$$

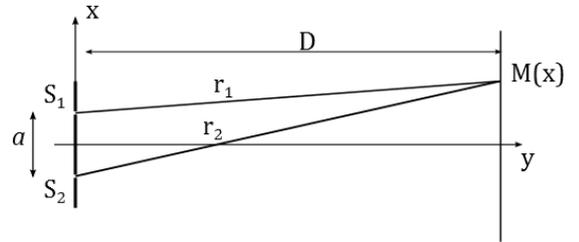
	frange brillante	frange noire
interférences	constructives	destructives
intensité	Maximale : $I(M) = 4I_0$	Minimale : $I(M) = 0$
Cosinus	si $\cos\left(2\pi \frac{\delta}{\lambda}\right) = 1$	si $\cos\left(2\pi \frac{\delta}{\lambda}\right) = -1$
différence de phase $\Delta\varphi$	$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 0 [2\pi] = 2m\pi \quad m \in \mathbb{Z}$	$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = \pi [2\pi] = 2\pi\left(m + \frac{1}{2}\right) \quad m \in \mathbb{Z}$
différence de marche δ	$\delta = m\lambda \quad m \in \mathbb{Z}$	$\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad m \in \mathbb{Z}$
ordre d'interférence	$p = \frac{\delta}{\lambda}$ entier : $p = m \quad m \in \mathbb{Z}$	$p = \frac{\delta}{\lambda}$ demi-entier : $p = m + \frac{1}{2} \quad m \in \mathbb{Z}$



Interférences **constructives** (à gauche) et **destructives** (à droite)



79. ♥♥ Donner l'expression de l'interfrange dans le cas du dispositif des trous d'Young représenté ci-contre en expliquant les différents termes. ♥ Etablir cette expression.



Interfrange i : distance entre 2 franges successives de même nature (2 franges sombres ou 2 franges brillantes).

Entre 2 franges successives identiques, l'ordre d'interférence varie de 1, soit $\Delta\delta = \lambda$ avec $\delta = \frac{ax}{D}$

Distance sur le plan de l'écran entre deux points correspondant à cette différence de marche de λ : $\frac{a \Delta x}{D} = \lambda = \frac{ai}{D}$

Interfrange : $\Delta x = i = \frac{\lambda D}{a}$