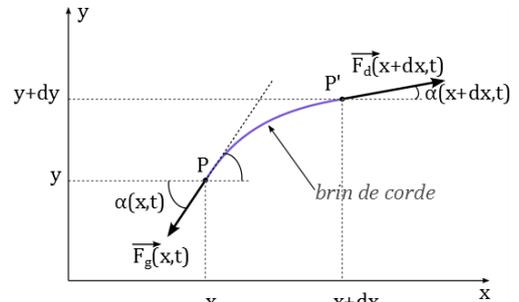


■ **Formulaire : chapitres MK1 à MK7, EM1 à EM6**

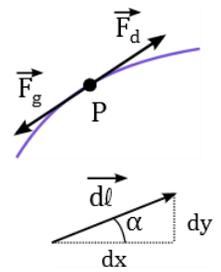
1. ** Considérons une onde sur une corde « idéale », supposée inextensible (aucune élasticité), sans raideur (infiniment souple), homogène, de masse linéique μ , tendue horizontalement avec une force constante F_0 et excitée verticalement à son extrémité A. Le poids de la corde est négligé devant la tension de la corde, de telle sorte qu'à l'équilibre elle est horizontale, selon la direction (Ox) .



On néglige tout amortissement, et on considère de petits mouvements transversaux selon (Oy) . En appliquant la relation fondamentale de la dynamique sur un brin de corde de longueur $d\ell$ compris entre les points P et P' (cf. schéma), et en la projetant sur les axes (Ox) et (Oy) , établir l'équation de propagation d'une onde transversale sur cette corde.

Méthode attendue :

- Hypothèse d'une corde sans raideur : Si on note \vec{F} la tension de la corde orientée de gauche à droite, $\vec{F}_g(x, t) = -\vec{F}(x, t) = -\vec{F}_d(x, t)$
- Système de longueur élémentaire $d\ell$ et de masse $dm = \mu d\ell$ avec $dx = d\ell \cos\alpha \approx dx$
- Forces exercées sur le système : $\vec{F}_g(x, t) = -\vec{F}(x, t)$ et $\vec{F}_d(x + dx, t) = +\vec{F}(x + dx, t)$
- Relation fondamentale de la dynamique : $dm \vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_d$ soit $\mu dx \vec{a} = -\vec{F}(x, t) + \vec{F}(x + dx, t)$
- Projection sur Ox avec $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$ soit $\vec{a} \cdot \vec{u}_x = 0 : 0 = -F(x, t) \cos(\alpha(x, t)) + F(x + dx, t) \cos(\alpha(x + dx, t))$



soit à l'ordre 1 : $F(x, t) = F(x + dx, t) = F_0$

- Projection sur Oy : $\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -F(x, t) \sin(\alpha(x, t)) + F(x + dx, t) \sin(\alpha(x + dx, t))$

soit à l'ordre 1 : $\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_0 [\alpha(x + dx, t) - \alpha(x, t)]$ ou $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x}$

avec $\alpha \approx \tan \alpha \approx \frac{\partial y}{\partial x}$ est la pente de la corde, on a $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

- Equation d'onde de d'Alembert : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

2. ♥ Rappeler l'équation d'onde de d'Alembert scalaire. Donner l'expression d'une onde plane progressive unidimensionnelle se propageant (dans le sens direct puis indirect) sans atténuation ni déformation, ♥♥ Cas particulier des ondes sinusoïdales ; relations entre les différentes grandeurs caractéristiques (préciser leurs noms et leurs unités)

Equation d'onde de d'Alembert : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

Onde progressive se propageant dans la direction de l'axe (Ox) , dans le sens positif de cet axe, sans atténuation ni déformation : $s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = F(x - ct)$; dans le sens négatif : $s(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right) = G(x + ct)$

Cas sinusoïdal dans le sens direct : $s(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$; A amplitude, ω pulsation ; c célérité de l'onde ; k norme du vecteur d'onde ; φ_0 la phase initiale de l'onde à l'origine O.

1. Analogie et relations

	Période	Fréquence	Pulsation	Relations
--	---------	-----------	-----------	-----------

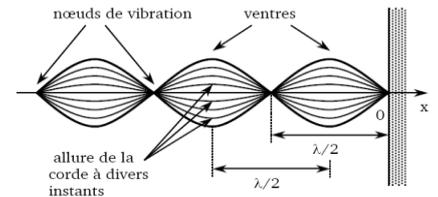
Périodicité temporelle	T	f ou ν	ω	$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$	$ k = \frac{\omega}{c}$ $\lambda = cT$
Périodicité spatiale	λ	σ	k	$k = 2\pi\sigma = \frac{2\pi}{\lambda}$	

2. Dimensions, unités

	φ_0	T	ω	ν	c	x	k	σ
Dimension	0	T	T ⁻¹	T ⁻¹	L.T ⁻¹	L	L ⁻¹	L ⁻¹
Unité (SI)	rad	s	Rad. s ⁻¹	s ⁻¹	m. s ⁻¹	m	Rad.m ⁻¹	m ⁻¹

3. ❤ Donner l'expression d'une onde stationnaire (cas à 1D) ; Cas particulier des ondes sinusoïdales : donner l'expression de l'onde, représenter en expliquant l'allure associée. Etablir l'expression de la position des nœuds.

• Onde stationnaire unidimensionnelle : $s(x, t) = f(x).g(t)$, dont les variables t et x sont séparées ; ne se propage pas (/ex., les extrema varient de valeur dans le temps mais sont toujours au même endroit).



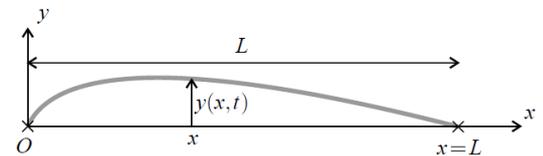
• Cas sinusoïdal : $s(x, t) = A \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi)$; modulation spatiale de l'amplitude : $\mathcal{A}(x) = |A \cos(kx + \psi)|$. cf. schéma ci-contre : fuseaux de longueur $\frac{\lambda}{2}$.

• Positions x_N des nœuds telles que $\forall t, y(0, t) = 0$ avec $y(x, t) = A \sin(\omega t + \varphi) \sin(kx)$, soit $\sin(kx_N) = 0$ d'où $kx_N = 0[\pi]$

Les différents nœuds ont alors comme positions $kx_{N,p} = p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$ soit $\frac{2\pi}{\lambda} x_{N,p} = p\pi$ ou encore $x_{N,p} = \frac{p\lambda}{2}$

Distance entre deux nœuds successifs : $x_{N,p+1} - x_{N,p} = \frac{\lambda}{2}$. Tout fuseau a une taille de $\frac{\lambda}{2}$.

4. Dans le cas d'une corde de longueur L fixée aux deux extrémités (en $x = 0$ et en $x = L$) oscillant selon $y(x, t) = A \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi)$, ❤❤ donner les caractéristiques des modes propres en rappelant le lien entre les différentes grandeurs caractéristiques.



Corde vibrante fixée à ses deux extrémités.

❤ Faire la démonstration.

❤❤ Modes propres : avec n entier $L = n \frac{\lambda_n}{2}$; $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = n \frac{\pi}{L}$; $\lambda_n = cT_n = \frac{c}{f_n} = \frac{2L}{n}$; $f_n = n \frac{c}{2L}$; $\omega_n = 2\pi f_n = n \frac{\pi c}{L}$;

Les premiers modes :

<p>$f_1 = \frac{c}{2L}$ $L = \frac{\lambda_1}{2}$</p>	<p>$f_2 = 2f_1$ $L = 2 \frac{\lambda_2}{2} = \lambda_2$</p>	<p>$f_3 = 3f_1$ $L = 3 \frac{\lambda_3}{2}$</p>
--	--	--

❤ Démonstration : Exploitation des deux conditions aux limites : $\forall t, y(0, t) = 0$ et $\forall t, y(L, t) = 0$

Avec $y(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$, les conditions aux limites donnent : $\cos(\psi) = 0$ (1) et $\cos(kL + \psi) = 0$ (2)

(1) $\Rightarrow \psi = \pm \frac{\pi}{2}$ et (2) $\Rightarrow \cos(kL \pm \frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n L = n\pi$, avec n entier

5. ❤️❤️ Établir l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide pour le champ électrique ou magnétique. Identifier à l'aide d'une analyse dimensionnelle la célérité c .

a) **Équation pour le champs électrique \vec{E}**

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) \stackrel{\substack{\text{formule d'analyse} \\ \text{vectorielle}}}{=} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \overrightarrow{\Delta} \vec{E} \stackrel{\substack{\text{M.G.} \\ \text{div}(\vec{E})=0}}{=} -\overrightarrow{\Delta} \vec{E}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) \stackrel{\text{MF.}}{=} \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \stackrel{\text{MA.}}{=} -\frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t} \stackrel{\substack{\text{M.A.} \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})=\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}}{=} -\frac{\partial\left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)}{\partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

En égalisant les deux termes : $\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\Delta} \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

Par analyse dimensionnelle : $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ donc $\boxed{\overrightarrow{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

b) **Équation pour le champ magnétique \vec{B}**

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{B})) - \overrightarrow{\Delta} \vec{B}$$

Avec (MΦ) : $\text{div}(\vec{B}) = 0$ soit $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})) = -\overrightarrow{\Delta} \vec{B}$

Avec (MA) dans le vide : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ d'où $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\overrightarrow{\Delta} \vec{B}$ ou

$$\mu_0 \epsilon_0 \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\overrightarrow{\Delta} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E})}{\partial t}$$

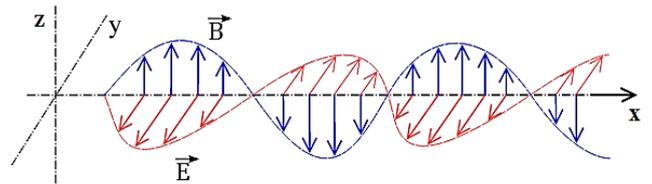
Or selon (MF) : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ d'où $\overrightarrow{\Delta} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$ D'où $\boxed{\overrightarrow{\Delta} \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

$$[\overrightarrow{\Delta} \vec{a}] = [\vec{a}] \times \frac{1}{L^2} \quad \left[\frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial t^2}\right] = [\vec{a}] \times \frac{1}{t^2}$$

Donc $[\epsilon_0 \mu_0] = \frac{1}{c^2} = \frac{T^2}{L^2}$ c célérité de l'onde en m/s

6.

- a) ❤️❤️ On donne l'allure du champ électromagnétique d'une onde plane progressive monochromatique. Le champ électrique est contenu dans un plan horizontal tandis que le champ magnétique est dans le plan vertical. Trouver le sens de propagation de l'onde.



- b) ❤️❤️ Le champ électrique d'une onde électromagnétique

plane est donné par : $\vec{E} = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{e}_z$. Donner l'expression du champ magnétique associé à cette onde.

1) Cf. relation de structure : $\vec{B} = \frac{\vec{e}_{\text{propagation}} \wedge \vec{E}}{c}$, d'où $\vec{e}_{\text{propagation}} = -\vec{e}_x$: propagation vers les x décroissants.

2) Variable $t - \frac{x}{c}$: propagation selon $+\vec{e}_x$ puis relation de structure : $\vec{B} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c}$ $\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{e}_y$

7. ❤️ Dans le cas d'une OemPPH polarisée rectilignement selon \vec{e}_y , se propageant dans le sens direct dans la direction \vec{e}_x , donner l'expression du champ électrique et établir la relation de dispersion associée (relation entre k et ω).

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y ; \text{propagation selon } \vec{e}_x ; \vec{k} = k\vec{e}_x ; \text{relation de structure :}$$

Relation de dispersion à démontrer en exploitant l'expression de l'OPPH : calcul des dérivées partielles par rapport au temps et à x , qu'il faut injecter dans l'équation de d'Alembert : $\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Ici, $\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y$ et $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y$

D'où $\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Leftrightarrow \forall t, k^2 E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y = \frac{1}{c^2} \omega^2 E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y$

En simplifiant, on trouve $k^2 = \frac{1}{c^2} \omega^2$ soit en définissant ω et $k > 0$: $k = \frac{\omega}{c}$

8. **Pour une OemPPH, donner les équations de Maxwell dans le vide en notation complexe et en déduire la relation de structure des ondes électromagnétiques planes progressives.

$$\text{Maxwell-Gauss : } \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\text{Maxwell-Faraday : } \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$$

$$\text{d'où relation de structure pour les OemPPH : } \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{e}_{\text{propagation}} \wedge \vec{E}}{c} \text{ avec } k = \frac{\omega}{c} \text{ et pour les OemPP : } \vec{B} = \frac{\vec{e}_{\text{propagation}} \wedge \vec{E}}{c}$$

$$\text{Maxwell-Flux : } \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\text{Maxwell-Ampère : } \vec{k} \wedge \vec{B} = -\omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}$$

9. Etablir l'expression de la densité volumique d'énergie u_{em} associée à une OemPPH dont le champ électrique s'écrit : $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$, puis sa valeur moyenne temporelle

$$\text{Par définition } u_{em}(M, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(M, t) + \frac{1}{2} \frac{B^2(M, t)}{\mu_0}$$

Pour l'OemPPH (cf. relation de structure), les normes des champs \vec{E} et \vec{B} sont liées par la relation $E = Bc$; et avec $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, on en déduit

$$u_{em} = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

$$\text{moyenne temporelle : } \langle u_{em} \rangle = \langle \epsilon_0 E^2 \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \rangle$$

$$\text{D'où avec } \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{B_0^2}{2\mu_0}$$

10. ♥ Un laser hélium-néon (He-Ne) émet un faisceau lumineux cylindrique de rayon $r = 1,0 \text{ mm}$ d'une onde plane monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 632,8 \text{ nm}$. La puissance moyenne émise est $P = 1,0 \text{ mW}$. On donne : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$. Calculer les amplitudes E_{max} et B_{max} des champs électrique et magnétique.

$$\mathcal{P}_{em} = \iint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} = \Pi S = \Pi \pi r^2 \text{ soit } P = \langle \mathcal{P}_{em} \rangle = \langle \Pi \rangle S = \langle \Pi \rangle \pi r^2 \text{ soit } \langle \Pi \rangle = P / \pi r^2 \text{ avec}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \text{ soit } \Pi = \frac{EB}{\mu_0} \text{ avec } \vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} \text{ d'où } B = \frac{E}{c} \text{ soit } \Pi = \frac{E^2}{c\mu_0}$$

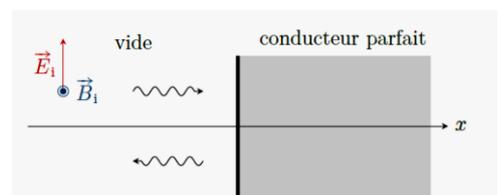
$$\text{Avec } E = E_{max} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) : \Pi = \frac{E^2}{c\mu_0} = \frac{E_{max}^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi)$$

$$\langle \Pi \rangle = \langle \frac{E_{max}^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \rangle = \frac{E_{max}^2}{c\mu_0} \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \rangle \text{ soit avec } \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$$

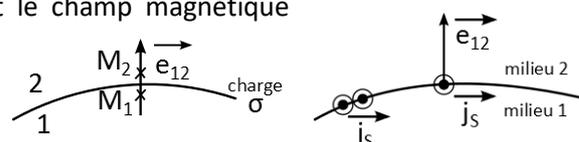
$$\langle \Pi \rangle = \frac{E_{max}^2}{2c\mu_0} = P / \pi r^2$$

$$E_{max} = \sqrt{\frac{2c\mu_0 P}{\pi r^2}} = 4,9 \cdot 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} ; B_{max} = \frac{E_{max}}{c} = \sqrt{\frac{2\mu_0 P}{c\pi r^2}} = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ T}.$$

11. **On étudie la réflexion en incidence normale sur un métal parfait d'une OemPPH se propageant dans le vide selon \vec{e}_x , polarisée rectilignement suivant \vec{e}_y , rencontrant un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$, d'équation $\vec{E}_i(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$.



Rappel des relations de passage : Le champ électrique et le champ magnétique subissent des discontinuités finies à la traversée d'une



surface chargée : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{12}$ ou d'une nappe de courant surfacique : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{e}_{12}$.

- 1) Donner l'expression du champ magnétique incident.
- 2) Donner les conditions aux limites imposées par le conducteur parfait et les exploiter dans les relations de passage.
- 3) Justifier la nécessité d'une onde réfléchie et établir les expressions des champs réfléchis en $x = 0^-$.
- 4) *** Projeter la relation de passage du champ électrique et en déduire l'expression du champ électrique réfléchi puis celle du champ magnétique réfléchi.

b. Relation de structure : $\vec{B} = \frac{\vec{u}_k \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ d'où $\vec{B}_i(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$ avec $B_0 = \frac{E_0}{c}$

Conducteur parfait : $\vec{E}(0^+) = \vec{0}$ et $\vec{B}(0^+) = \vec{0}$, soit dans les relations de passage avec $\vec{e}_{12} = \vec{e}_x$:

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{12} = \vec{0} - \vec{E}(0^-) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \quad (1)$$

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{e}_{12} = \vec{0} - \vec{B}(0^-) \quad \Rightarrow \quad \vec{B}(0^-) = -\mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{e}_x \quad (2)$$

À la limite du conducteur ($x = 0^-$), on a pour les champs incidents : $\vec{E}_i(0^-, t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y$ $\vec{B}_i(0^-, t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$
 Le champ \vec{E}_i ne satisfait pas à la relation de continuité (1), il doit apparaître un champ réfléchi \vec{E}_r se propageant suivant $-\vec{e}_x$ de sorte que $\vec{E}_i + \vec{E}_r$ vérifie cette relation de continuité. Du fait de la linéarité des équations de Maxwell, l'onde réfléchie a la même pulsation ω que l'onde incidente.

Soient \vec{E}_r et \vec{B}_r les champs électrique et magnétique réfléchis. Les relations de passage impliquent :

$$\vec{E}_i(0^-, t) + \vec{E}_r(0^-, t) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \quad (1) \quad \left| \quad \vec{B}_i(0^-, t) + \vec{B}_r(0^-, t) = -\mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{e}_x \quad (2) \quad \text{soit}$$

$$\vec{E}_r(0^-, t) = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \quad (1) \quad \vec{B}_r(0^-, t) = -B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z - \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{e}_x \quad (2)$$

■ Champ électrique réfléchi

- Projection de (1) sur \vec{e}_x : $\vec{E}_r(0^-, t) \cdot \vec{e}_x = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x \Leftrightarrow 0 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \sigma = 0$
- Projection sur \vec{e}_z : $\vec{E}_r(0^-, t) \cdot \vec{e}_z = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0$

Le champ réfléchi n'a pas de composante selon \vec{e}_z

- Projection sur \vec{e}_y : $\vec{E}_r(0^-, t) \cdot \vec{e}_y = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = -E_0 \cos(\omega t)$ et $\vec{E}_r(0^-, t) = -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y$, avec une propagation selon $-\vec{e}_x$: $\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y = E_0 \cos(\omega t + kx + \pi) \vec{e}_y$

Le champ électrique réfléchi a la même amplitude et la même pulsation que le champ incident et subit un déphasage de π .

■ Champ magnétique réfléchi : $\vec{B}_r(x, t) = \frac{(-\vec{e}_x) \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{(-\vec{e}_x) \wedge (-E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y)}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$

Le champ magnétique réfléchi a la même amplitude, la même pulsation et la même phase que le champ incident.

12. ** On considère la réflexion en incidence normale d'une OemPPH sur un métal parfait, et on donne ci-dessous les expressions des champs électriques et magnétiques incidents et réfléchis. Etablir les expressions et les caractéristiques des champs électrique et magnétique de l'onde résultante.

On donne $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$ et $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

Champ électrique incident	Champ électrique réfléchi	Champ magnétique incident	Champ magnétique réfléchi
$\vec{E}_i(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$	$\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$	$\vec{B}_i(x, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$	$\vec{B}_r(x, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$

■ Champ électrique résultant

Principe de superposition : $\vec{E}(x, t) = \vec{E}_i(x, t) + \vec{E}_r(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y - E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$

Or $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$ soit ici

$$\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx) = -2 \sin \frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2} \sin \frac{\omega t - kx - \omega t - kx}{2} = -2 \sin(\omega t) \sin(-kx)$$

Soit $\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$: onde stationnaire

■ **Champ magnétique résultant**

Attention !! une **onde stationnaire (OS) n'est pas une OPP !!** \vec{B} ne peut se calculer à l'aide de la relation de structure.

$$\vec{B}(x, t) = \vec{B}_i(x, t) + \vec{B}_r(x, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z + \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$$

Or $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ soit ici $\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx) = 2 \cos(\omega t) \cos(kx)$

$$\vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z$$

L'onde résultante est une onde stationnaire et non plus une onde progressive.

13. ♥ Etablir les positions des nœuds et des ventres (conducteur parfait en $x \geq 0$) pour une onde électromagnétique stationnaire telle que $\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$ et $\vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z$,

Un nœud est caractérisé par une amplitude nulle et un ventre par une amplitude maximale.

Abscisses (négatives, ici) des nœuds et des ventres, avec $m \in \mathbb{Z}$:

	\vec{E}	\vec{B}
Nœuds	$\sin(kx_N) = 0$ soit $kx_{N,m} = m\pi$ et $x_{N,m} = \frac{m\pi}{k} = m \frac{\lambda}{2}$	$\cos(kx_N) = 0$ soit $kx_{N,m} = \frac{\pi}{2} + m\pi$ et $x_{N,m} = \frac{\pi}{2k} + \frac{m\pi}{k} = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2}$
Ventres	$\sin(kx_V) = \pm 1$ soit $kx_{V,m} = \frac{\pi}{2} + m\pi$ D'où $x_{V,m} = \frac{\pi}{2k} + \frac{m\pi}{k} = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2}$	$\cos(kx_V) = \pm 1$ soit $kx_{V,m} = m\pi$ et $x_{V,m} = \frac{m\pi}{k} = m \frac{\lambda}{2}$

14. Etablir l'expression de la valeur moyenne du vecteur de Poynting et de la densité d'énergie électromagnétique pour une onde électromagnétique stationnaire telle que $\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$ et $\vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z$,

■ **Vecteur de Poynting** de l'onde résultante : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = 4 \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin(\omega t) \sin(kx) \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_x$

Avec $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$: $\vec{\Pi}(x, t) = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin(2\omega t) \sin(2kx) \vec{e}_x$

Valeur moyenne : $\langle \sin(2\omega t) \rangle = 0$ $\langle \vec{\Pi}(x, t) \rangle = \vec{0}$

■ **Densité d'énergie électromagnétique** : $u_{em}(x, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(x, t) + \frac{1}{2} \frac{B^2(x, t)}{\mu_0}$

Avec $E^2(x, t) = 4 E_0^2 \sin^2(\omega t) \sin^2(kx)$ et $B^2(x, t) = 4 \frac{E_0^2}{c^2} \cos^2(\omega t) \cos^2(kx)$, et avec $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$, on a $\langle E^2(x) \rangle = 2 E_0^2 \sin^2(kx)$ et $\langle B^2(x) \rangle = 2 \frac{E_0^2}{c^2} \cos^2(kx)$

On en déduit $\langle u_{em}(x) \rangle = E_0^2 \left(\epsilon_0 \sin^2(kx) + \frac{1}{\mu_0 c^2} \cos^2(kx) \right) = E_0^2 \epsilon_0 (\sin^2(kx) + \cos^2(kx))$: $\langle u_{em}(x) \rangle = \epsilon_0 E_0^2$

15. ♥♥ Considérons une cavité vide taillée à l'intérieur d'un bon conducteur, que l'on modélise par un conducteur parfait, entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$. Une onde électromagnétique arrive en incidence normale sur la face $x = L$, où elle est réfléchiée ; elle se propage en sens inverse jusqu'à rencontrer l'autre face $x = 0$, etc. La superposition des ondes incidente et réfléchiée donne une onde stationnaire, le champ

électrique étant de la forme : $\vec{E}(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$. Déterminer les modes propres de la cavité (pulsation, fréquence, longueur d'onde) et représenter l'allure des trois premiers modes.

équation de propagation d'Alembert : $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

On en déduit : $\frac{d^2 f}{dx^2} \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y + \frac{1}{c^2} f(x) \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y = \vec{0}$

En simplifiant : $\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f(x) = 0$ avec $k = \frac{\omega}{c}$ d'où $f(x) = A \cos(kx + \psi)$ soit

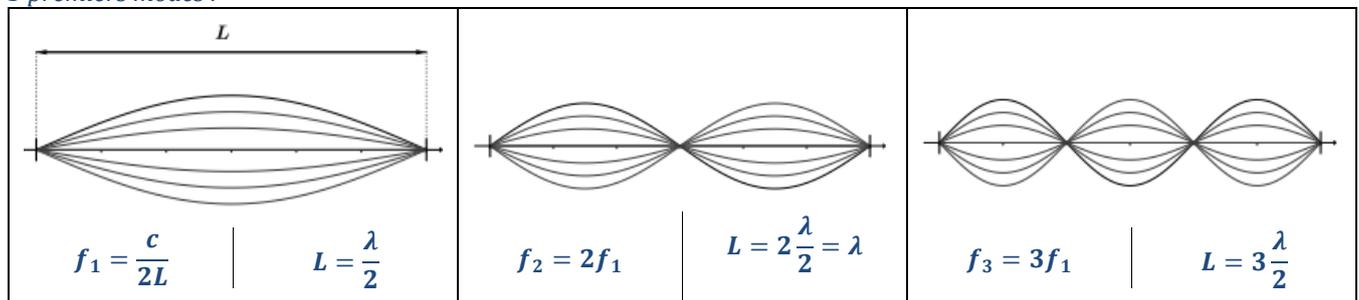
$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

C.L. 1 : $\forall t, \vec{E}(x = 0, t) = \vec{0}$ soit $\cos(\psi) = 0$ d'où par ex. $\psi = +\frac{\pi}{2}$

C.L. 2 : $\forall t, \vec{E}(x = L, t) = \vec{0}$ soit $\cos(kL + \psi) = 0 = \cos\left(kL + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n L = n\pi$, avec n entier

On en déduit $k_n = n \frac{\pi}{L}$; $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}$ soit $L = n \frac{\lambda_n}{2}$; $\omega_n = k_n c = n \frac{\pi c}{L}$ $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \frac{c}{2L}$

3 premiers modes :



16. ** Etablir la formule de Fresnel des interférences pour la superposition de deux signaux harmoniques de même amplitude : $s_1(M, t) = s_0 \cos(\omega t - kr_1)$ et $s_2(M, t) = s_0 \cos(\omega t - kr_2)$.

Expression des intensités de S_1 et S_2 en M : $I_1 = \langle s_1^2 \rangle = \frac{1}{2} s_0^2 = I_2 = \langle s_2^2 \rangle = \frac{1}{2} s_0^2 = I_0$

Expression de l'intensité résultante en M :

$$I = \langle s^2 \rangle = \langle (s_1 + s_2)^2 \rangle = \langle s_1^2 \rangle + \langle s_2^2 \rangle + 2\langle s_1 \cdot s_2 \rangle = I_0 + I_0 + I_{12}$$

$$I_{12} = 2\langle s_1 \cdot s_2 \rangle = 2\langle s_0^2 \cos(\omega t - kr_1) \cos(\omega t - kr_2) \rangle = 2s_0^2 \langle \cos(\omega t - kr_1) \cos(\omega t - kr_2) \rangle$$

$$\cos(A) \cdot \cos(B) = \frac{\cos(A - B) + \cos(A + B)}{2}$$

avec $A = \omega t - kr_1$ et $B = \omega t - kr_2$ soit $A - B = k(r_2 - r_1)$ et $A + B = 2\omega t - (kr_1 + kr_2)$

$$I_{12} = s_0^2 \langle \cos(-kr_1 + kr_2) + \cos(2\omega t - (kr_1 + kr_2)) \rangle \\ = s_0^2 \langle \cos(-kr_1 + kr_2) \rangle + s_0^2 \langle \cos(2\omega t - (kr_1 + kr_2)) \rangle$$

Or, $\langle \cos(f(t)) \rangle = 0$ donc $\langle \cos(2\omega t - (kr_1 + kr_2)) \rangle = 0$ et

$$I_{12} = s_0^2 \cos(kr_2 - kr_1) = 2I_0 \cos(kr_2 - kr_1)$$

La superposition des deux ondes en M donne :

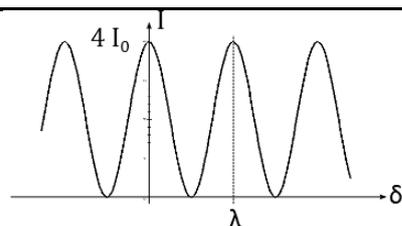
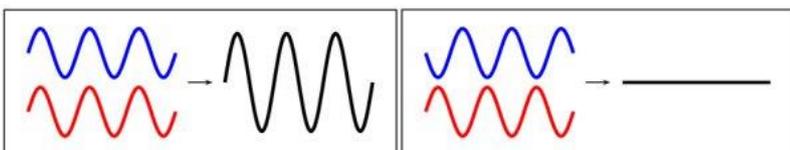
$$I(M) = 2I_0(1 + \cos(k(r_2 - r_1))) = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)\right) \right]$$

17. ♥♥ Donner en justifiant les conditions d'obtention de franges sombres et brillantes sur le déphasage puis sur la différence de marche ♥ et l'ordre d'interférence.

Avec

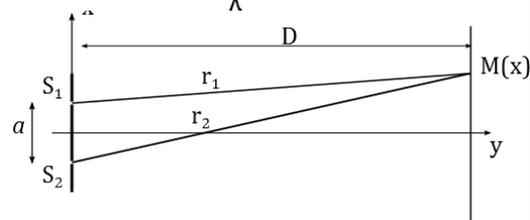
$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{\delta}{\lambda}\right) \right] = 2I_0 [1 + \cos(\Delta\varphi)]$$

	frange brillante	frange noire
interférences	constructives	Destructives
intensité	Maximale : $I(M) = 4I_0$	Minimale : $I(M) = 0$
Cosinus	si $\cos\left(2\pi \frac{\delta}{\lambda}\right) = 1$	si $\cos\left(2\pi \frac{\delta}{\lambda}\right) = -1$
différence de phase $\Delta\varphi$	$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 0 [2\pi] = 2m\pi \quad m \in \mathbb{Z}$	$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = \pi [2\pi] = 2\pi\left(m + \frac{1}{2}\right) \quad m \in \mathbb{Z}$
différence de marche δ	$\delta = m\lambda \quad m \in \mathbb{Z}$	$\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad m \in \mathbb{Z}$
ordre d'interférence	$p = \frac{\delta}{\lambda}$ entier : $p = m \quad m \in \mathbb{Z}$	$p = \frac{\delta}{\lambda}$ demi-entier : $p = m + \frac{1}{2} \quad m \in \mathbb{Z}$



Interférences **constructives** (à gauche) et **destructives** (à droite)

18.** Etablir l'expression de la différence de marche simplifiée dans le cas du dispositif classique des trous d'Young, la source primaire monochromatique étant située sur la médiatrice des trous et l'écran d'observation, parallèle au plan percé des deux trous, étant à grande distance D du plan des trous.



Coordonnées : $S_1 \begin{vmatrix} \frac{a}{2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ et $S_2 \begin{vmatrix} -\frac{a}{2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$; point d'observation sur l'écran : $M \begin{vmatrix} x \\ D \\ z \end{vmatrix}$ avec $a = S_1 S_2 \ll D$; $x \ll D$; $z \ll D$

$$\square r_1 = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2 + z^2} = D \left(1 + \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

on effectue un D.L. 1 en $\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2 = \varepsilon \ll 1$: $r_1 \approx D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2 \right) \right)$

$$\square r_2 = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + D^2 + z^2} = D \left(1 + \left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

D.L. 1 en $\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2 \ll 1$: $r_2 \approx D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{z}{D}\right)^2 \right) \right)$

D'où, finalement :

$$\delta = r_2 - r_1 = \frac{ax}{D}$$

19. ♥♥ donner en expliquant les différents termes l'expression de l'interfrange dans le cas du dispositif précédent des trous d'Young. ♥ L'établir.

Interfrange i : **distance entre 2 franges successives de même nature** (deux franges sombres ou deux franges brillantes).

Entre deux franges successives identiques, l'ordre d'interférence varie de 1, soit $\Delta\delta = \lambda$ avec $\delta = \frac{ax}{D}$

Distance sur le plan de l'écran entre deux points correspondant à cette différence de marche de λ : $\frac{a \Delta x}{D} = \lambda = \frac{ai}{D}$

Interfrange : $\Delta x = i = \frac{\lambda D}{a}$

■ Au programme des exercices

Electromagnétisme

Electromagnétisme

✓ Chapitre 5 : Ondes électromagnétiques

Notions et contenus	Capacités exigibles
10. Propagation des ondes électromagnétiques	
Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide	Énoncer les équations de Maxwell dans le vide. Interpréter qualitativement le lien entre l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday. Établir l'équation de propagation des champs dans le vide.
Équation locale de Poynting	Décrire un bilan d'énergie électromagnétique dans le cas du vide et définir le vecteur de Poynting. Citer des ordres de grandeur de flux énergétiques moyens (Laser, flux solaire, etc.) Utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée.
Onde plane, onde plane progressive, onde plane progressive harmonique	Définir une onde plane, une onde plane progressive et une onde plane progressive harmonique. Expliquer la pertinence et les limites de ces modèles.
Onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement	Décrire la structure d'une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement. Expliquer la pertinence de ce modèle. Décrire la propagation de l'énergie des ondes planes progressives harmoniques polarisées rectilignement. Mettre en œuvre un protocole expérimental illustrant la polarisation rectiligne d'une onde électromagnétique.
Spectre des ondes électromagnétiques	Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications.
Réflexion sous incidence normale d'une onde plane, progressive et monochromatique polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait. Onde stationnaire	Exploiter la nullité des champs dans un métal parfait. Établir l'expression de l'onde réfléchie en exploitant les relations de passage fournies. Interpréter qualitativement la présence de courants localisés en surface. Reconnaître et caractériser une onde stationnaire.
Applications aux cavités à une dimension. Mode d'onde stationnaire	Mettre en œuvre un dispositif permettant d'étudier une onde électromagnétique, dans le domaine des ondes centimétriques.

✓ Optique ondulatoire

Notions et contenus	Capacités exigibles
11. Optique ondulatoire	
Interférences	Expliquer le modèle scalaire de l'onde lumineuse. Définir l'intensité lumineuse. Décrire le phénomène d'interférence à deux ondes monochromatiques dans le cas du dispositif des trous d'Young. Définir la différence de phase, la différence de marche, l'ordre d'interférence et l'intensité lumineuse en un point du champ d'interférence de deux ondes monochromatiques cohérentes. Mettre en œuvre le dispositif expérimental des trous d'Young ou des fentes d'Young.