Exercice 1

TD M1

1) a) Remarque : Définition de la vitesse moyenne :

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Cas 1 : $v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{final} - x_{initial}}{t_{final} - t_{initial}}$

$$v_1 = \frac{3-0}{3-0} = 1 \text{ m.s}^{-1}$$

Cas 2 : $v_2 = \frac{2,4-0}{3-0} = 0,8 \text{ m.s}^{-1}$

Cas 3 : $v_3 = \frac{3-0}{3-0} = 1 \text{ m.s}^{-1}$

b) Cas 3 : $x \nearrow$ entre 0 et 3 s

$x \searrow$ entre 3 et 4 s : Le mobile recule.

Cas 1 : $x = f(t)$ linéaire

$\Leftrightarrow v = \text{cte}$.

c) Vitesse instantanée :

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$v_{max} = v_3(0)$ (Pente maximale).

d) $v_{min} = v_3(3)$: A $t = 3$ s, $\frac{dx}{dt} = 0$ (tangente horizontale).

e) Les mobiles 1 et 3 ont parcouru 3 m entre 0 et 3 s.

2) a) v augmente de manière linéaire en fonction du temps

$\Rightarrow$ l'accélération est constante

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2{,}3 - 1{,}0}{6 - 0} = \frac{1{,}3}{6} \simeq 0{,}2 \text{ m.s}$$

2) b) Mouvement uniformément accéléré

$$v = at + v_0$$

$$v = 0{,}2t + 1{,}0$$

En intégrant :

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

$$x = 0{,}1t^2 + t + x_0$$

D'où :

$$x(5) = 0{,}1 \times 5^2 + 5 + x_0$$

$$x(5) = 7{,}5 + x_0$$

$$x(3) = 0{,}1 \times 3^2 + 3 + x_0$$

$$x(3) = 3{,}9 + x_0$$

On en déduit :

$$d = x(5) - x(3) = 7{,}5 + x_0 - 3{,}9 - x$$

$$= 3{,}6 \text{ m}$$

Exercice 2

a) Graphe 2 : $v = f(t)$ linéaire
$\Rightarrow a = cte.$

b) 1) La vitesse est nulle pour :
graphe 2 ($v = 0$ à $t = 0$)
graphe 3 (idem)

2) La vitesse est constante pour graphe 1

3) Graphes 2 et 3.

4) Graphe 1.

5) Graphe 2.

6) Graphe 3.

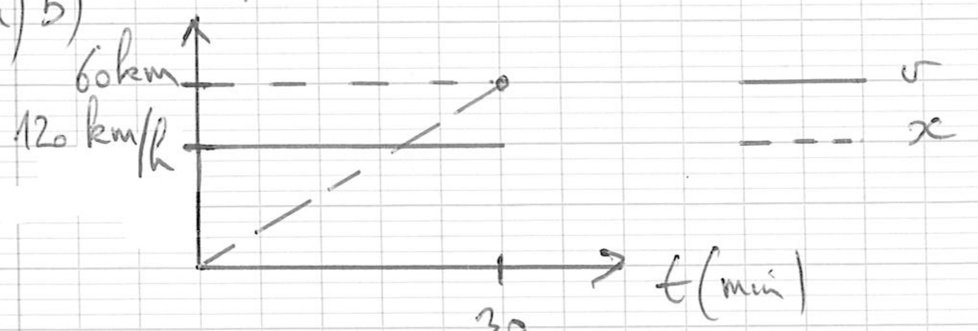
c) On peut avoir $v = 0$
mais $a = \frac{dv}{dt} \neq 0$!

(Exemples pour $t = 0$ dans les cas des graphes 2 et 3).

Exercice 3

1) a) $v = 120$ km/h $= cte$
$\Rightarrow x = vt + cte'$ linéaire en fonction du temps.

a) b)



c) La vitesse est la dérivée de la position $x(t)$.

d) La distance parcourue est représentée par l'aire sous la courbe de $v(t)$ (Primitive $\leftrightarrow$ Intégrale)

2)a) $s(t)$ linéaire pour les 3 objets
$\Leftrightarrow v(t) = cte$.
$\Leftrightarrow$ Mouvements uniformes

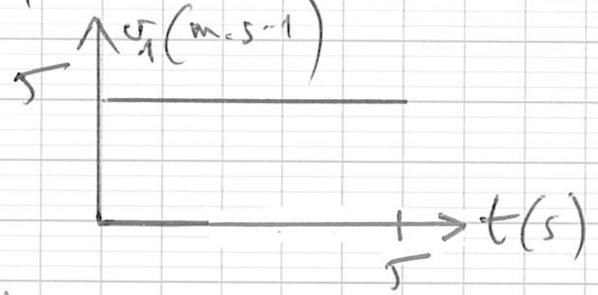
b) $v_1 = \frac{\Delta s_1}{\Delta t} = \frac{30}{6} = 5 \ m.s^{-1}$.

$v_2 = \frac{\Delta s_2}{\Delta t} = \frac{50}{5} = 10 \ m.s^{-1}$

c) $v_2 = 2v_1$: Coefficient directeur 2 fois plus grand.

$v_3 = 2v_2$: idem.

d) $v_1 = cte$



e) $d = 30 - 10 = 20$ m.

Exercice 4

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h.$$

1)a) h : dimension L / unité m.
h représente la position de la balle à $t = $

b) v : dimension $L.T^{-1}$ / unité $m.s^{-1}$
c) g : dimension $L.T^{-2}$ / unité $m.s^{-2}$

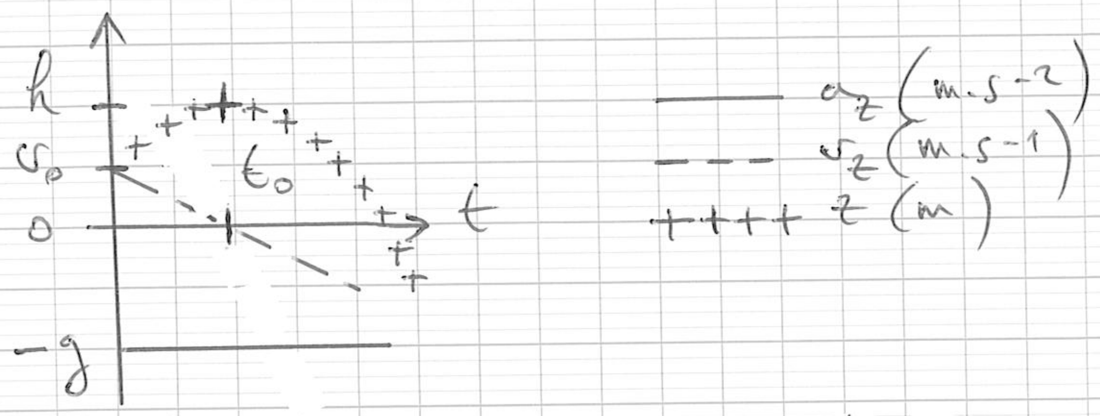
2) $\dot{z}(t) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h\right)$

$\dot{z}(t) = -gt + v_0$.

v_0 représente la vitesse de la balle à $t=0$

3) $\ddot{z}(t) = \frac{d}{dt}(\dot{z}(t)) = \frac{d}{dt}(-gt+v_0) = -g.$

4)



5) $v_z = \dot{z} = -gt + v_0 = 0$ pour $t = t_0$.
Après t_0 : $v < 0$ la balle descend.
Avant t_0 : $v > 0$ la balle monte.

6) * $-gt_0 + v_0 = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{v_0}{g}$

$[t_0] = \left[\frac{v_0}{g}\right] = \frac{m.s^{-1}}{m.s^{-2}} = s.$

* $z_{max} = -\frac{1}{2}gt_0^2 + v_0 t_0 + h$

$z_{max} = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0}{g}\right) + h$

$= -\frac{\cancel{g}v_0^2}{2g^{\cancel{2}}} + \frac{v_0^2}{g} + h$

$= \frac{v_0^2}{2g} + h$

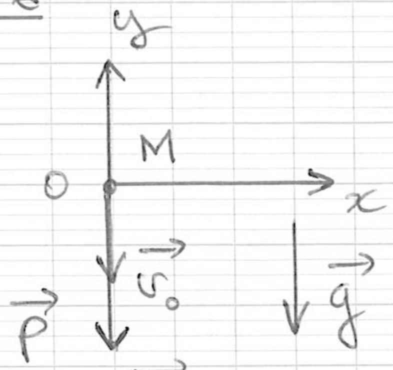
$[z_{max}] = \left[\frac{v_0^2}{2g}\right] = \frac{m^2.s^{-2}}{m.s^{-2}} = m.$

Exercice 5

Graphe 1 : MRU
Graphe 2 : MRUA
Graphe 3 : MRU
Graphe 4 : MRUA
Graphe 5 : MRU
Graphe 6 : MRUA

Exercice 6

Cas 1



Mouvement unidirectionnel car : $\vec{v_0}$ suivant y et $\vec{a}$ suivant y

BAME : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_y}$

PFD : $\vec{P} = m\vec{a}$

$$-mg\vec{u_y} = m(\ddot{x}.\vec{u_x} + \ddot{y}.\vec{u_y})$$

Sur x :

$$\ddot{x} = 0$$

Sur y :

$$\ddot{y} = -g$$

On intègre par rapport au temps :

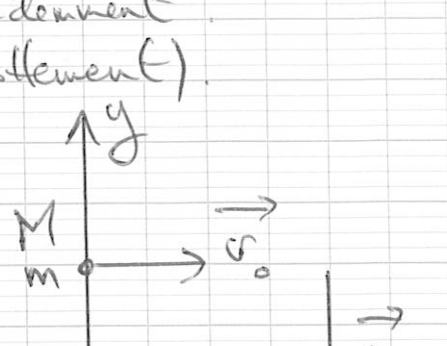
$$\dot{y} = -gt + cte = -gt - v_0$$

On intègre par rapport au temps :

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 - v_0t + \underbrace{y(0)}_{0}$$

$$\underline{y = -\frac{1}{2}gt^2 - v_0t}$$

Cas 2 Même BAME que précédemment (lorsqu'absence de frottement)



PFD :

$$-mg\vec{u_y} = m(\ddot{x}.\vec{u_x} + \ddot{y}.\vec{u_y})$$

Sur x :

$$\ddot{x} = 0$$

$$\dot{x} = cte = v_{0x} = v_0$$

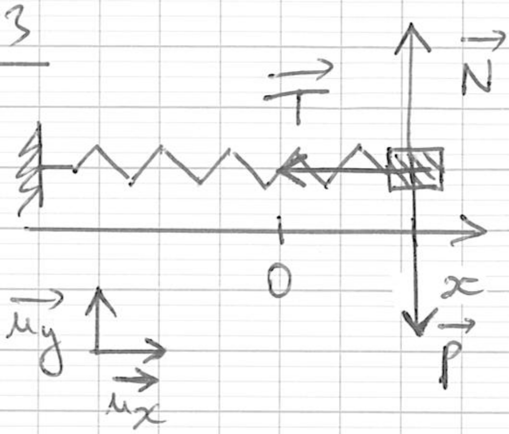
$$x = v_0t + x(0)$$

$$\underline{x = v_0t}$$

Sur y :

$$\ddot{y} = -g$$
$$\dot{y} = -gt + v_y(0) = -gt$$
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y(0) = \underline{-\frac{1}{2}gt^2 + h}$$

__Cas 3__



Système : masse

BAME :

* $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_y}$
* $\vec{N} = N\vec{u_y}$
* $\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u_x}$
$= -kx\vec{u_x}$

PFD :

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = m\vec{a}$$
$$-mg\vec{u_y} + N\vec{u_y} - kx\vec{u_x} = m(\ddot{x}\vec{u_x} + \ddot{y}\vec{u_y})$$

Sur x :

$$-kx = m\ddot{x} \iff m\ddot{x} + kx = 0$$

→ Equation différentielle que l'on peut résoudre (voir M4).

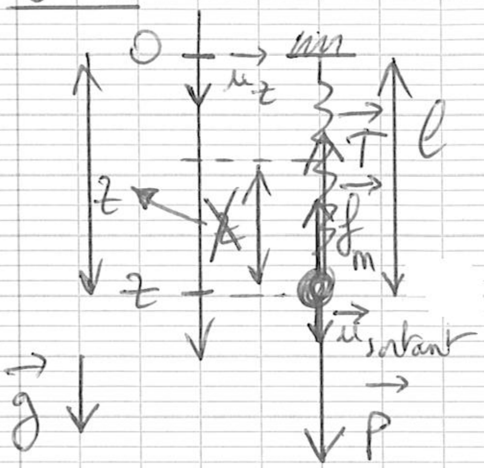
Sur y :

$$-mg + N = m\ddot{y} = 0 \quad \text{car} \quad \left| \begin{array}{l} y = cte \\ \dot{y} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \end{array} \right.$$

Mouvement unidirectionnel suivant x.

d'où : $N = mg$.

Cas 4



Avec ce paramétrage :
$$\underline{z = \ell}$$

Référentiel : Terrestre, supposé galiléen

Système : masse m.

BAME :

* $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$
* $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{sortant}$
  $= -k(z - \ell_0)\vec{u}_z$
* $\vec{f} = -h\vec{v} = -h\dot{z}\vec{u}_z$

PFD : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$\Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$

$\Leftrightarrow mg\vec{u}_z - k(z - \ell_0)\vec{u}_z - h\dot{z}\vec{u}_z = m\ddot{z}\vec{u}_z$

Remarque : le mouvement est unidirectionnel d'axe z.

$\Rightarrow \dot{x} = \dot{y} = 0$

et $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$

Projection du PFD sur z :

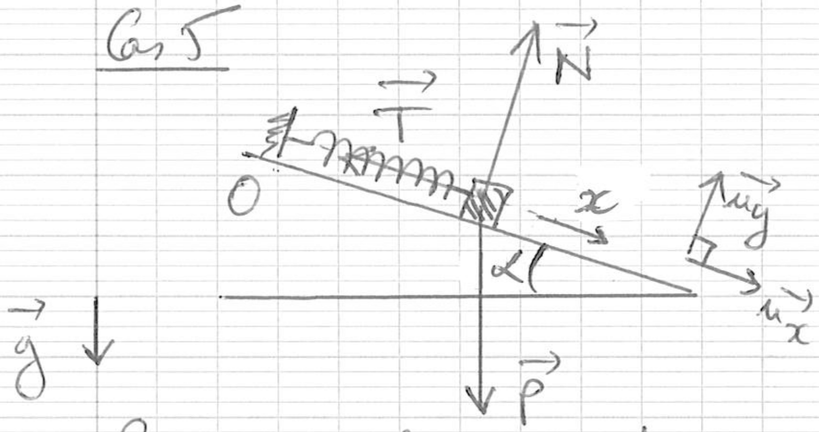
$mg - k(z - \ell_0) - h\dot{z} = m\ddot{z}$

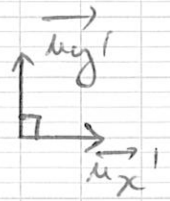
$\Leftrightarrow \underline{mg + k\ell_0 = kz + h\dot{z} + m\ddot{z}}$

↳ Equation différentielle du second ordre, car comprenant z (qui dépend de t), $\dot{z}$ et $\ddot{z}$ (qui dépendent de t également).

→ Résolution + tard.

Cas 5





Remarque : le mouvement est unidirectionnel d'axe x =

$\Rightarrow$ Choix du repère $(\vec{u_x}, \vec{u_y})$ + judicieux.

Référentiel : Terrestre, supposé galiléen

Système : Masse m

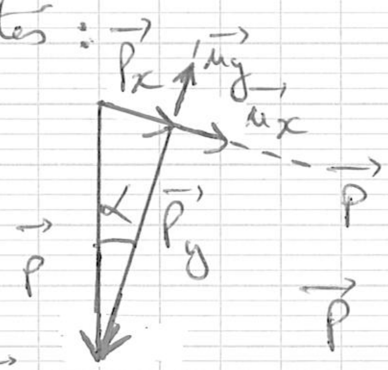
BAME :

* $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_y'}$
* $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{sortant}$
  $= -k(x - \ell_0)\vec{u_x}$
* $\vec{N} = N\vec{u_y}$

Il faut exprimer $\vec{P}$ dans le repère $(\vec{u_x}, \vec{u_y})$

2 possibilités :

(1)

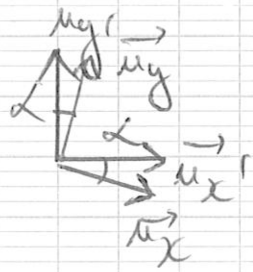


$\vec{P} = \vec{P_x} + \vec{P_y}$

$= P\sin\alpha\,\vec{u_x} - P\cos\alpha\,\vec{u_y}$

$\vec{P} = mg\sin\alpha\,\vec{u_x} - mg\cos\alpha\,\vec{u_y}$

(2)



$\vec{u_y'} = \cos\alpha\,\vec{u_y} - \sin\alpha\,\vec{u_x}$

d'où :

$\vec{P} = -mg(\cos\alpha\,\vec{u_y} - \sin\alpha\,\vec{u_x})$

$= mg\sin\alpha\,\vec{u_x} - mg\cos\alpha\,\vec{u_y}$

PFD :

$$mg\sin\alpha\,\vec{u_x} - mg\cos\alpha\,\vec{u_y} - k(x - l_0)\vec{u_x} + N\vec{u_y} = m\ddot{x}\,\vec{u_x}$$

Projection sur y :

$$-mg\cos\alpha + N = 0$$

d'où : $N = mg\cos\alpha$

Vérification : si $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$

$N = mg$

On retrouve le cas horizontal

Projection sur x :

$$mg\sin\alpha - k(x - l_0) = m\ddot{x}$$

$$\Leftrightarrow \underline{mg\sin\alpha + kl_0 = m\ddot{x} + kx}$$

ATJ - Semaine 1

Exercice 7 : TGV

1) $v_1 = 360$ km/h $\qquad d = 240$ km

$$\Delta t_1 = \frac{d}{v_1} = \frac{240}{360} = 0{,}667 \text{ h} = 40 \text{ min}$$

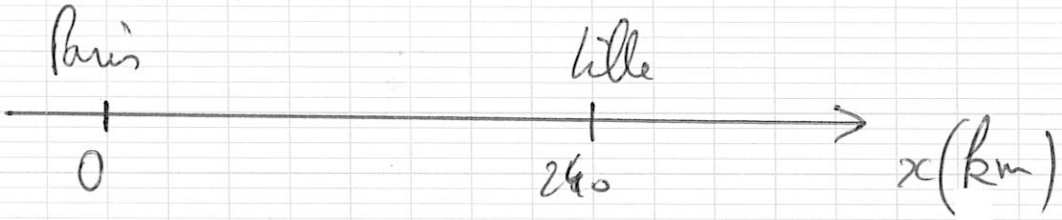
$\Rightarrow$ Arrivée à 8H40

$v_2 = 180$ km/h $\qquad d = 240$ km

$$\Delta t_2 = \frac{d}{v_2} = \frac{240}{180} = 1{,}33 \text{ h} = 1 \text{h } 20 \text{ min}$$

$\Rightarrow$ Arrivée à 9H20

2)



$x_1(t) = v_1 t = 360\, t \qquad (t \text{ en h})$

$x_2(t) = 240 - v_2 t$

$\quad = 240 - 180\, t \qquad (t \text{ en h})$

$x_1(t) = x_2(t)$

$360\, t = 240 - 180\, t$

$540\, t = 240$

$$t = \frac{240}{540} = \frac{24}{54} = \frac{8}{18} = 0{,}44 \text{ h} = 27 \text{ mn} \simeq 1/2 \text{ h}.$$

Ils se croisent | environ à 8H30
| à 8H27

D'où $x_1 = v_1 t$

$\quad = 360 \times 0{,}44 = 158$ km

Vérif : $x_2 = 240 - 180 \times 0{,}44 = 161$ km

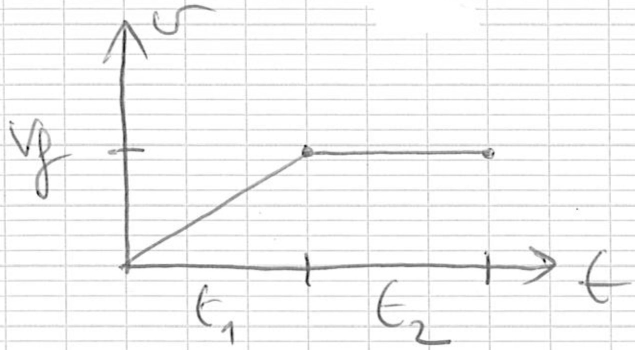
3) $x_1(t) = v_1(t - 0{,}25) = 360\,(t - 0{,}25)$
$x_2(t) = 240 - 180\,t$.

$x_1(t) = x_2(t)$
$360t - 90 = 240 - 180t$
$540t = 330$
$t = \frac{330}{540} = 0{,}61\ h$
$= 37\ mn$.

Ils se croisent à 8H37

4)

Usain Bolt



$$\begin{cases} 100 = \frac{1}{2} V_f t_1 + V_f t_2 & (1) \\ 10 = t_1 + t_2 & (2) \\ 50 = V_f t_2 \text{ ou } V_f = \frac{50}{t_2} & (3) \end{cases}$$

3 eq.
3 inconnues

(1) $\quad 200 = V_f t_1 + 2 V_f t_2 = V_f (t_1 + 2t_2)$

(2) $\quad t_1 = 10 - t_2$

$\Rightarrow$

$$200 = V_f(10 - t_2 + 2t_2) = V_f(10 + t_2)$$

(3) $\Rightarrow \quad 200 = \frac{50}{t_2}(10 + t_2)$

$$200 t_2 = 50(10 + t_2) = 500 + 50 t_2$$

$\Leftrightarrow$

$150 t_2 = 500 \qquad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{500}{150} = 3{,}33\ s$

$\Rightarrow \quad t_1 = 6{,}67\ s$

$$\Rightarrow V_f = \frac{50}{t_2} = \frac{50}{3{,}33} = 15\ m.s^{-1}$$

Exercice 3 (Pb un peu "ouvert") : Usain Bolt

Phase 1 : accélération de $v_0 = 0$ à $v = v_{max}$ sur 50 m

$a = a_0$

$v = a_0 t \longrightarrow v_1 = a_0 t_1$

$x = \frac{1}{2} a_0 t^2 \longrightarrow x_1 = \frac{1}{2} a_0 t_1^2$

$50 = \frac{1}{2} a_0 t_1^2 \quad (1)$

a_0 et t_1 inconnues

Phase 2 : vitesse constante

$v = v_1 = a_0 t_1$

$x = v_1 (t - t_1) + x_1$

$= a_0 t_1 (t - t_1) + \frac{1}{2} a_0 t_1^2$

$\longrightarrow x_2 = a_0 t_1 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a_0 t_1^2$

$100 = a_0 t_1 (10 - t_1) + \frac{1}{2} a_0 t_1^2 \quad (2)$

a_0 et t_1 inconnues

$$\begin{cases} 50 = \frac{1}{2} a_0 t_1^2 & (1) \\ 100 = a_0 t_1 (10 - t_1) + \frac{1}{2} a_0 t_1^2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 50 = \frac{1}{2} a_0 t_1^2 & (1) \\ 50 = a_0 t_1 (10 - t_1) & (2)-(1) \end{cases}$$

$\frac{(2)-(1)}{(1)}$: $1 = \frac{\cancel{a_0} \cancel{t_1} (10 - t_1)}{\frac{1}{2} \cancel{a_0} t_1^{\cancel{2}}}$

$1 = \frac{2}{t_1} (10 - t_1)$

5

$t_1 = 20 - 2t_1$

$3t_1 = 20$

$t_1 = \frac{20}{3} \simeq 6,67\ s$

$a_0 = \frac{100}{t_1^2} = \frac{100}{20^2} \times 3^2 = \frac{9}{4}$

$= 2,25\ m.s^{-2}$

D'où :

$v_1 = a_0 t_1$

$= 2,25 \times 6,67 = 15\ m.s^{-1}$

$= 54\ km/h$

Surdimensionné !

Vérif : $x_1 = \frac{1}{2} a_0 t_1^2 = 50\ m.$

Exercice : Oscilloscope analogique

1. $\vec{F} = q\vec{E}$

2. Référentiel : Terrestre $\Leftrightarrow$ galiléen.
Système : Électron
Bilan des forces :

$$\vec{F} = q\vec{E} = -e\left(\frac{-U}{d}\vec{u_x}\right) = \frac{eU}{d}\vec{u_x}$$

PFD :

$$\left(\frac{d\vec{p}/R}{dt}\right)_R = \Sigma\vec{F}$$

$$m\vec{a}/R = \frac{eU}{d}\vec{u_x}$$

$$\vec{a} = \frac{eU}{md}\vec{u_x}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{eU}{md} \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{eU}{md}t + 0 \\ \dot{y} = cte = 0 \\ \dot{z} = cte = v_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\dfrac{eU}{md}t^2 + 0 \\ y = cte = 0 \\ z = v_0 t + 0 \end{cases}$$

d'où :

$$t = \frac{z}{v_0}$$

$$x = \frac{1}{2}\frac{eU}{md}\left(\frac{z}{v_0}\right)^2 \qquad x = \frac{1}{2}\frac{eU}{mdv_0^2}z^2$$

Éq. trajectoire.

3. En K, $z_K = D$

d'où : $x_K = \frac{1}{2}\frac{eUD^2}{mdv_0^2}$

$$\begin{cases} x_K = \frac{1}{2}\frac{eUD^2}{mdv_0^2} \\ y_K = 0 \\ z_K = D. \end{cases}$$

Or $x_K = \frac{1}{2}\frac{eU}{md} t_K^2$

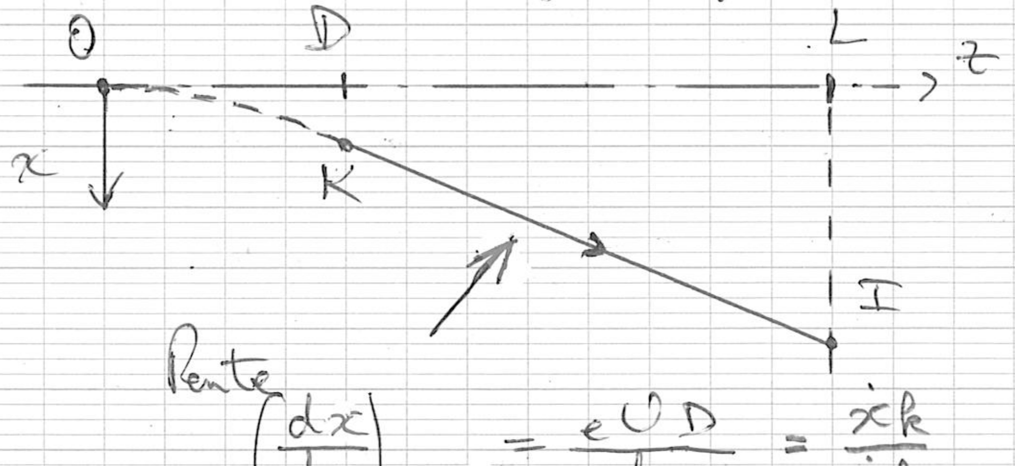
$$\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\frac{\cancel{e}\cancel{U}D^2}{\cancel{m}\cancel{d}v_0^2} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\frac{\cancel{e}\cancel{U}}{\cancel{m}\cancel{d}} t_K^2$$

$$t_K = \frac{D}{v_0}$$ ☺ Bien sûr !

d'où : $$\begin{cases} \dot{x}_K = \frac{eU}{md}\cdot\frac{D}{v_0} = \frac{eUD}{mv_0 d} \\ \dot{y}_K = 0 \\ \dot{z}_K = v_0 \end{cases}$$

4. Poids négligé
⇒ Aucune force
⇒ Mouvement rectiligne uniforme.

5.



Pente
$$\left(\frac{dx}{dz}\right)_{x=K} = \frac{eUD}{mdv_0^2} = \frac{\dot{x}_K}{\dot{z}_K}$$

d'où : Equation de la droite
$$x = \frac{eUD}{mdv_0^2} z + b$$

Cette droite passe par (z_k, x_k)

$$\frac{1}{2}\frac{eUD^2}{mdv_0^2} = \frac{eUD}{mdv_0^2}D + b$$

$$\text{d'où : } b = -\frac{1}{2}\frac{eUD^2}{mdv_0^2}$$

d'où : Equation de la droite :

$$x = \frac{eUD}{mdv_0^2}z - \frac{1}{2}\frac{eUD^2}{mdv_0^2}$$

d'où : $x_I = \frac{eUD}{mdv_0^2}(D+L) - \frac{1}{2}\frac{eUD^2}{mdv_0^2}$

$$x_I = \frac{1}{2}\frac{eUD^2}{mdv_0^2} + \frac{eUDL}{mdv_0^2}$$

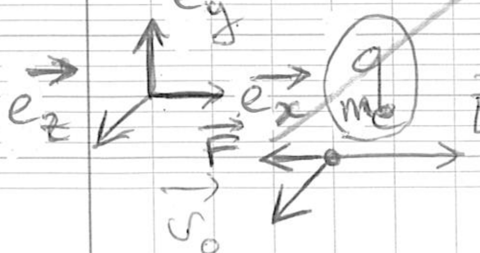
$$x_I = \frac{eUD}{mdv_0^2}\left(\frac{D}{2} + L\right)$$ Proportionnalité !

6. Deux autres plaques alimentées par une tension alternative dépendant de la base de temps permettent une déviation suivant y
$\Rightarrow$ Balayage

$\oplus$ x_I proportionnelle à U
$\Rightarrow$ Déviation suivant x proportionnelle à la tension à mesurer.

<u>Exercice : Electron dans un champ électromagnétique</u>

1. $\vec{F} = q\vec{E} = m_e\vec{a} = -e\vec{E} = -eE\vec{e_x}$
d'où :
$$\vec{a} = -\frac{eE}{m_e}\vec{e_x} = -\frac{e\vec{E}}{m_e}$$



Réponse (d)

2. Accélération suivant $\vec{e_x}$
Vitesse initiale suivant $\vec{e_z}$
$\Rightarrow$ Parabole dans le plan (O, x, z)
du type :
$$x = az^2 + bz + c$$
$\Rightarrow$ Réponse (a) ou (c).

$\vec{E}$ suivant $\oplus \vec{e_x}$
$\Rightarrow \vec{F} = -e\vec{E}$ suivant $(-\vec{e_x})$
$\Rightarrow$ Réponse (c)

3. $$x_e = \frac{-eE}{2m_e}\left(\frac{z_0}{v_0}\right)^2$$
$$= \frac{-2.10^{-19} \times 10}{2 \times 10^{-30}} \times \left(\frac{0,2}{10^6}\right)^2$$
$$= -\frac{2}{2} \times 0,2^2 \times 10^{-19} \times 10 \times 10^{30} \times 10^{-12}$$
$$= -0,04 \times 10^{-1} = -4 \text{ mm}.$$

Réponse (d)