M2 - ENERGIE MECANIQUE

Programme ATS

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Observation d'un mouvement	
Énergie cinétique	Définir la vitesse et l'énergie cinétique d'un point matériel.
2. Interactions conservatives	
Énergie potentielle fonction d'une seule variable spatiale	Citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur associée à un champ uniforme et de l'énergie potentielle élastique associée à un ressort.
Équilibre en référentiel galiléen	Identifier sur le graphe de l'énergie potentielle les éventuelles positions d'équilibre stable et instable. Exploiter d'autres situations où l'expression de l'énergie potentielle est fournie.

3. Énergie mécanique	
Énergie mécanique	Distinguer une énergie cinétique d'une énergie potentielle.
Conservation de l'énergie	Identifier les cas de conservation de l'énergie mécanique. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle ou d'une expression d'une énergie mécanique une vitesse ou une position en des points particuliers. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement borné ou non de la trajectoire.
Non conservation de l'énergie mécanique Modèle d'ordre 1	Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Énoncer le théorème liant l'énergie mécanique à la puissance des forces non conservatives.

Notions et contenus	Capacités exigibles
12. Lois de Newton	
Travail d'une force	Définir le travail et la puissance d'une force. Calculer le travail d'une interaction conservative. Calculer la force associée à une interaction conservative. Calculer la puissance d'une force dissipative.
Principe fondamental de la dynamique pour un point matériel de masse constante	Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans le cas d'un mouvement rectiligne. Établir que le théorème de l'énergie mécanique découle du principe fondamental de la dynamique.

Nous avons étudié précédemment des problèmes de mécanique du point à l'aide du Principe Fondamental de la Dynamique. Inconvénients : Nécessité de projeter des forces, certaines forces ne sont pas connues, …

Dans ce chapitre, nous allons aborder une autre manière de résoudre ces problèmes de mécanique du point, à l'aide d'une approche énergétique.

I) ENERGIE CINETIQUE

I)1) Définition

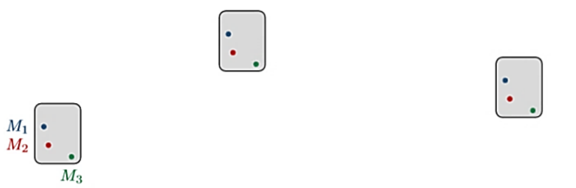
L'énergie cinétique d'un point matériel de masse *m*, en mouvement dans un référentiel R, est définie de la façon suivante :

L'énergie cinétique dépend du référentiel. Elle est toujours positive.

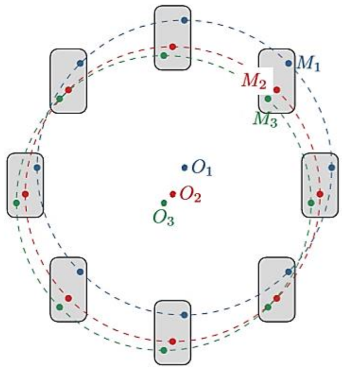
On peut généraliser cette expression dans le cas d'une **solide en translation**, car la vitesse est la même en tout point :

Solide en translation : tous les points du solide ont la même vitesse.

Mouvement de translation quelconque :



Translation circulaire :



Dans le cas du mouvement quelconque d'un solide, il n'y a pas de généralisation possible.

Cette énergie cinétique peut être modifiée par l'action des **forces extérieures**, qui exercent un **travail** sur le point matériel ou le solide.

I)2) Puissance et travail d'une force

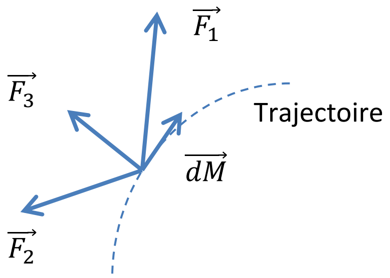
Un point M est en mouvement dans le référentiel R. Il est soumis à une force $\vec{F}$.

I)2)a) Travail élémentaire d'une force

Définition : Le travail élémentaire δW fourni par la force $\vec{F}$ au point matériel M au cours de son déplacement élémentaire $\overrightarrow{dM}$ s'écrit :

Le travail est une

3 cas sont possibles :



$\delta W(\overrightarrow{F_1})_{/R}$

Le travail de $\overrightarrow{F_1}$ est . $E_{C,\,M}$

$\delta W(\overrightarrow{F_2})_{/R}$

Le travail de $\overrightarrow{F_2}$ est . $E_{C,\,M}$

$\delta W(\overrightarrow{F_3})_{/R}$

Le travail de $\overrightarrow{F_3}$ est . $E_{C,\,M}$

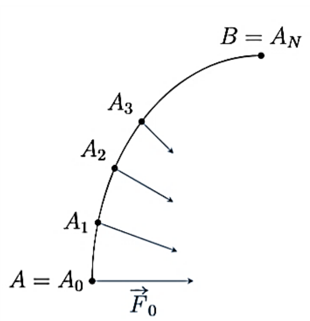
C'est le cas du mouvement circulaire uniforme.

I)2)b) Puissance d'une force

La puissance fournie par la force $\vec{F}$ au point matériel M s'écrit :

Unité de puissance :

I)2)c) Travail d'une force le long d'une trajectoire



En découpant par intervalles :

$$W(\vec{F})_{A\to B} = \sum_{i=0}^{N-1} \vec{F}_i.\overrightarrow{dM_{i\to i+1}}$$

Lorsque $N \to \infty$:

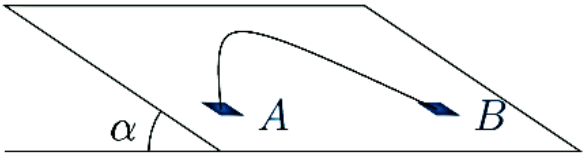
$$W(\vec{F})_{A\to B} = \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{F(M)}.\overrightarrow{dM}$$

Le travail d'une force le long d'une trajectoire donnée allant de A vers B s'écrit :

$$\boldsymbol{W(\vec{F})_{A\to B} = \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{F(M)}.\overrightarrow{dM}}$$

Le travail d'une force dépend, à priori, du chemin suivi.

Exemple



Considérons un solide en translation le long d'un plan incliné. Il est soumis à son poids, la réaction normale du support, et une force de frottement fluide. Exprimez les travaux de ces trois forces au cours de son mouvement.

Travail du poids

Le travail d'une force constante ne dépend pas du chemin suivi.

Travail de la réaction normale du support

Travail de la force de frottement

I)2)d) Théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel

Etude de la puissance instantanée

Principe fondamental de la dynamique : $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F_i}$

En multipliant scalairement par $\vec{v}$: $m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F_i}.\vec{v} = \sum P(\vec{F_i})$

C'est-à-dire : $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}.\vec{v}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{dE_C}{dt} = \sum P(\vec{F_i})$ (1)

Etude du travail le long d'une trajectoire

On sait que $\delta W = P.dt$.

On intègre la relation (1) sur la trajectoire :

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{dE_C}{dt}dt = \int_{t_A}^{t_B} \sum P(\vec{F_i})dt = \sum \int_{t_A}^{t_B} P(\vec{F_i})dt = \sum \int_{t_A}^{t_B} \frac{\delta W_i}{dt}dt$$

C'est-à-dire :

$$[E_C]_A^B = E_C(B) - E_C(A) = \sum W(\vec{F_i})_{A\rightarrow B}$$

Théorème de l'énergie cinétique

Ce théorème peut être généralisé pour un **solide indéformable en translation.**

II) ENERGIE POTENTIELLE

II)1) Energie potentielle et force conservative

Une force est dite **conservative** si son travail le long d'une trajectoire $\widehat{AB}$ ne dépend que des points A et B, et pas du chemin suivi pour aller de A vers B.

On montre que cette propriété n'est possible que si la force $\vec{F}$ dérive d'une **énergie potentielle *E_P*** :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad(E_P)} = -\left(\frac{\partial E_P}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\overrightarrow{u_z}\right) \text{ (voir deuxième semestre)}$$

En effet, dans ce cas :

$$W(\vec{F})_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dM} = -\int_A^B \overrightarrow{grad(E_P)}.\overrightarrow{dM}$$
$$= -\int_A^B \left(\frac{\partial E_P}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\overrightarrow{u_z}\right).\left(dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} + dz\overrightarrow{u_z}\right)$$
$$= -\int_A^B \left(\frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}\,dz\right) = -\int_A^B dE_P = E_P(A) - E_P(B)$$

On peut écrire, au niveau élémentaire :

pour une **force conservative**

Remarque sur les notations :

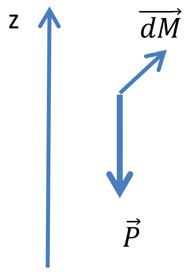
- ***d*** est la notation pour une **variation infinitésimale** (ou élémentaire), c'est-à-dire une différence entre les valeurs finale et initiale d'une fonction, on parle de **différentielle**,
- δ est la notation pour une grandeur infinitésimale qui n'est pas forcément une variation.

L'énergie potentielle est définie par une variation.

L'énergie potentielle est définie à une constante additive près *ou* en précisant une position de référence où l'énergie potentielle est nulle.

II)2) Exemples d'énergies potentielles

II)2)a) Energie potentielle de pesanteur



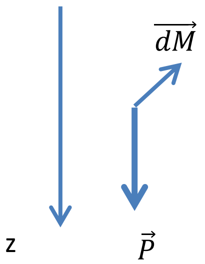
Poids $\vec{P} =$

Travail élémentaire $\delta W(\vec{P}) =$

On cherche E_P telle que :

$\delta W = -dE_P =$

d'où : si axe orienté vers le haut



Poids $\vec{P} =$

Travail élémentaire $\delta W(\vec{P}) =$

On cherche E_P telle que :

$\delta W = -dE_P$

d'où : si axe orienté vers le bas

L'Energie Potentielle de Pesanteur $\boldsymbol{E_{PP}}$ mesurée le long d'un axe vertical **orienté vers le haut** s'écrit :

L'Energie Potentielle de Pesanteur $\boldsymbol{E_{PP}}$ mesurée le long d'un axe vertical **orienté vers le bas** s'écrit :

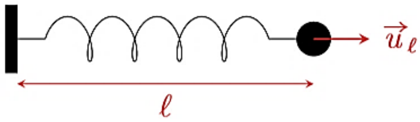
La force « dérive » de l'énergie potentielle :

$$\vec{P} = -\overrightarrow{grad(E_{PP})} = -\left(\frac{\partial E_{PP}}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial E_{PP}}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial E_{PP}}{\partial z}\overrightarrow{u_z}\right) = -(0.\overrightarrow{u_x} + 0.\overrightarrow{u_y} + mg.\overrightarrow{u_z}) = -mg.\overrightarrow{u_z}$$

(si axe orienté vers le haut)

II)2)b) Energie potentielle élastique

Force de rappel élastique :



$\vec{F_r} =$

Travail élémentaire : $\delta W(\vec{F_r}) =$

On cherche E_P telle que :

$\delta W = -dE_P =$

d'où :

L'Energie Potentielle élastique ***E$_{Pe}$*** dont dérive la force de rappel d'un ressort s'écrit :

La force dérive de l'énergie potentielle :

$$\vec{F}_r = -\overrightarrow{grad(E_{Pe})} = -\left(\frac{\partial E_{Pe}}{\partial l}\overrightarrow{u_l}\right)$$

II)2)c) Exemple de force non conservative : la force de frottement fluide

Force de frottement : $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$

Travail élémentaire : $\delta W = -\alpha\vec{v}.\overrightarrow{dM}$

En limitant le déplacement à une dimension : $\overrightarrow{dM} = dx\overrightarrow{u_x}$ et $\vec{v} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{u_x}$

$$\delta W = -\alpha\frac{dx}{dt}\overrightarrow{u_x}.dx\overrightarrow{u_x}$$

$\delta W = -\alpha\frac{dx}{dt}dx$ Il faudrait : $dE_P = \alpha\frac{dx}{dt}dx$ c'est-à-dire : $\frac{dE_P}{dx} = \alpha\frac{dx}{dt}$

C'est impossible à cause de la dépendance au temps.

Les forces de frottements ne sont pas conservatives.

III) ENERGIE MECANIQUE

III)1) Définition

L'énergie mécanique d'un point matériel est la somme :

-
-

III)2) Théorème de l'énergie mécanique pour un point matériel

Théorème de l'Energie cinétique : $\frac{dE_C}{dt} = \sum \mathbf{P}_{/\mathbf{R}}(\overrightarrow{\mathbf{F_i}})$

$$\frac{dE_C}{dt} = \sum P_{cons} + \sum P_{non\ cons}$$

Or : $\sum P_{cons} = \frac{\delta W}{dt} = -\frac{dE_P}{dt}$

D'où : $\frac{dE_C}{dt} + \frac{dE_P}{dt} = \frac{dE_m}{dt} = \sum P_{non\ cons}$

Pour un point matériel de masse m, le **Théorème de l'Energie Mécanique** s'écrit :

Cas de **conservation de l'énergie mécanique** :

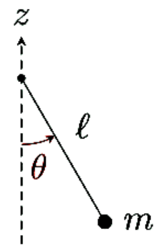
L'énergie mécanique d'un système soumis uniquement à des forces conservatives ou des forces qui ne travaillent pas est une constante du mouvement.

Sa valeur est donnée par les conditions initiales.

Remarques :

- Une force « conservative » conserve l'énergie mécanique.
- L'énergie mécanique se conserve : il y a conversion permanente entre énergie potentielle et énergie cinétique.

III)3) Exemple d'application

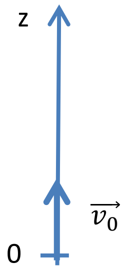


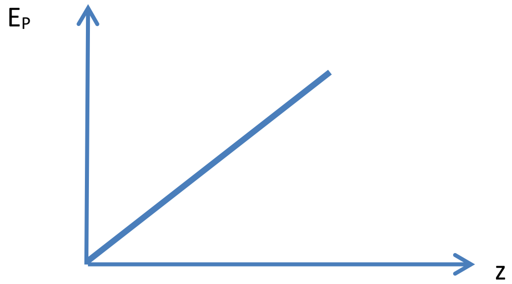
On considère un pendule simple formé d'un point matériel de masse *m*, attaché à l'extrémité d'un fil tendu. Exprimer son énergie mécanique, justifier qu'elle est constante, et déterminer l'équation du mouvement.

IV) MOUVEMENT CONSERVATIF A UNE DIMENSION

IV)1) Exemples

Balle lancée vers le haut (sans frottement)





Seule force appliquée à la balle : le poids, qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{PP} = mgz$. Le poids est une force conservative => l'énergie mécanique de la balle se conserve.

$$E_m = mgz + \frac{1}{2}mv^2 = cte = E_{m0} = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

Lorsque la balle atteint son altitude maximale *h*, alors *v* = 0.

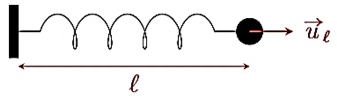
V = 0 => $mgh = \frac{1}{2}m{v_0}^2$ => $\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{v_0}^2}{2\boldsymbol{g}}$

Oscillateur harmonique (sans frottement)

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php?typanim=Javascript

L'Oscillateur Harmonique (univ-nantes.fr)

Le poids et la réaction normale se compensent.



La force de rappel élastique, conservative, dérive de l'énergie potentielle :

$$E_{Pe} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 = \frac{1}{2}kx^2.$$

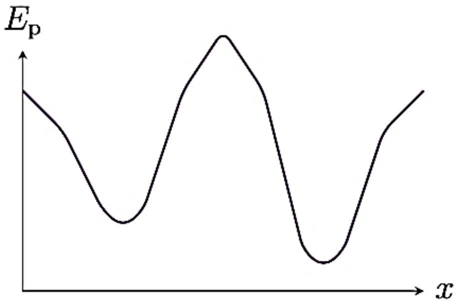
$$E_m = cte = E_{m0} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Positions extrêmes lorsque *v* = 0

=> $E_{m0} = \frac{1}{2}x^2$ => 2 positions extrêmes $\boldsymbol{x_{1,2}} = \pm\sqrt{\frac{2\boldsymbol{E_{m0}}}{\boldsymbol{k}}}$

IV)2) Cas général

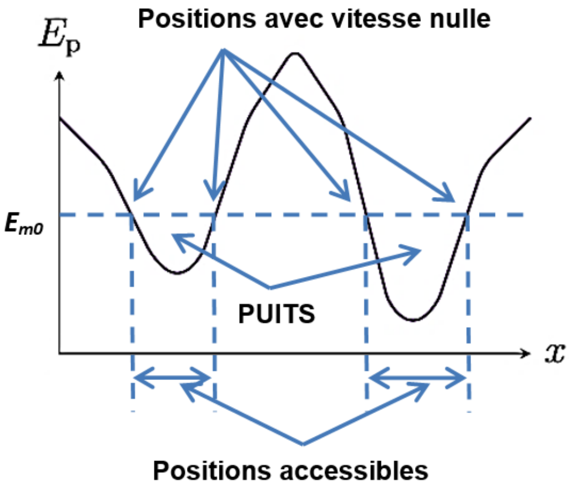
On considère un point matériel soumis uniquement à des **forces conservatives**, dont l'énergie potentielle en fonction de la position est la suivante :



E_P représente n'importe quel type d'énergie potentielle.

x représente n'importe quelle variable de position.

IV)2)a) Positions accessibles



$E_m = E_P + E_C$ avec $E_C \geq 0$

Donc $E_m \geq E_P$, avec $E_m = E_{m0}$

C'est-à-dire $E_P \leq E_{m0}$

Les seules positions accessibles par le point matériel sont celles pour lesquelles :

$$E_P(x) \leq E_{m0}$$

Si la bille est initialement dans un des puits (appelés « puits de potentiels »), elle ne peut pas en sortir : elle est piégée dans le puits, sa trajectoire est bornée.

IV)2)b) Positions d'équilibre

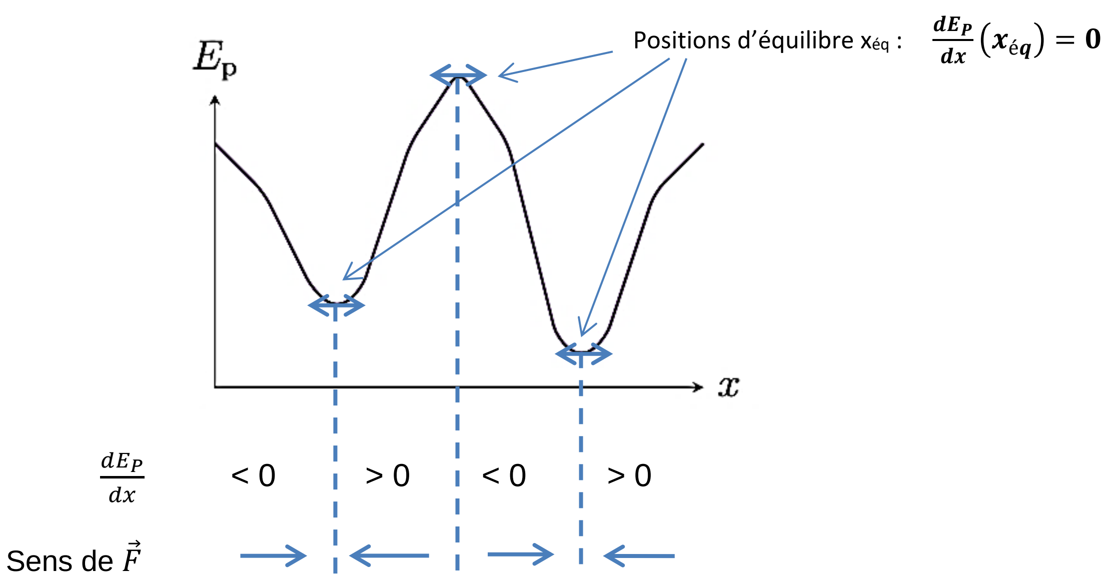
Lien entre force et énergie potentielle : $\delta W = -dE_P = \vec{F}.\overrightarrow{dM} = F_x(x).dx$

$F_x(x) = -\frac{dE_P}{dx}$ est le composante de la force qui dérive l'énergie potentielle.

Conséquence : la **force** est dirigée dans le **sens des énergies potentielles décroissantes**.

La force s'annule lorsque l'énergie potentielle est extrémale (maximale ou minimale).

Certaines positions d'équilibre sont stables, d'autres sont instables.



Une position d'équilibre est **stable** si la force y ramène le point matériel lorsqu'il est faiblement éloigné. Dans ce cas, **l'énergie potentielle** est . On a :

Une position d'équilibre est **instable** si la force en éloigne le point matériel lorsqu'il est faiblement éloigné. Dans ce cas, **l'énergie potentielle** est . On a :

Attention ! Il s'agit de **dériver E_P par rapport à l'espace**, et non au temps !

IV)2)c) Portrait de phase

Rappels :

- Le plan de phase représente x en abscisse et $\dot{x}$ en ordonnée,
- Une trajectoire de phase est la courbe suivie par le système dans le plan de phase pour des Conditions Initiales (CI) données, c'est une courbe paramétrée par le temps,
- Le portait de phase est l'ensemble des trajectoires de phase possibles pour des CI différentes.

On peut déduire qualitativement le portait de phase à partir de la courbe d'énergie potentielle.

Toutes les trajectoires bornées sont fermées dans le plan de phase : au bout d'un certain temps, le point matériel revient à son point de départ avec la même vitesse.

Propriétés : les trajectoires conservatives bornées sont nécessairement périodiques.

IV)2)d) Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable

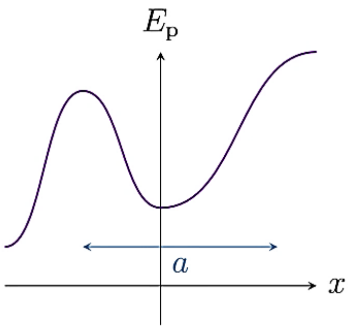
On se place au voisinage d'une position d'équilibre stable, qui se traduit par un puits de potentiel. On choisit l'axe tel que le fond du puits soit en $x = 0$.

La largeur du puits vaut a.

On lâche le mobile sans vitesse initiale à proximité du fonds du puits de potentiel.

Développement limité de E_P au voisinage de $x = 0$:

$$E_P(x) = E_P(0) + \frac{dE_P}{dx}(0).x + \frac{1}{2}\frac{d^2E_P}{dx^2}(0).x^2 + R(x)$$



Avec $\frac{dE_P}{dx}(0) = 0$ et $R(x)$ tend vers 0 :

$$E_P(x) \approx E_P(0) + \frac{1}{2}\frac{d^2E_P}{dx^2}(0).x^2$$

On pose : $k = \frac{d^2E_P}{dt^2}$, raideur effective

D'où : $E_P(x) \approx E_P(0) + \frac{1}{2}kx^2$

$$E_m(x) \approx E_C(x) + E_P(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_P(0) + \frac{1}{2}kx^2$$

Mouvement conservatif :

$\frac{dE_m}{dt} = 0$ c'est-à-dire $m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$ c'est-à-dire $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Le mouvement d'un point matériel au voisinage d'une position d'équilibre stable est celui d'un **oscillateur harmonique**, la raideur effective du ressort étant liée à la largeur du puits de potentiel.