M2 - ENERGIE MECANIQUE

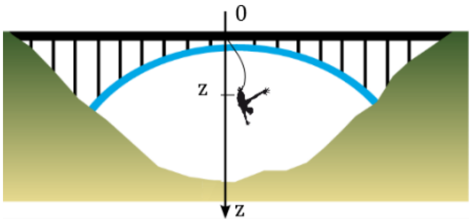
Travaux Dirigés

Exercice 1 : Energie potentielle de pesanteur

1) Soit (Oz) un axe vertical ascendant dont l'origine est prise au niveau du sol.

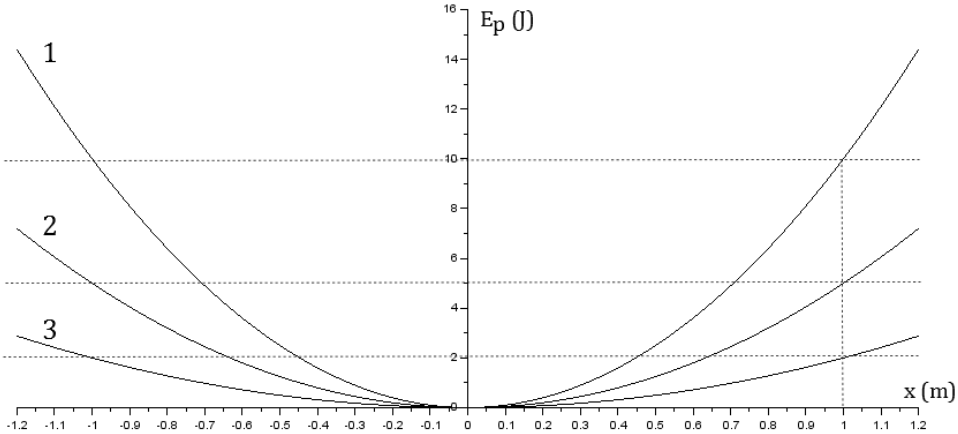
   On lance une balle vers le haut, balle située initialement à $z_0 = 1\,m$ du sol. Cette position initiale est choisie comme origine pour E_{pp}. Comment écrire E_{pp} ?

2) **Saut à l'élastique :** Comment s'exprime l'énergie potentielle de la personne qui a sauté du pont, le pont étant pris comme origine de l'énergie potentielle (cf. schéma) ?



Exercice 2 : Energie potentielle élastique

Expérimentalement, on a obtenu pour trois ressorts différents les courbes d'énergie potentielle élastique suivantes :



1) Que représente x ?

2) Déterminer les constantes de raideur des 3 ressorts.

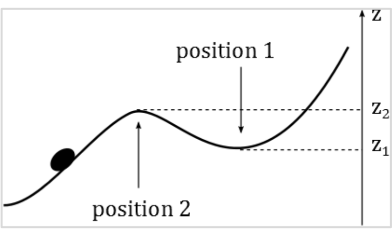
3) La raideur est la caractéristique qui indique la résistance à la déformation élastique du ressort. Pour une élongation donnée, quel est le ressort qui emmagasine la plus grande énergie ?

Exercice 3 : Montagnes russes

On modélise un chariot sur une piste de montagnes russes par un point matériel de masse m.

a) Sur la portion de circuit représentée ci-contre, quelles sont les positions d'équilibre possibles pour le chariot ?

b) Que penser de leur stabilité ?



Exercice 4 : Chute

Une première pierre de masse m tombe au sol à partir d'une hauteur h, sans vitesse initiale. Une seconde pierre, de masse $2m$, tombe de la même hauteur. On négligera tout frottement au cours de la chute.

1) Si E_{c1} et E_{c2} sont les énergies cinétiques des pierres frappant le sol, alors :

a. $E_{c2} = 2E_{c1}$ **b.** $E_{c2} = 4E_{c1}$ **c.** $E_{c2} = E_{c1}$ **d.** $E_{c2} = E_{c1}/2$

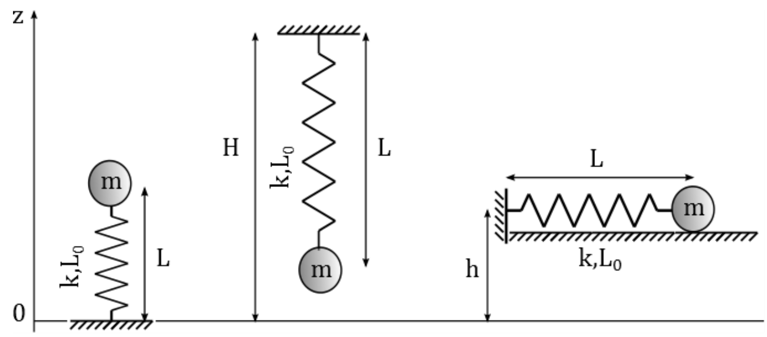
e. Il est impossible de déterminer la relation liant les 2 énergies cinétiques.

2) Déterminer l'expression de la vitesse v_1 de la pierre de masse m lorsqu' elle arrive au sol. Quelle est l'expression de la vitesse v_2 de la pierre de masse $2m$?

Exercice 5

Sur les 3 schémas suivants, le ressort, de constante de raideur k et de longueur à vide L_0, a une longueur L. Une extrémité est fixe, on accroche à l'autre une boule de masse m.

Dans le 3ème cas, la boule se déplace sans frottement sur le plan horizontal. En l'absence de frottement, la force de contact exercée par le support plan sur la boule « ne travaille pas »



La position de la boule est repérée sur l'axe vertical ascendant Oz d'origine donnée ci-contre, qui sera également prise comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur. On note g l'accélération de la pesanteur.

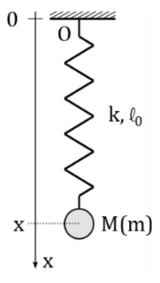
Exprimer dans chaque cas l'énergie potentielle totale de la boule liée au ressort en fonction de m, g, k, L, L_0, H, h.

Exercice 6 : Energie potentielle du pendule simple

Une bille assimilable à un point matériel M de masse m est suspendue à une tige de longueur L et de masse négligeable, reliée à un point fixe O. La tige tourne librement autour d'un axe horizontal passant par O. La position du pendule est repérée par l'angle θ que fait la tige avec la verticale descendante.

1) Déterminer l'énergie potentielle du point M en fonction notamment de θ, angle du fil avec la verticale à un instant t donné. Quelle serait l'expression de cette énergie potentielle de pesanteur en choisissant un axe vertical ascendant ? Commenter.
2) Etablir l'expression des positions d'équilibre et discuter de leur stabilité.

Exercice 7 : Étude énergétique d'une masse au bout d'un ressort vertical



On considère un ressort de masse négligeable, de raideur k et de longueur au repos ℓ_0, accroché à un point fixe O. Ce ressort pend verticalement et on fixe sur son extrémité libre une bille M de masse m.

On note Ox l'axe vertical descendant, la position de la bille est donc repérée par x.

L'accélération de la pesanteur est notée g.

a. Exprimer l'énergie potentielle totale E_p du point matériel en fonction de x, ℓ_0, k, m et g, l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur étant prise en O.

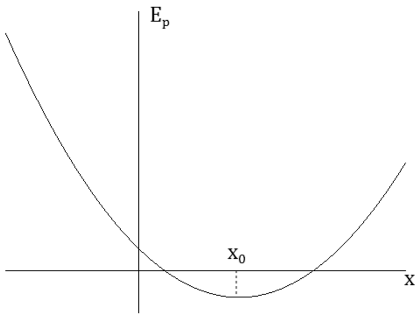
b. La courbe donnant E_p en fonction de x a l'allure ci-contre.

Soit x_0 correspondant au minimum de $E_p(x)$. Déterminer l'expression de x_0.

Que peut-on conclure concernant un équilibre éventuel de la bille ?

c. D'après la courbe, que dire de $\frac{dE_p}{dx}$ pour : $x < x_0$? $x = x_0$? $x > x_0$?

Quel est le signe de $\frac{d^2E_p}{dx^2}$ au voisinage de x_0 ?



Exercice 8 : La pomme de Newton

On se plaît souvent à imaginer que Newton aurait élaboré sa théorie de la gravité après avoir reçu une pomme en chute libre sur la tête. Si cette pomme trônait à $1{,}8\,m$ au-dessus de la tête de Newton, avec quelle vitesse a-t-elle frappé son crâne ?

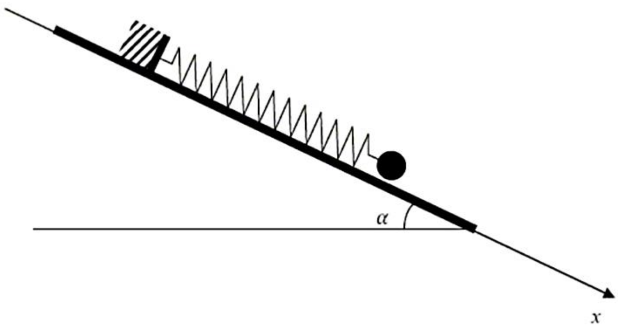
On rappelle la valeur de l'accélération de la pesanteur : $g = 9{,}8\,m.s^{-2}$.

Exercice 9 : Skieur

Un étudiant de prépa ATS glisse sur une piste de ski depuis une altitude $h = 15\,m$. Sa vitesse initiale est nulle. On note α l'angle entre la piste et l'horizontale et on néglige les frottements.

Déterminer sa vitesse finale sachant qu'il est parti du haut de la piste sans vitesse initiale.

Exercice 10 : Oscillateur sur plan incliné



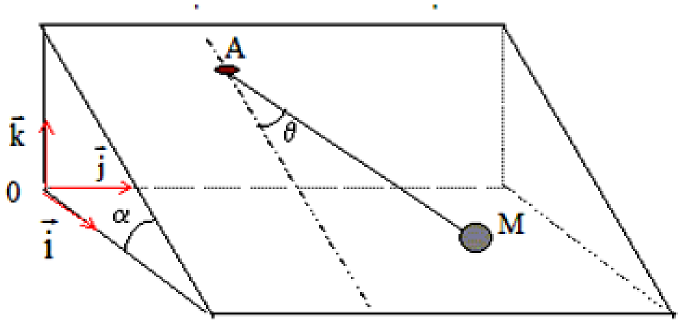
La masse *m* est accrochée au ressort de raideur *k*. On suppose que la masse peut se déplacer sans frottement sur la ligne de plus grande pente.

1) A partir de l'expression de l'énergie potentielle, déterminer l'allongement du ressort lorsque le système est en équilibre. Cette position d'équilibre est-elle stable ? Justifier.

On écarte la masse de cette position d'équilibre.

2) Déterminer les expressions de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique de la masse.
3) Ecrire la conservation de l'énergie mécanique E_m.
4) Etablir l'équation différentielle vérifiée par la position de la masse.

Exercice 11 : Pendule sur plan incliné

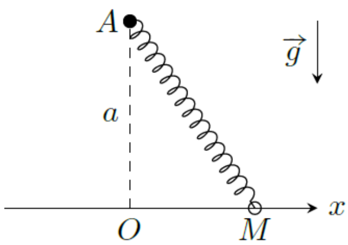


La masse *m* oscille sans frottement sur le plan incliné.

1) Exprimer l'énergie cinétique *Ec* de la masse m en fonction $\dot{\theta}$ notamment.
2) Exprimer l'énergie potentielle *Ep* de la masse en fonction de *θ* et *α* notamment.
3) Déterminer physiquement puis analytiquement les positions d'équilibre de la masse, ainsi que leur stabilité.
4) Tracer *Ep* en fonction de *θ* et retrouver les positions d'équilibre de la masse.
5) Ecrire la conservation de l'énergie mécanique *Em.*
6) Etablir l'équation différentielle vérifiée par *θ.*

Exercice 12 : Oscillateur de Landau

L'oscillateur de Landau est un modèle théorique permettant de modéliser efficacement des systèmes physiques pour lesquelles des faibles non-linéarités sont à prendre en compte. Il s'agit d'une approximation un peu plus précise que celle de l'oscillateur harmonique pour étudier le comportement de systèmes au voisinage de leur position d'équilibre.



Un exemple de système modèle permettant de réaliser un oscillateur de Landau est un petit anneau, assimilé à un point matériel M de masse m, astreint à se déplacer sans frottement le long d'une tige rectiligne horizontale choisie comme axe (Ox). M est accroché à un ressort de longueur à vide L_0 et de raideur k.

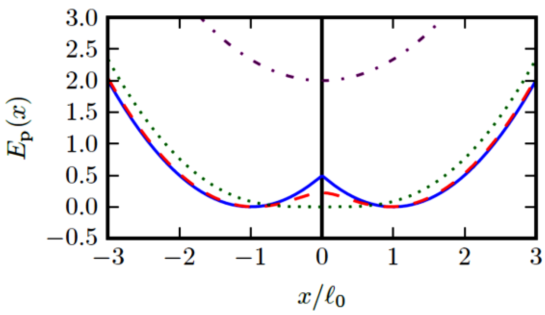
L'autre extrémité A du ressort est fixe et se situe à la distance a du point O.

L'objet de ce problème est de déterminer une bifurcation, à savoir une modification du nombre de positions d'équilibre, d'un changement de stabilité des positions d'équilibre…

1) Cette question (**facultative pour la suite**) doit être résolue **sans aucun calcul :** dans les 2 cas $a > L_0$ puis $a < L_0$, discuter qualitativement le nombre de positions d'équilibre et leur stabilité.

2) Pour une valeur de a quelconque, déterminer l'expression de l'énergie potentielle globale de M en fonction de k, L_0, a et x.

3) La courbe d'énergie potentielle est représentée ci-dessous pour quatre valeurs de a : $a_1 = \frac{L_0}{10}$, $a_2 = \frac{L_0}{3}$, $a_3 = L_0$ et $a_4 = 3L_0$. En raisonnant qualitativement sur l'expression de l'énergie potentielle et les positions d'équilibre, attribuer chaque courbe à la valeur de a qui lui correspond.



4) Déterminer par le calcul les positions d'équilibre dans les 2 cas $a > L_0$ puis $a < L_0$ et discuter de leur stabilité.

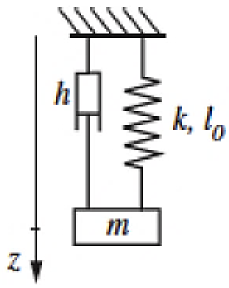
<u>Exercice 13 : Oscillateur vertical amorti</u>

On considère un système masse avec ressort, comportant un amortisseur en parallèle.

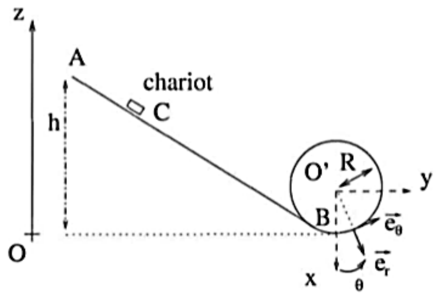
1) Exprimer l'énergie potentielle de la masse *m*.
2) Déterminer la position d'équilibre du système.

On évolue désormais en régime dynamique.

3) Exprimer l'énergie cinétique de la masse *m.*
4) A partir du théorème de la puissance mécanique, établir l'équation différentielle vérifiée par la position *z* de la masse *m,* en considérant que la puissance de la force de frottement s'écrit $P_{nc} = -h.v^2$.



<u>Exercice 14 : Chariot dans un parc d'attraction</u>



On étudie numériquement la trajectoire d'un chariot de parc d'attraction, de masse $m = 10$ tonnes. Ce chariot part du point A, descend le long du plan incliné et entre ensuite dans un looping haut de 40 m, où l'on suppose qu'il peut parcourir plusieurs tours.

Les courbes de la figure 2 représentent l'évolution au cours du temps de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$, de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$, de l'énergie totale $\mathcal{E}_m$ et l'évolution de la réaction normale R_n du looping sur le chariot.

Donnée : $g \simeq 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

1 - Associer à chaque courbe la grandeur représentée. La simulation prend-elle en compte des frottements et autres sources de dissipation ?

2 - Calculer la hauteur initiale h et la vitesse initiale V_0 du chariot, et la vitesse maximale V_{max} qu'il atteint.

3 - À quelle date le chariot quitte-t-il le looping ?

4 - Combien de tours entiers effectue le chariot avant de se décoller du looping ?

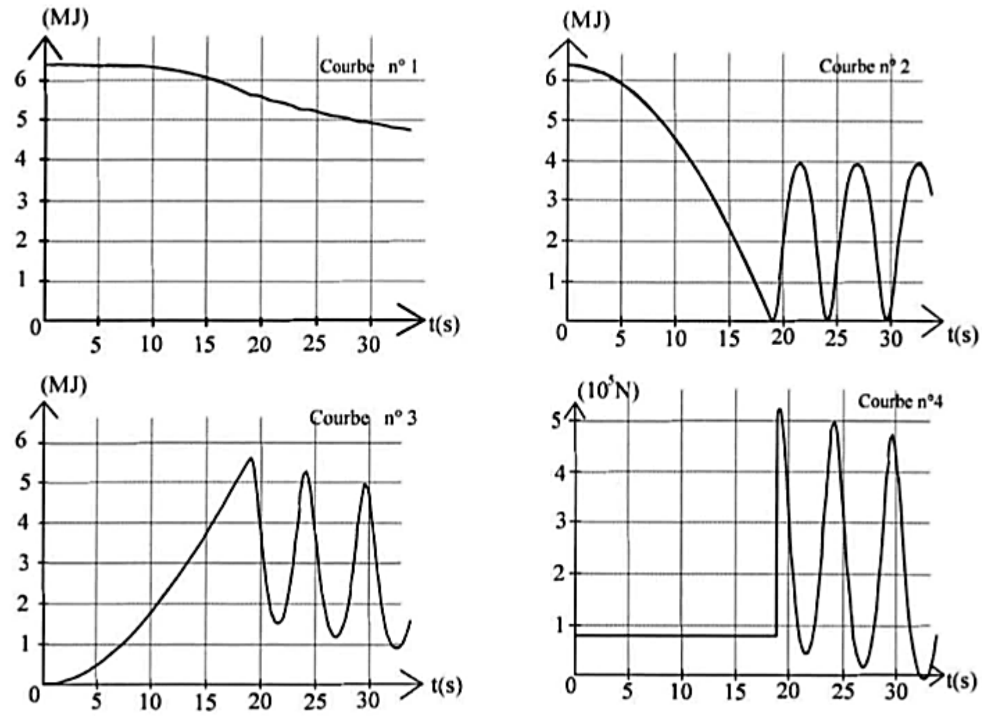


Figure 2 – **Simulation numérique du mouvement d'un chariot.**

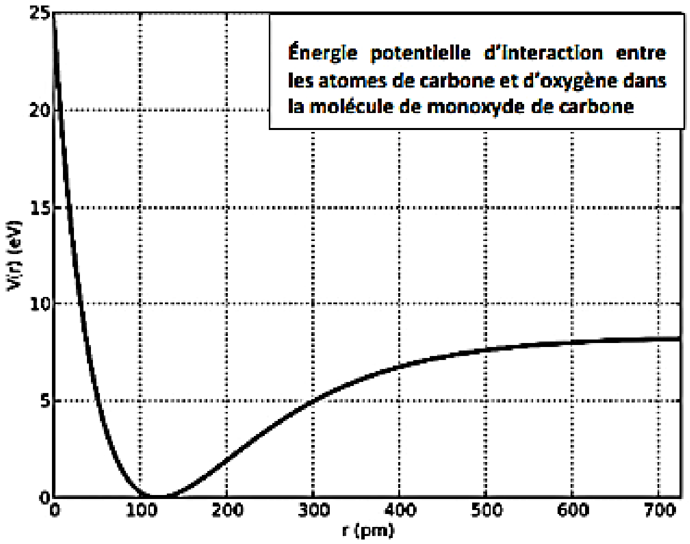
Exercice 15 : Vibration de la molécule de monoxyde de carbone

Une molécule de monoxyde de carbone CO est modélisée par 2 masses ponctuelles m_1 pour l'atome de carbone et m_2 pour l'atome d'oxygène. Pour simplifier, on considérera que l'atome de carbone est fixe dans un référentiel galiléen, et que l'atome d'oxygène ne peut subir que des déplacements rectilignes le long d'un axe Ox. L'attraction gravitationnelle est négligeable à cette échelle.

L'énergie potentielle d'interaction des 2 atomes, associée à la force qui les lie, est représentée par l'équation empirique :

$$V(r) = V_0\left(1 - e^{-\beta(r-r_0)}\right)^2$$

Où r est la distance des noyaux des 2 atomes et V_0, β et r_0 sont des constantes positives.

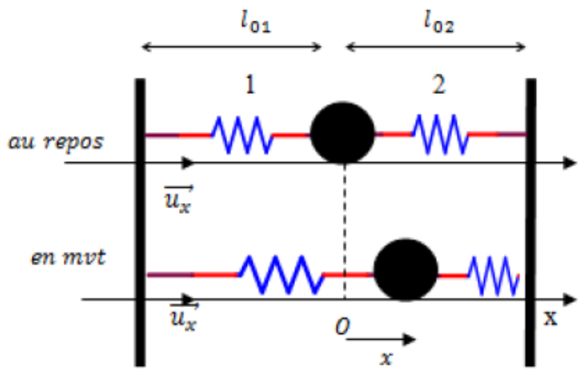


On donne ci-contre le graphe de $V(r)$:

1) Quelle est la dimension de β ?
2) Que représentent physiquement V_0 , r_0 et β^{-1} ? Faire apparaitre V_0 et r_0 sur le graphe et donner leurs valeurs.
3) L'interaction qui lie les 2 atomes est-elle répulsive (qui tend à séparer les atomes) ou attractive (qui tend à rapprocher les atomes) quand leur distance r est inférieure à la position d'équilibre ?
4) Même question si leur distance r est supérieure à la position d'équilibre.
5) Analyser qualitativement le mouvement de l'atome d'oxygène si son énergie mécanique est inférieure à V_0.

Exercice 16 : molécule de dioxyde de carbone

On modélise la molécule de dioxyde de carbone (CO_2) par le modèle simple suivant dans lequel, le carbone est mobile et les deux atomes d'oxygène sont fixes. Les interactions électriques sont modélisées par des ressorts. Le mouvement du carbone se ramène alors à celui d'un mobile de masse rattaché à deux ressorts.



L'ensemble se met en mouvement horizontalement sans aucun frottement.

On note l_0 la longueur à vide des ressorts 1 et 2. On appelle k la constante de raideur des deux ressorts. On prendra l'origine du repère en O, position d'équilibre du système.

Par analyse énergétique, prévoir l'amplitude maximale de vibration si $x(0) = 0$ et $v(0) = v_0 > 0$?