Exercice 1

$\boxed{\text{TD M2}}$

1) $E_{pp} = mg(z - z_0)$

2) $E_{pp} = -mgz$.

Exercice 2

1) x représente l'allongement. $x = \ell - \ell_0$

2) $E_{pé} = \frac{1}{2}kx^2$

Pour $x = 1\,m$:

Ressort 1 : $E_{pé} = 10\,J$ (graphiquement)

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}k \cdot 1^2 = 10$

$\Leftrightarrow \underline{k_1 = 20 \ kg \cdot s^{-2}}$

Ressort 2 : $E_{pé}' = 5\,J$

$\Rightarrow \underline{k_2 = 10 \ kg \cdot s^{-2}}$

Ressort 3 : $E_{pé}' = 2\,J$

$\Rightarrow \underline{k_3 = 4 \ kg \cdot s^{-2}}$

$$[k] = \frac{[E_{pé}]}{[x^2]} = \frac{J}{m^2} = \frac{N \cdot m}{m^2} = \frac{kg \cdot \cancel{m} \cdot s^{-2} \cdot \cancel{m}}{\cancel{m^2}} = kg \cdot s^{-2}$$

3) ~~Ressort 1 car $k_1 > k_2 > k_3$~~

Exercice 3

a) Position 1 : Position d'équilibre stable

b) Position 2 : Position d'équilibre instable.

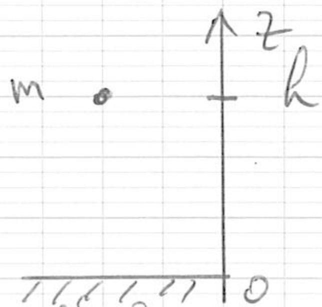
Car : Position 1 : Minimum local d'E_{pp}

$E_{pp1} = mgz_1 + cte$

Position 2 : Maximum local d'E_{pp}

$E_{pp2} = mgz_2 + cte$

Exercice 4



1) Conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m(h) = E_m(0)$$
$$E_{pp}(h) + E_c(h) = E_{pp}(0) + E_c(0)$$
$$mgh + \cancel{cte} + 0 = \cancel{cte} + E_c$$

d'où : $E_c = mgh$.

Si m double, alors E_c double.

$\Rightarrow$ Réponse a : $E_{c_2} = 2.E_{c_1}$

2) $\cancel{m}gh = E_c = \frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2$

d'où :

$$gh = \frac{1}{2}v^2$$

d'où :

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

$v_2 = v_1$ car cette vitesse est indépendante de la masse.

Exercice 5

$$E_p = E_{pp} + E_{pé}$$

Cas 1 (gauche)

$E_{pp} = + mgz + cte$

Avec : $E_{pp}(0) = mg \times 0 + cte = 0$

$\Rightarrow cte = 0$

d'où : $E_{pp} = mgz = mgL$

$E_{pé} = \frac{1}{2}k(L - L_0)^2$

d'où :

$$\underline{E_p = mgL + \frac{1}{2}k(L - L_0)^2}$$

Cas 2 (centre)

$E_{pp} = + mgz + cte$ avec $cte = 0$

$E_{pp} = mgz = mg(H - L)$

$E_{pél} = \frac{1}{2}k(L - L_0)^2$

d'où :

$$\underline{E_p = mg(H-L) + \frac{1}{2}k(L-L_0)^2}$$

Cas 3 (droite)

$E_{pp} = mgh$

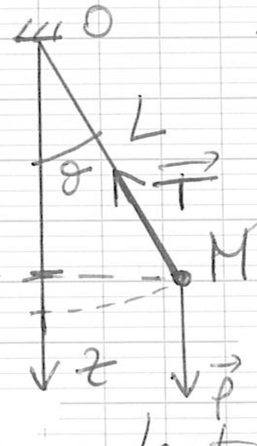
$E_{pél} = \frac{1}{2}k(L - L_0)^2$

d'où

$$\underline{E_p = mgh + \frac{1}{2}k(L-L_0)^2}$$

(*) compléments pages 6, 7, 8

Exercice 6



1) $E_{pp} = -mgz + cte$

avec $cte = 0$ si $E_{pp}(0) = 0$

D'autre part :

$z = L\cos\theta$

D'où :

$$\underline{E_{pp} = -mgL\cos\theta}$$

(associée à $\vec{P}$).

Remarque : La tension $\vec{T}$ du fil ne travaille pas (car elle reste en permanence perpendiculaire au déplacement) donc elle peut être associée à une énergie potentielle nulle.

d'où : $\underline{E_p = E_{pp} = -mgL\cos\theta}$ *

2) $\frac{dE_p}{d\theta} = mgL\sin\theta$.

$\frac{dE_p}{d\theta} = 0$ si $\sin\theta = 0$ (car $m, g, L \neq 0$)

$\Leftrightarrow \underline{\theta = 0\ [\pi]}$

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = mgL\cos\theta$$

* $\theta = 0$ $\Rightarrow \frac{d^2E_p}{d\theta^2} = mgL > 0$
  ($\cos\theta = 1$)

$\Rightarrow$ Position d'équilibre <u>stable</u>.

* $\theta = \pi$ ou $-\pi$
  ($\cos\theta = -1$) $\Rightarrow \frac{d^2E_p}{d\theta^2} = -mgL < 0$

$\Rightarrow$ Position d'équilibre <u>instable</u>

* Si Axe z ascendant :
  $E_{pp} = +mgz$
  Mais : $z = -L\cos\theta$
  d'où : $\underline{E_{pp} = E_p = -mgL\cos\theta}$

<u>même expression</u> !

<u>Exercice 7</u>

a- $E_p = E_{pé} + E_{pp}$
$= \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 - mgx$

$$\underline{E_p = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2 - mgx}$$

b- Equilibre stable pour $x = x_0$ car minimum d'Energie Potentielle.

$\frac{dE_p}{dx} = k(x - l_0) - mg = 0 \Rightarrow \underline{x_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}}$

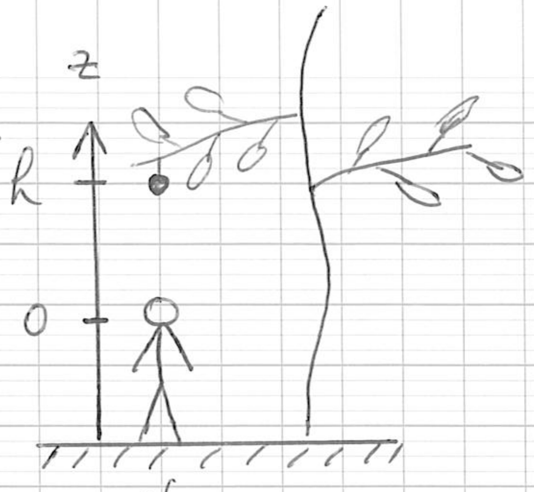
c- $x < x_0$ $\rightarrow E_p(x)$ décroissante
$\rightarrow \frac{dE_p}{dx} < 0$

$x = x_0$ $\rightarrow \frac{dE_p}{dx} = 0$

$x > x_0$ $\rightarrow E_p(x)$ croissante
$\rightarrow \frac{dE_p}{dx} > 0$

$\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$ au voisinage de x_0.

Exercice 8



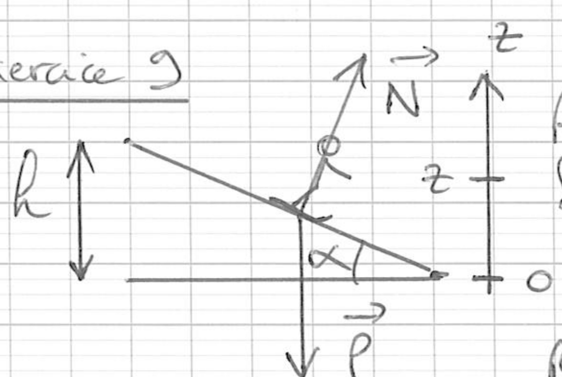
Conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m(h) = E_m(0)$$
$$E_p(h) + E_c(h) = E_p(0) + E_c(0)$$
$$mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

On en déduit :

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 1{,}8}$$
$$\simeq \sqrt{2 \times 10 \times 2} \simeq \sqrt{40}$$
$$\simeq \underline{6{,}5 \text{ m.s}^{-1}}$$

Exercice 9



Référentiel : Terrestre

Système : Skieur, considéré comme un point matériel de masse m.

BAME :

- $\vec{P}$ associée à $E_{pp} = mgz$
- $\vec{N}$ ne travaille pas ($\perp$ au mouvement)
- Pas de frottement.

Conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m(h) = E_m(0)$$
$$E_p(h) + E_c(h) = E_p(0) + E_c(0)$$
$$mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

d'où :

$$\underline{v = \sqrt{mgh}} \quad \text{(indépendant de } \alpha \text{)}$$

Exercice 16

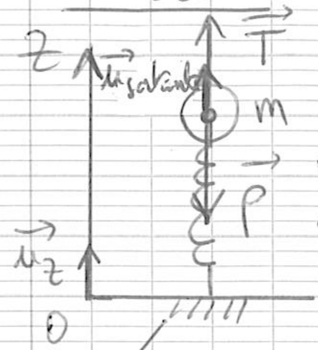
Conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m(0) = E_m(x_{max})$$

$$\Leftrightarrow E_{pé_1}(0) + E_{pé_2}(0) + E_c(0) = E_{pé_1}(x_{max}) + E_{pé_2}(x_{max}) +$$

M2 Exercice 5 (Complément)

Cas 1



* Référentiel : Terrestre supposé galiléen
* Système : masse m
* BAME + E_p

Paramétrage
$z = \ell$
$\vec{u}_z = \vec{u}_{sortant}$

Forces	Energies potentielles
$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$	$E_{pp} = +mgz + cte_1$ ($cte_1 = 0$)
$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{sortant}$, $\vec{T} = -k(z-\ell_0)\vec{u}_z$	$E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2 + cte_2$ ($cte_2 = 0$), $E_{pe} = \frac{1}{2}k(z-\ell_0)^2$

$E_p = E_{pp} + E_{pe}$

* Position d'équilibre $z = z_{eq}$?
Principe Fondamental de la Statique (PFS) :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$
$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$
$$-mg\vec{u}_z - k(z-\ell_0)\vec{u}_z = \vec{0}$$

Projection sur z :

$$-mg - k(z-\ell_0) = 0$$
$$-mg - kz + k\ell_0 = 0$$
$$-mg + k\ell_0 = kz$$
$$\boxed{-\frac{mg}{k} + \ell_0 = z = z_{eq}}$$

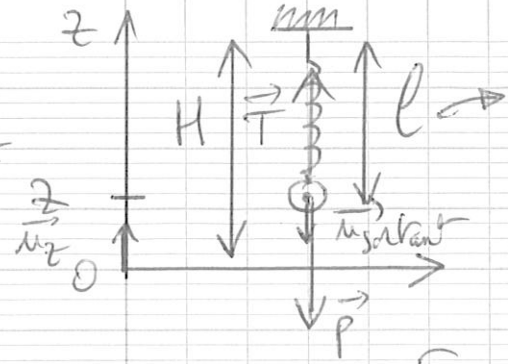
* Equation du mouvement ?
Principe Fondamental de la dynamique (PFD) :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m(\cancel{\ddot{x}\vec{u}_x} + \cancel{\ddot{y}\vec{u}_y} + \ddot{z}\vec{u}_z)$$ (unidirectionnel)
$$-mg\vec{u}_z - k(z-\ell_0) = m\ddot{z}\vec{u}_z$$

Projection sur z :

$$-mg - k(z-\ell_0) = m\ddot{z}$$
$$\underline{-mg + k\ell_0 = m\ddot{z} + kz}$$

Cas 2



Paramétrage :

$$z = H - l \Rightarrow l = H - z \qquad \vec{u}_{suivant} = -\vec{u}_z$$

* BAME + E_p

Forces	E_p
$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{u}_z$	$E_{pp} = +mgz + cte_1$
$\vec{T} = -k(l - l_0)\,\vec{u}_{suivant} = +k(H - z - l_0)\,\vec{u}_z$	$E_{pé} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$; $E_{pé} = \frac{1}{2}k(H - z - l_0)^2$

$l = H - z$

$\vec{u}_{suivant} = -\vec{u}_z$

$E_p = E_{pp} + E_{pé}$!

* Position d'équilibre $z = z_{eq}'$?

$$k(H - z - l_0)\vec{u}_z - mg\,\vec{u}_z = \vec{0}$$

Proj / z

$$kH - kz - kl_0 - mg = 0$$

$$k(H - l_0) - mg = kz$$

$$H - l_0 - \frac{mg}{k} = z = z_{eq}'$$

* Équation du mouvement ?

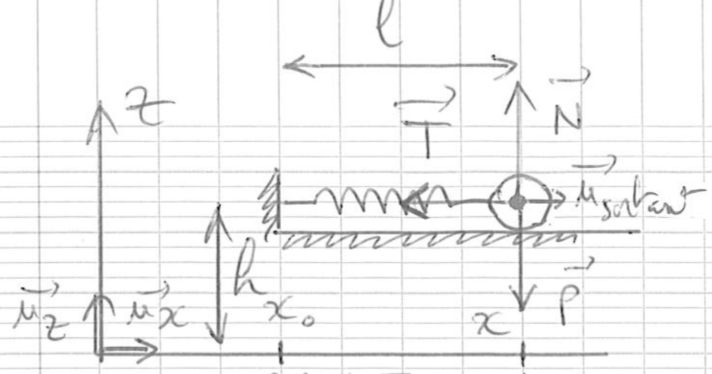
$$k(H - z - l_0)\vec{u}_z - mg\,\vec{u}_z = m(\cancel{\ddot{x}\vec{u}_x} + \cancel{\ddot{y}\vec{u}_y} + \ddot{z}\vec{u}_z)$$

Proj / z

$$kH - kz - kl_0 - mg = m\ddot{z}$$

$$k(H - l_0) - mg = m\ddot{z} + kz$$

Cas 3



Paramétrage :

$\vec{u}_x = \vec{u}_{sortant}$

$\ell = x - x_0$

$x = \ell + x_0$

BAME + E_p

Forces	E_p
$\vec{P} = -mg\vec{u}_z$	$\leftrightarrow E_{pp} = mgh + \underbrace{cte_1}_{=0} = cte$!
$\vec{N} = N\vec{u}_z$	$\leftrightarrow$ Ne travaille pas, associée à $E_p = 0$
$\vec{T} = -k(\ell-\ell_0)\vec{u}_{sortant} = -k(x-x_0-\ell_0)\vec{u}_x$	$\leftrightarrow E_{pé} = \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2$, $E_{pé} = \frac{1}{2}k(x-x_0-\ell_0)^2 + \underbrace{cte_2}_{=0}$

* Position d'équilibre $x = x_{éq}$

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = \vec{0}$$

$$\underbrace{-mg\vec{u}_z + N\vec{u}_z}_{\text{se compensent}} - k(x - x_0 - \ell_0)\vec{u}_x = \vec{0}$$

Projection sur x : $-k(x - x_0 - \ell_0) = 0$

On résoud : $\underline{x_{éq} = x = \ell_0 + x_0}$

* Equation du mouvement ? (Suivant x !)

$$-mg\vec{u}_z + N\vec{u}_z - k(x - x_0 - \ell_0)\vec{u}_x = m(\ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z)$$

Projection sur x :

$$-k(x - x_0 - \ell_0) = m\ddot{x}$$

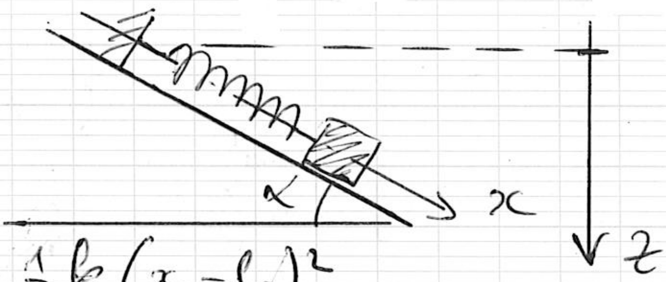
$$\underline{k(x_0 + \ell_0) = m\ddot{x} + kx}$$

ENERGIE MÉCANIQUE
Travaux Dirigés

Exercice 10

1) $E_p = E_{pp} + E_{pe}$
$= -mgz + \underset{0}{cte} + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$

$\begin{cases} l = x \\ z = x \sin\alpha \end{cases}$ Avec z orienté vers le bas



d'où :

$E_p = -mgx\sin\alpha + \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$

$\frac{dE_p}{dx} = -mg\sin\alpha + k(x - l_0) = 0$
Position d'équilibre

$kx_{eq} = kl_0 + mg\sin\alpha$

$x_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}\sin\alpha$

Vérifications : $\begin{cases} x_{eq} > l_0 \text{ car } + \\ m \nearrow \Rightarrow x_{eq} \nearrow \\ k \nearrow \Rightarrow x_{eq} \searrow \\ \alpha \nearrow \Rightarrow x_{eq} \nearrow \end{cases}$

Position stable ou instable ?

$\frac{d^2E_p}{dx^2} = k > 0$
Position stable

2) $E_p = -mgx\sin\alpha + \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$

$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

3) $\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}(E_p + E_c) = -mg\dot{x}\sin\alpha + k\dot{x}(x - l_0) + m\dot{x}\ddot{x}$

4) $\frac{dE_m}{dt} = -mg\dot{x}\sin\alpha + k\dot{x}(x-l_0) + m\dot{x}\ddot{x} = 0$

$\dot{x}\left(-mg\sin\alpha + k(x-l_0) + m\ddot{x}\right) = 0$

$\dot{x} = 0$

ou $kx + m\ddot{x} = kl_0 + mg\sin\alpha$

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}l_0 + g\sin\alpha$

5) $x(t) = \cancel{\frac{k}{m}}l_0 + \frac{mg\sin\alpha}{k} + A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

CI : $x(0) = x_1$
$\dot{x}(0) = 0$

$\dot{x}(t) = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi)$

(b) $x(0) = \cancel{\frac{k}{m}}l_0 + \frac{g\sin\alpha\, m}{k} + A = x_1$

$\Rightarrow A = x_1 - \left(\cancel{\frac{k}{m}}l_0 + \frac{g\sin\alpha\, m}{k}\right)$

(a) $\dot{x}(0) = 0 = -\omega_0 A\sin\varphi$

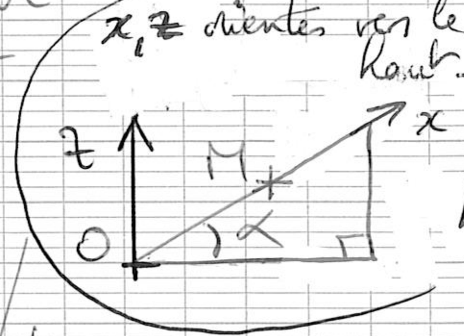
$\Rightarrow$ On prend $\varphi = 0$

Solution :

$x(t) = \cancel{\frac{k}{m}}l_0 + \frac{mg\sin\alpha}{k} + \left(x_1 - \cancel{\frac{k}{m}}l_0 + \frac{mg\sin\alpha}{k}\right) \times \cos\omega_0 t$

Exercice 11 : Pendule sur plan incliné

$$\frac{dE_c}{dt} = mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$$



1) $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ Avec $v = L\dot{\theta}$

$E_c = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2$

2) $E_p = mgz + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\text{constante}}}$

$z = L(1-\cos\theta)\sin\alpha$ | Hyp : θ petit

$E_p = mgL(1-\cos\theta)\sin\alpha + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\text{constante}}}$

* $\frac{dE_p}{dt} = mgL\dot{\theta}\sin\theta\sin\alpha$

3) $\frac{dE_m}{dt} = P_{non\ cons} = 0$

5) 6) $\frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_m}{dt} = 0$

$\cancel{m}L^{\cancel{2}}\cancel{\dot{\theta}}\ddot{\theta} + \cancel{m}g\cancel{L}\cancel{\dot{\theta}}\sin\theta\sin\alpha = 0$

$L\ddot{\theta} + g\sin\alpha\sin\theta = 0$

Avec θ petit $\Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$

$L\ddot{\theta} + g\sin\alpha\,\theta = 0$

$\ddot{\theta} + \frac{g\sin\alpha}{L}\theta = 0$

$\omega_0^2 = \frac{g\sin\alpha}{L}$ $\qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g\sin\alpha}{L}}$ Homogénéité !

** $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g\sin\alpha}}$

Exercice 2

Jet d'eau genève.

$D_v = S.v = \frac{\pi D^2}{4} v$

d'où : $v = \frac{4 D_v}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0,5}{\pi \times (0,107)^2}$

$\simeq \frac{4 \times 0,5}{3 \times 0,01} \simeq 70 \text{ m.s}^{-1}$

Spatif.

$v = \sqrt{2gh}$

$v^2 = 2gh$

$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{10^2}{2 \times 10} = 5 \text{ m}$

En réalité $h < 5$ car

$v_z \neq v$

Exercice 3

1) $p_1 V_1 = nRT_1$ $\quad p_0 V_0 = nRT_0$

avec $T_1 = T_0$

$p_1 V_1 = p_0 V_0$

$V_1 = V_0 \frac{p_0}{p_1} = 20 \times \frac{100}{1} = 2000 \text{ L}$

2) $\delta W = -p_{ext}.dV$

$\simeq -p.dV$ car Transformation lente

avec $p = p_0 \frac{V_0}{V}$

$\delta W = -p_0 V_0 \frac{dV}{V}$

$W = -\int_{V_0}^{V_1} p_0 V_0 \frac{dV}{V} = -p_0 V_0 [\ln V]_{V_0}^{V_1}$

$= -p_0 V_0 \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) < 0$

car Travail fourni !

Exercice 11 : Pendule sur plan incliné (suite).

3) $E_p = mgL(1-\cos\theta)\sin\alpha$

$$\frac{dE_p}{d\theta} = mgL\sin\theta\sin\alpha$$

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = mgL\cos\theta\sin\alpha$$

$$\frac{dE_p}{d\theta} = 0 \iff \theta = 0 + 2k\pi \text{ ou } \theta = \pi + 2k\pi$$

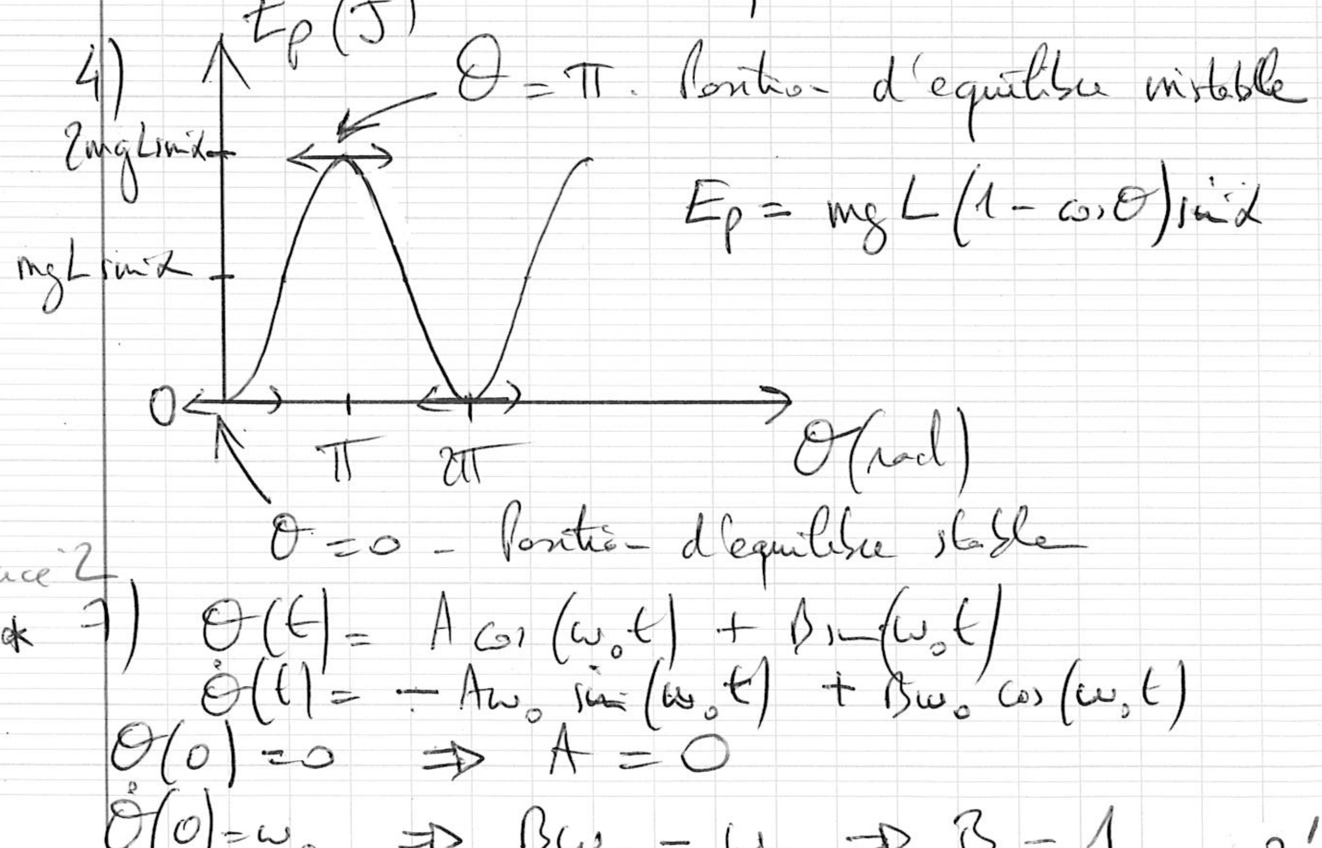
* $\theta = 0 + 2k\pi \Rightarrow \dfrac{d^2E_p}{d\theta^2} = mgL\sin\alpha > 0$

Position d'équilibre stable

* $\theta = \pi + 2k\pi \Rightarrow \dfrac{d^2E_p}{d\theta^2} = -mgL\sin\alpha < 0$

Position d'équilibre instable.

4)



Exercice 2

1) $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

$\dot\theta(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$

$\theta(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$\dot\theta(0) = \omega_0 \Rightarrow B\omega_0 = \omega_0 \Rightarrow B = 1$

Exercice 11 : Complément
(Pendule sur plan incliné)

On ajoute une force de frottement fluide : $\vec{f} = -h.\vec{v}$.

Th. Em :

$$\frac{d}{dt}(E_m) = \frac{d}{dt}(E_{pp} + E_c) = P_{nc}$$
$$= \vec{f}.\vec{v}$$
$$= -h\vec{v}.\vec{v} = -hv^2$$
$$= -h(L\dot{\theta})^2$$
$$= -hL^2\dot{\theta}^2$$

C'est à dire :

$$mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgL\dot{\theta}\sin\alpha\sin\theta = -hL^2\dot{\theta}^2$$

Ou :

$$L\dot{\theta}(mL\ddot{\theta} + mg\sin\alpha\sin\theta + hL\dot{\theta}) = 0$$

$L\dot{\theta}$ non pertinent

$$mL\ddot{\theta} + mg\sin\alpha\sin\theta + hL\dot{\theta} = 0$$

$\sin\theta \simeq \theta$ (Approx petits angles)

Sous forme canonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{h}{m}\dot{\theta} + \frac{g\sin\alpha}{L}\theta = 0$$

Identification :

$$\begin{cases} \frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m} \\ \omega_0^2 = \frac{g\sin\alpha}{L} \end{cases} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g\sin\alpha}{L}}$$

$$Q = \omega_0\frac{m}{h} = \sqrt{\frac{g\sin\alpha}{L}} \times \frac{m}{h}$$

Resolution, par exemple, en regime critique :

$$\theta(t) = \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{SP} + (At + B)e^{-\omega_0 t}$$

CI : $\theta(0) = 0$
$\dot{\theta}(0) = \omega_0$

$$\dot{\theta}(t) = Ae^{-\omega_0 t} - \omega_0 (At+B)e^{-\omega_0 t}$$

D'où :

$$\begin{cases} \theta(0) = B = 0 \\ \dot{\theta}(0) = A - \omega_0 B = \omega_0 \end{cases}$$

On en déduit : $\left| \begin{array}{l} A = \omega_0 \\ B = 0 \end{array} \right.$

Solution :

$$\underline{\theta(t) = \omega_0 t e^{-\omega_0 t}}$$

Exercice 12 : Oscillateur de Landau

1) Si $a > L_0$, c'est à dire ressort étiré lorsque $x = 0$

$\Rightarrow$ 1 seule position d'équilibre stable : $x = 0$

Si $a < L_0$, c'est à dire ressort comprimé lorsque $x = 0$

$\Rightarrow$ 1 position d'équilibre instable : $x = 0$

$\Rightarrow$ 2 positions d'équilibre stables : x tel que $l = l_0$ ($x > 0$ ou $x < 0$).

2) $E_p = E_{pp} + E_{pe}$

$= cte + E_{pe}$

Avec $cte = 0$

$$E_p = E_{pe} = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 + cte$$

$$E_p = E_{pe} = \frac{1}{2} k \left(\sqrt{a^2 + x^2} - l_0\right)^2 + cte$$

3) —·—·— : 1 seule valeur minimale de E_p (position d'équilibre stable).

$\Rightarrow a > L_0 \Rightarrow a_4 = 3L_0$

(e) - - - - - - : 3 positions d'équilibre

$x = 0$: maximum de E_p

$\Leftrightarrow$ position d'équilibre instable

$x > 0$, $x < 0$: minimums de E_p

$\Leftrightarrow$ positions d'équilibre stables

Par étude des limites des comportements :

——— : $a_1 = \frac{L_0}{10}$

- - - - - - - - : $a_2 = \frac{L_0}{3}$

.... : Correspond à la courbe limite entre $a < L_0$ et $a > L_0$

$\Rightarrow a_3 = L_0$

4) $$\frac{dE_p}{dx} = k \frac{d}{dx}\left(\sqrt{a^2+x^2} - l_0\right)\left(\sqrt{a^2+x^2} - l_0\right)$$

Avec $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{a^2+x^2} - l_0\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\left(a^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}} - l_0\right)$$

$$= \frac{1}{2} 2x \left(a^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

d'où :

$$\frac{dE_p}{dx} = \frac{kx}{\sqrt{a^2+x^2}}\left(\sqrt{a^2+x^2} - l_0\right)$$

$\frac{dE_p}{dx} = 0$ si

(1) $x = 0 \rightarrow$ Stable ou instable ? $\frac{d^2E_p}{dx^2} = \ldots$

ou

(2) $\sqrt{a^2+x^2} - l_0 = 0$

$\sqrt{a^2+x^2} = l_0$

$a^2 + x^2 = l_0^2$

$x^2 = l_0^2 - a^2$

$x_{eq} = \pm\sqrt{l_0^2 - a^2}$ avec $l_0^2 - a^2 > 0$

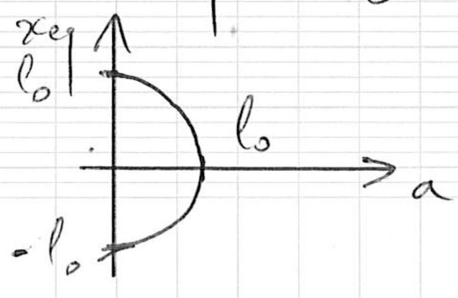
$l_0 > a$

$a < l_0$

Stable ou instable ?

$\frac{d^2E_p}{dx^2} = \ldots$ (*)

5) $a^2 + x_{eq}^2 = l_0^2 \rightarrow x_{eq} = f(a)$ équation d'un cercle !



Oscillateur de Landau (suite)

7

$$\frac{dE_p}{dx} = \frac{kx}{\sqrt{a^2+x^2}}\left(\sqrt{a^2+x^2} - l_0\right)$$

$$= k\left(x - \frac{l_0 x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} = k\left(1 - l_0 \frac{\sqrt{a^2+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}}{a^2+x^2}\right)$$

$$= k\left(1 - l_0 \frac{a^2+\cancel{x^2} - \cancel{x^2}}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}\right)$$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} = k\left(1 - l_0 \frac{a^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

* Position d'équilibre $x_{eq} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d^2E_p}{dx^2}(0) = k\left(1 - l_0 \frac{\cancel{a^2}}{a^{\cancel{3}}}\right)$$

$$= k\left(1 - \frac{l_0}{a}\right)$$

$$= k\left(\frac{a-l_0}{a}\right)$$

Si $a > l_0$ $\quad \frac{d^2E_p}{dx^2}(0) > 0$

Position d'éq. stable

Si $a < l_0$ $\quad \frac{d^2E_p}{dx^2}(0) < 0$

Position d'éq. instable

$\longrightarrow$

d Positions d'équilibre $x_{eq_2} = \pm\sqrt{l_0^2 - a^2}$

$$x_{eq_2}^2 = l_0^2 - a^2$$

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2}\Big(\overbrace{\pm\sqrt{l_0^2-a^2}}^{x_{eq_2}}\Big) = k\left(1 - l_0 \frac{a^2}{(\cancel{a^2} + l_0^2 - \cancel{a^2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq_2}) = k\left(1 - \cancel{l_0} \frac{a^2}{l_0^{\cancel{3}2}}\right)$$

$$= k\left(1 - \frac{a^2}{l_0^2}\right)$$

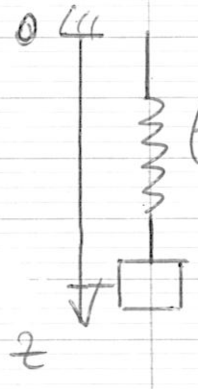
$$= k\left(\frac{l_0^2 - a^2}{l_0^2}\right)$$

Si $a < l_0$ alors $l_0^2 - a^2 > 0$
2 positions d'équilibre stables !

(merci aux bons conseils de M. Mechelinck)

Exercice 13

1) z gradué vers le bas



$E_p = E_{pe} + E_{pp}$

$= \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2 - mgz + cte$

$= \frac{1}{2}k(z-\ell_0)^2 - mgz + cte$

2) $\frac{dE_p}{dz} = k(z-\ell_0) - mg$

$\frac{dE_p}{dz} = 0 \qquad k(z-\ell_0) = mg$

$z - \ell_0 = \frac{mg}{k}$

$z_{eq} = \frac{mg}{k} + \ell_0$

3) $E_c = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$

4) $\frac{dE_m}{dt} = -h\dot{z}^2$ (Théorème de l'Energie Mécanique)

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}k(z-\ell_0)^2 - mgz + \frac{1}{2}m\dot{z}^2\right) = -h\dot{z}^2$

$k\dot{z}(z-\ell_0) - mg\dot{z} + m\dot{z}\ddot{z} = -h\dot{z}^2$

$\dot{z}\left(m\ddot{z} + h\dot{z} + kz\right) = \dot{z}(k\ell_0 + mg)$

$\dot{z} = 0$ non pertinent.

(a)

$m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = k\ell_0 + mg$

$\ddot{z} + \underbrace{\frac{h}{m}}_{\omega_0/Q}\dot{z} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} z = \frac{k\ell_0}{m} + g = \frac{k}{m}\left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right)$

$= \frac{k}{m} z_{eq}$

$$\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_{eq}$$

$\frac{h}{m} \rightarrow 2\lambda$ ou $\frac{\omega_0}{Q}$

$\frac{k}{m} \rightarrow \omega_0^2$

5) Si $\Delta > 0$ $\quad \lambda > \omega_0$

$$z = z_{eq} + \mu_1 \exp(r_1 t) + \mu_2 \exp(r_2 t).$$

Si $\Delta = 0$ $\quad \lambda = \omega_0$

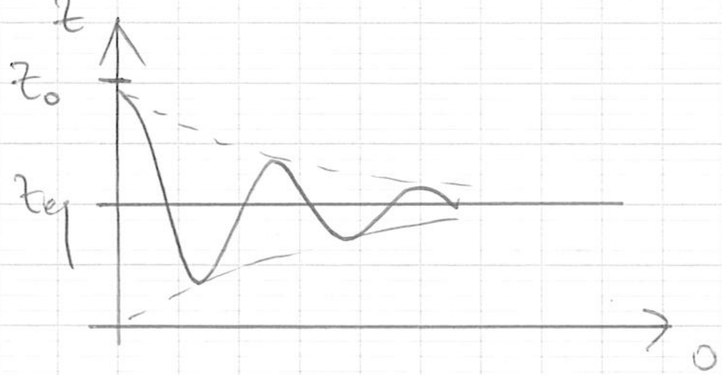
$$z = z_{eq} + (\mu_1 + \mu_2 t)e^{-\omega_0 t}$$

Si $\Delta < 0$ $\quad \lambda < \omega_0$

$$z = z_{eq} + e^{-\lambda t}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right)$$

6) Par ex : $\quad z(0) = z_0$

$\dot{z}(0) = 0.$



(Exercice 4 : Mouvement sur un cercle)

1. Absence de frottement

$\Rightarrow$ Mouvement conservatif

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

z

$$E_m = E_c + E_{pp}$$

$$E_{pp} = mgz + cte = mgR(1-\cos\theta) + \underset{\underset{0}{\parallel}}{cte}$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2$$

(choix).

$$\frac{dE_m}{dt} = \cancel{m}g\cancel{R}\dot\theta\sin\theta + \cancel{m}R^{\cancel{2}}\ddot\theta\dot\theta = 0$$

$$\dot\theta\left(g\sin\theta + R\ddot\theta\right) = 0$$

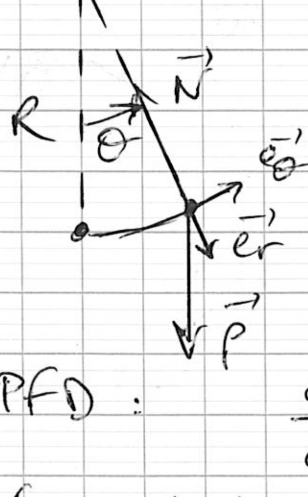
$$\dot\theta = 0$$

ou $g\sin\theta + R\ddot\theta = 0$

$$\ddot\theta + \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

ω_0^2 $\qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$

2.



Référentiel : Terrestre

$\Leftrightarrow$ galiléen

Système : bille M

Bilan des forces :

$$\vec P = -mg\vec{e_z}$$

$$\vec N = N\vec{e_r}$$

PFD : $\dfrac{d\vec p}{dt} = \Sigma\vec F = m\vec a$

En projetant sur $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$:

Sur $\vec{e_r}$:

$$-mR\dot{\theta}^2 = -N + mg\cos\theta \quad (1)$$

Sur $\vec{e_\theta}$:

$$mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \quad (2)$$

(Avec : $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e_\theta}$
et $\dot{r} = \ddot{r} = 0$.)

$(1) \Rightarrow \quad N = mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$

Or : $E_m = mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$

$\Rightarrow$

$$mR\dot{\theta}^2 = \frac{2}{R}E_m + 2mg(\cos\theta - 1)$$

En remplaçant dans (1) :

$$N = \frac{2}{R}E_m + 2mg(\cos\theta - 1) + mg\cos\theta$$

$$N = \frac{2}{R}E_m + mg(3\cos\theta - 2)$$

Or $E_m = E_m(0)$ car mouvement conservatif

$E_m = E_c(0) + E_p(0) = \frac{1}{2}mv_0^2$

On en déduit :

$$N = \frac{m}{R}v_0^2 + mg(3\cos\theta - 2)$$

$$N = m\left(\frac{v_0^2}{R} + g(3\cos\theta - 2)\right)$$

3. $N > 0$

$$\frac{v_0^2}{R} + g(3\cos\theta - 2) > 0$$

$v_0^2 > Rg(2 - 3\cos\theta) \quad \forall \theta$

$v_0^2 > 5Rg \quad$ avec $\cos\theta = -1$

$v_0 > \sqrt{5Rg} = v_{lim}$

4. Si $v_0 < v_{lim}$, la bille quitte le support lorsque $N = 0$.

$$\frac{v_0^2}{R} + g(3\cos\theta - 2) = 0$$

$$(3\cos\theta - 2) = -\frac{v_0^2}{Rg}$$

$$3\cos\theta = 2 - \frac{v_0^2}{Rg}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3Rg}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3Rg}\right).$$

Exercice 14 : Chariot dans parc d'attraction

1. Courbe 1 : E_m
   Courbe 2 : E_p
   Courbe 3 : E_c
   Courbe 4 : N

Il y a des frottements car $\frac{dE_m}{dt} \neq 0$

2. $E_{pp0} = 6{,}5\ MJ$

Or $E_{pp} = mgz + \overset{0}{cte}$

$E_{pp0} = mgh.$

$$h = \frac{E_{pp0}}{mg} = \frac{6{,}5.10^6}{10^4 \times 10} = 65\ m$$

$$E_{cmax} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = 5{,}5\ MJ$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_{cmax}}{m}} = \sqrt{\frac{2\times 5{,}5.10^6}{10^4}} = 33\ m.s^{-1}$$

3. Le chariot quitte le looping lorsque
$N = 0$
c'est à dire à $t = 33\ s$

4. Il y a deux passages par un maximum de E_p avant d'atteindre $N = 0$
$\Rightarrow$ 2 tours complets avant que le chariot ne se décolle du looping.

Exercice 7 : Vibration de la molécule de monoxyde de carbone

1) β en m^{-1}

2) V_0 : Energie potentielle lorsque $r \rightarrow \infty$
r_0 : Distance entre C et O (112,8 pm)
β^{-1} : Inverse d'une longueur caractéristique

V_0 : Potentiel lorsque $r \rightarrow \infty$
r_0 : $r \simeq 120$ pm (r lorsque $V = 0$)

3) $r < r_0$
$\Rightarrow$ Interaction répulsive qui tend à séparer les atomes de façon à atteindre la position d'équilibre stable $r = r_0$

4) $r > r_0$
$\Rightarrow$ Interaction attractive.

5) Puits de potentiel, trajectoire bornée

Exercice 16

Système : Atome de Carbone

BAME :

$\vec{P} = m\vec{g}$ associé à $E_{pp} = cte$ (car $z = cte$)

$\vec{N}$ ne travaille pas.

$\vec{T_1} = -k(l_1 - l_{o1})(\vec{u_x})$ associée à $\underbrace{\frac{1}{2}k(l_1 - l_{o1})^2}_{E_{pe1}}$

$\vec{T_2} = -k(l_2 - l_{o2})(-\vec{u_x})$ associée à $\underbrace{\frac{1}{2}k(l_2 - l_{o2})^2}_{E_{pe2}}$

Energie mécanique :

$$E_m = E_c + E_{pe_1} + E_{pe_2} + E_{pp}$$

$$E_m(x) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(l_1 - l_{o1})^2 + \frac{1}{2}k(l_2 - l_{o2})^2$$

en prenant $E_{pp} = cte = 0$

Or $\begin{cases} l_1 - l_{o1} = x \\ l_2 - l_{o2} = -x \end{cases}$

D'où :

$$E_m(x) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x)^2 + \frac{1}{2}k(-x)^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + kx^2$$

Conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m(0) = E_m(x_{max})$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + kx_{max}^2$$

$$\frac{1}{2}m\frac{v_0^2}{k} = x_{max}^2$$

$$\frac{mv_0^2}{2k} = x_{max}^2$$

$$\sqrt{\frac{mv_0^2}{2k}} = x_{max}$$