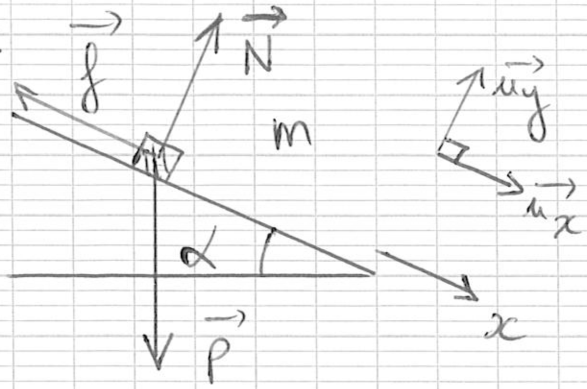
DM N°1

Exercice

1)

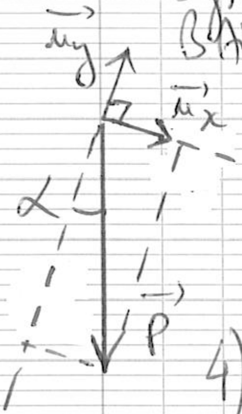


2) Le plan incliné impose un mouvement unidirectionnel.

3) Référentiel : Terrestre, supposé galiléen.

Système : Masse m

BAME :



$\vec{P} = m\vec{g} = mg(\sin\alpha\,\vec{u_x} - \cos\alpha\,\vec{u_y})$

$\vec{N} = N\vec{u_y}$

$\vec{f} = -h\vec{v} = -h\dot{x}\,\vec{u_x}$

4) (*)

5) PFD : $\sum\vec{F} = m\vec{a}$

$\Leftrightarrow mg\sin\alpha\,\vec{u_x} - mg\cos\alpha\,\vec{u_y} + N\vec{u_y} - h\dot{x}\,\vec{u_x} = m\ddot{x}\,\vec{u_x}$

Projection sur $\vec{u_x}$:

$mg\sin\alpha - h\dot{x} = m\ddot{x}$

$\Leftrightarrow m\ddot{x} + h\dot{x} = mg\sin\alpha$

$\Leftrightarrow m\frac{dv}{dt} + hv = mg\sin\alpha$

6) Vitesse limite : $\frac{dv}{dt} = 0$

d'où :

$hv_\ell = mg\sin\alpha \qquad v_\ell = \frac{mg\sin\alpha}{h}$

Cohérence :

* Si $\alpha = 0$ alors $\sin\alpha = 0$
d'où $v_\ell = 0$.

* Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ alors $\sin\alpha = 1$
d'où v_ℓ maximale.

Homogénéité :

$$[v_\ell] = \frac{kg.m.s^{-2}}{N.m^{-1}.s} \quad \text{car} \quad [k] = \frac{[f]}{[v]}$$

$$[k] = N.m^{-1}.s$$

$$[v_\ell] = \frac{\cancel{kg.m.s^{-2}}}{\cancel{kg.m.s^{-2}}.m^{-1}.s}$$
$$= m.s^{-1}$$

4)(*) PFS : $\sum \vec{F} = \vec{0}$

$$mg(\sin\alpha\,\vec{u_x} - \cos\alpha\,\vec{u_y}) + N\vec{u_y} - \cancel{k\dot{x}\vec{u_x}} = \vec{0}$$

$\dot{x} = 0$ (Equilibre).

Projection sur x :

$mg\sin\alpha = 0$ Impossible ! (sauf si $\alpha = 0$)

Pas d'équilibre !

Problème

1) Référentiel Terrestre supposé galiléen car durées très inférieures à la période de rotation de la Terre.

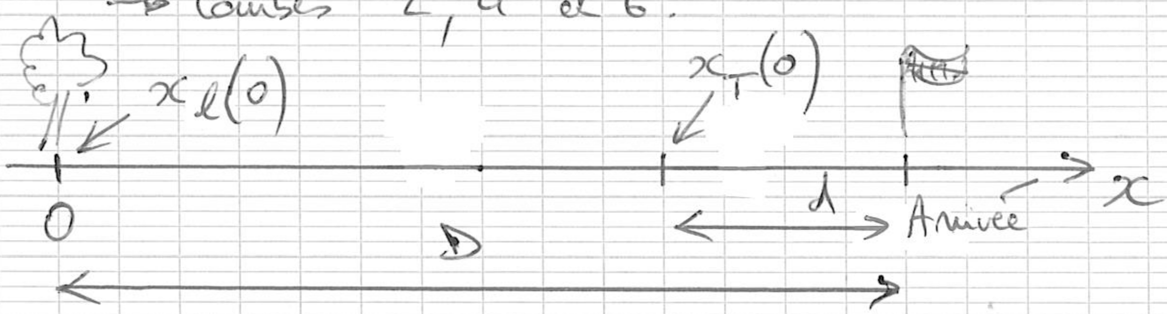
2) Tortue : MRU

→ Courbes 1, 3 et 5

Lièvre : MRUA au début

→ Courbes 2, 4 et 6.

3)



$$x_T(0) = D - d = 99{,}5 \text{ m}$$
$$\dot{x}_T(0) = v_1$$

4) Le mouvement de la Tortue est uniforme

$$\dot{x}_T(t) = \dot{x}_T(0) = v_1$$

On intègre par rapport au temps :

$$x_T(t) = v_1 t + cte_1$$

CI : $x_T(0) = cte_1 = D - d$.

D'où :

$$\underline{x_T(t) = v_1 t + D - d}$$

5) A $t = t_T$:

$$x_T(t_T) = v_1 t_T + \cancel{D} - d = \cancel{D}.$$

$\Leftrightarrow v_1 \cdot t_T = d$.

d'où : $\underline{t_T = \dfrac{d}{v_1}} = \dfrac{0{,}50}{\left(\dfrac{0{,}36}{3{,}6}\right)} = \underline{5 \text{ s}}$

⚠ $v_1 = 0{,}36 \text{ km.h}^{-1}$

$= \dfrac{0{,}36}{3{,}6} \text{ m.s}^{-1} = 0{,}1 \text{ m.s}^{-1}$

6)

7) $x_L(0) = 0$ (départ à $x=0$)

$\dot{x}_L(0) = v_L(0) = 0$ (départ "arrêté")

Accélération du lièvre :

Mouvement Rectiligne Uniformément Accéléré (MRUA)

$$a_L(t) = a_2$$

On intègre par rapport au temps :

$$v_L(t) = a_2 t + cte_2$$

CI : $v_L(0) = 0$ d'où $cte_2 = 0$

D'où : $\underline{v_L(t) = a_2 t}$

On intègre de nouveau par rapport au temps :

$$x_L(t) = \frac{1}{2} a_2 t^2 + cte_3$$

CI : $x_L(0) = 0 \Rightarrow cte_3 = 0$

D'où :

$$\underline{x_L(t) = \frac{1}{2} a_2 t^2}$$

8) A $t = t_1$, $v_L(t_1) = v_2$

d'où :

$$v_2 = a_2 t_1 \Rightarrow \underline{t_1 = \frac{v_2}{a_2}}$$

A.N. :

$$t_1 = \frac{\left(\frac{72}{3,6}\right)}{(5,0)} = \frac{20}{5} = \underline{4\ s}$$

D'où :

$$x_1 = x_L(t_1) = \frac{1}{2} a_2 t^2 = \frac{1}{2} \times 5{,}0 \times 4^2 = \underline{40\ m}$$

9) $t_L = t_1 + t_2$

$$= t_1 + \frac{D - x_1}{v_2}$$

$$t_L = 4 + \frac{100 - 40}{\left(\frac{72}{3{,}6}\right)} = 4 + \frac{60}{20} = \underline{7\ s}$$

10) $t_t = 5\ s$

$t_L = 7\ s$

la Tortue arrive avant le lièvre.

Le lièvre arrive avec $(t_L - t_t) = 2\ s$ de retard.

la fable est vérifiée !