CPGE ATS

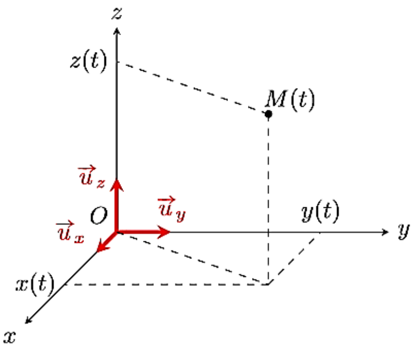
Programme de colles – Semaine 1 (16 au 21 septembre 2024)

Chapitre étudié et questions de cours : M1 Mouvements et forces. M2 Energie mécanique. Aucune résolution d'équation différentielle n'a été vue.

2 questions de cours par étudiant : 1 question de cours (parmi les questions 1 à 10), 1 « démo » (parmi les questions 11 à 16).

Réponses attendues en bleu.

1) Donner les expressions des vecteurs position, vitesse instantanée et accélération instantanée, ainsi que leurs unités.



Vecteur position (mètres, m) :

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{u}_x + y.\vec{u}_y + z.\vec{u}_z$$

Vecteur vitesse instantanée $\vec{v}_{M/R}$ d'un point M dans un référentiel R ($v_{M/R}$ en **mètres par seconde, m.s^{-1}**) :

$$\vec{v}_{M/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \dot{x}.\vec{u}_x + \dot{y}.\vec{u}_y + \dot{z}.\vec{u}_z$$

Vecteur accélération instantanée $\vec{a}_{M/R}$ d'un point M dans un référentiel R ($a_{M/R}$ en **mètres par seconde au carré, m.s^{-2}**) :

$$\vec{a}_{M/R} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_R = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_R = \ddot{x}.\vec{u}_x + \ddot{y}.\vec{u}_y + \ddot{z}.\vec{u}_z$$

2) Donner les expressions de la vitesse moyenne et de l'accélération moyenne + unités.

Dans le cas d'un **mouvement unidirectionnel d'axe *x***, la **vitesse moyenne (scalaire)** est définie de la façon suivante :

$v_{MOY} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (en mètres par seconde, m.s^{-1})

Dans le cas d'un **mouvement unidirectionnel d'axe *x*, l'accélération moyenne (scalaire)** est définie de la façon suivante :

$a_{MOY} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (en mètres par seconde au carré, m.s^{-2})

3) Donner l'expression de la quantité de mouvement et du Principe fondamental de la dynamique.

Quantité de mouvement d'un point matériel M de masse *m*, en mouvement dans un référentiel *R* :

$$\overrightarrow{p_{M\,/\,R}} = m.\overrightarrow{v_{M\,/\,R}}$$

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$\sum \vec{F}_{ext\ sur\ M} = \left(\frac{d\overrightarrow{p_{M\,/\,R}}}{dt}\right) = m.\overrightarrow{a_{M\,/\,R}}$$

4) Donner les expressions des forces suivantes : gravitation, poids, force de rappel élastique, force de frottement fluide, poussée d'Archimède.

Gravitation : $\vec{F}_{AsurB} = -\vec{F}_{BsurA} = -G\frac{m_A m_B}{r^2}\vec{u}_{A\to B}$

F_{AsurB} poids en newtons (N),

G = 6.67.10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2} constante de gravitation universelle

r = distance AB (m)

m_A et m_B masses en kilogrammes (kg)

$\vec{u}_{A\to B}$ vecteur unitaire

Poids : $\vec{P} = \vec{F}_{Terre\to m} = m.\vec{g}$

P poids en newtons (N)

m masse en kilogrammes (kg)

g accélération de la pesanteur (m.s^{-2})

Force de rappel élastique : $\vec{T} = -k.(l - l_0).\overrightarrow{u_x} = -k.x.\overrightarrow{u_x}$

T en newtons (N)

k = raideur du ressort (N.m^{-1})

x = allongement du ressort : $x = l - l_0$ (m)

$\overrightarrow{u_x}$: vecteur unitaire sortant du ressort

Force de frottement fluide : $\vec{f} = -h.\vec{v}$

f en newtons (N)

h coefficient de frottement fluide (kg.s^{-1})

v : vitesse du point matériel (m.s^{-1})

Poussée d'Archimède : Un système immergé dans un fluide subit de la part de ce fluide une force verticale vers le haut égale à l'opposé du poids du volume de fluide déplacé.

$\overrightarrow{\Pi_a} = -\rho_{fluide} V g \overrightarrow{u_z}$ (pour un axe z orienté vers le bas)

5) Donner les expressions de l'accélération, de la vitesse et de la position pour les mouvements suivants : MRU ET MRUA.

Mouvement rectiligne uniforme (MRU) : mouvement rectiligne à vitesse constante.

- **Accélération** $a(t) = \ddot{x}(t) = 0$
- **Vitesse** $v(t) = \dot{x}(t) = v_0$
- **Position** $x(t) = v_0 t + x_0$

Mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA) : mouvement rectiligne à accélération constante.

- **Accélération** $a(t) = \ddot{x}(0) = a_0$
- **Vitesse** $v(t) = \dot{x}(t) = a_0 . t + v_0$
- **Position** $x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$

6) Donner les expressions du travail et de la puissance d'une force + unités.

Travail élémentaire fourni par la force $\vec{F}$ au point matériel M au cours de son déplacement élémentaire $\overrightarrow{dM}$:

$$\boldsymbol{\delta W(\vec{F})_{/R} = \vec{F}.\overrightarrow{dM}}$$

Unité du travail : le joule (J)

Travail d'une force $\vec{F}$ le long d'une trajectoire donnée allant de A vers B :

$$\boldsymbol{W(\vec{F})_{A\to B} = \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{F(M)}.\overrightarrow{dM}}$$

Puissance fournie par la force $\vec{F}$ au point matériel M :

$$\boldsymbol{P(\vec{F})_{/R} = \frac{\delta W(\vec{F})_{/R}}{dt} = \vec{F}.\overrightarrow{v_{M/R}}}$$

Unité de la puissance : le watt (W)

7) Donner la définition de l'énergie cinétique et du théorème de l'énergie cinétique.

Energie cinétique d'un point matériel de masse *m*, en mouvement dans un référentiel *R* :

$$\boldsymbol{E_{c,M/R} = \frac{1}{2} m {v_{M/R}}^2}$$

Théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel de masse m se déplaçant le long d'une trajectoire $\widehat{AB}$:

$$\boldsymbol{\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum W(\overrightarrow{F_n})_{A\to B}}$$

Théorème de la puissance cinétique ;

$$\boldsymbol{\frac{dE_C}{dt}_{/R} = \sum P_{/R}(\overrightarrow{F_n})}$$

8) Donner la définition de l'énergie potentielle, ainsi que les expressions des énergies potentielles de pesanteur et élastique.

Une force est dite **conservative** si son travail le long d'une trajectoire $\widehat{AB}$ ne dépend que des points A et B, et pas du chemin suivi pour aller de A vers B.

Dans ce cas, la force $\vec{F}$ dérive d'une **énergie potentielle *E*** $\boldsymbol{E_P}$:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad(E_P)} = -(\frac{\partial E_P}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\overrightarrow{u_z})$$

Dans ce cas :

$$\boldsymbol{W(\vec{F})_{A\to B} = -\Delta E_P = E_P(A) - E_P(B)}$$

ou

$$\boldsymbol{\delta W(\vec{F}) = -dE_P}$$

Energie Potentielle de Pesanteur $\boldsymbol{E_{PP}}$ mesurée le long d'un axe vertical orienté vers le haut :

$$\boldsymbol{E_{PP} = mgz + cte}$$

Energie Potentielle de Pesanteur $\boldsymbol{E_{PP}}$ mesurée le long d'un axe **vertical orienté vers le bas :**

$$\boldsymbol{E_{PP} = - mgz + cte'}$$

Les constantes sont déterminées à partir des Conditions aux Limites (CL)

Energie Potentielle Elastique $\boldsymbol{E_{P\,él}}$ dont dérive la force de rappel élastique $\overrightarrow{F_{él}}$ exercée par un ressort de raideur k :

$$\boldsymbol{E_{P\,él} = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 \Rightarrow \overrightarrow{F_{él}} = -k.x.\overrightarrow{u_x}} \text{ si allongement } x = l - l_0 \text{ suivant } \overrightarrow{u_x}$$

9) Donner la définition de l'énergie mécanique et du théorème de l'énergie mécanique.

Energie mécanique d'un point matériel :

$$\boldsymbol{E_m = E_C + E_P}$$

Théorème de l'Energie Mécanique pour un point matériel de masse m :

$$\boldsymbol{\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}(E_C + E_P) = P(\vec{F}_{non\ conservative})}$$

10) Définitions des positions d'équilibre stable et instable à partir de l'énergie potentielle.

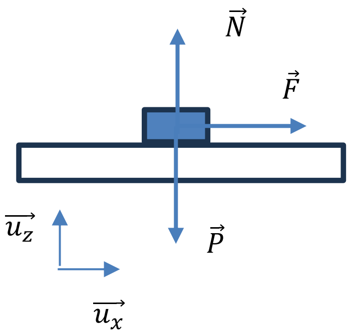
Une position d'équilibre est **stable** si la force y ramène le point matériel lorsqu'il est faiblement éloigné. Dans ce cas, **l'énergie potentielle** est **minimale**. On a :

$$\boldsymbol{\frac{dE_P}{dx}(x_{éq}) = 0} \qquad \boldsymbol{\frac{d^2E_P}{dx^2}(x_{éq}) > 0}$$

Une position d'équilibre est **instable** si la force en éloigne le point matériel lorsqu'il est faiblement éloigné. Dans ce cas, **l'énergie potentielle** est **maximale**. On a :

$$\boldsymbol{\frac{dE_P}{dx}(x_{éq}) = 0} \qquad \boldsymbol{\frac{d^2E_P}{dx^2}(x_{éq}) < 0}$$

11) Exemple du palet de hockey glissant sans frottement sur la glace, et soumis à une force de poussée constante : faire un schéma, réaliser le BAME, appliquer le PFD, établir l'équation du mouvement.



Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Système : galet, modélisé par un point matériel *M* de masse *m*

BAME (Bilan des Actions Mécaniques Extérieures) :

Poids du galet : $\vec{P} = -mg\overrightarrow{u_z}$

Réaction du sol (normale) : $\vec{N} = N\overrightarrow{u_z}$

Force de poussée constante : $\vec{F} = F\overrightarrow{u_x}$

Remarque : le mouvement est **unidirectionnel**, c'est-à-dire suivant le seul axe *x* ici.

PFD (Principe fondamentale de la dynamique) :

$\sum \vec{F}_{ext} = m.\overrightarrow{a_{M/R}}$ c'est-à-dire $\vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = m.\vec{a}$ c'est-à-dire $-mg\overrightarrow{u_z} + N\overrightarrow{u_z} + F\overrightarrow{u_x} = m.(\ddot{x}.\overrightarrow{u_x} + \ddot{z}.\overrightarrow{u_z})$

Projection sur *x* :

$F = m.\ddot{x}$ d'où : $\ddot{x} = \frac{F}{m}$

Sur *x* : $\ddot{x}(t) = \frac{F}{m} = cte0 = \ddot{x}(0) = a_0$

$$\Longrightarrow \ en\ intégrant\ par\ rapport\ au\ temps : \dot{x}(t) = \int \ddot{x}(t).dt = \int a_0.dt = a_0.t + cte1$$

Prise en compte des **conditions initiales (CI)** : $\dot{x}(0) = v_0$

$\Longrightarrow \dot{x}(0) = a_0.0 + \ cte1 = \ v_0$

$\Longrightarrow \dot{x}(t) = a_0.t + \ v_0$

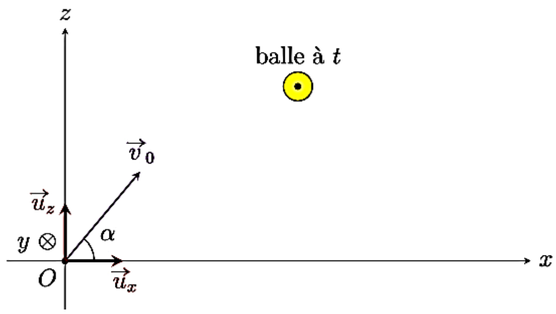
$\Longrightarrow \ en\ intégrant\ par\ rapport\ au\ temps$

$$x(t) = \int \dot{x}(t).dt = \int (a_0.t + \ v_0).dt = \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + cte2$$

Prise en compte des **conditions initiales (CI)** : $x(0) = x_0 = \frac{1}{2}.a_0.0^2 + v_0.0 + cte2 = cte2$

$\Longrightarrow \boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + x_0}$

12) Exemple de la chute libre sans frottement d'une balle : établir les équations horaires de l'accélération, de la vitesse et la position.



Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Système : Balle de masse *m*

Repère : $O, \overrightarrow{\boldsymbol{u_x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u_y}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u_z}}$

BAME : Poids de la balle $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$

Frottements négligés

Equations horaires : accélération, vitesse

$$\sum \vec{F}_{ext\ sur\ M} = \left(\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt}\right)_R = m.\vec{a}_{M/R}$$

$\vec{P} = m\vec{g} = m.\vec{a}_{M/R}$ d'où : $m\vec{g} = m.\vec{a}_{M/R}$ d'où : $\vec{g} = -g\overrightarrow{u_z} = \vec{a}_{M/R}$

$\vec{a}_{M/R} = \overrightarrow{constante}$: le mouvement est uniformément accéléré

$\vec{a}_{M/R} = -g\overrightarrow{u_z} = \ddot{x}.\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}.\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}.\overrightarrow{u_z}$

Projection sur les 3 axes :

$\ddot{x} = 0$

$\ddot{y} = 0$

$\ddot{z} = -g$

Par intégration :

$\dot{x} = C_x$

$\dot{y} = C_y$

$\dot{z} = -gt + C_z$

Prise en compte des conditions initiales (CI) :

$\dot{x}(0) = v_{0x} = v_0.cos\alpha = C_x$

$\dot{y}(0) = 0 = C_y$

$\dot{z}(0) = v_{0z} = v_0.sin\alpha = -g * 0 + C_z = C_z$

Expression de la vitesse $\vec{v}_{M/R}$ à tout instant *t* :

$\boldsymbol{\dot{x}(t) = v_0.cos\alpha}$

$\boldsymbol{\dot{y}(t) = 0}$

$\dot{z}(0) = -gt + v_0.sin\alpha$

Equations horaires : position

Par intégration :

$x(t) = v_0.cos\alpha.t + C_x'$

$y(t) = C_y'$

$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0.sin\alpha.t + C_z'$

Prise en compte des conditions initiales (CI) :

$x(0) = 0 = C_x'$

$y(0) = 0 = C_y'$

$z(0) = 0 = C_z'$

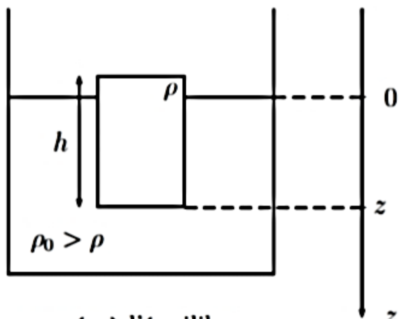
Expression de la position $\overrightarrow{OM}(t)$ à tout instant t :

$x(t) = v_0.cos\alpha.t$

$y(t) = 0$

$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0.sin\alpha.t$

13) Un cylindre de section $s = 1$ cm^2, de hauteur $h = 10$ cm et de densité 0,6 (masse volumique ρ) est placé dans l'eau (masse volumique ρ_0). Un système annexe, non représenté sur la figure, maintient son axe de révolution vertical.



1. Déterminer z_0 la hauteur immergée à l'équilibre.
2. Quelle est la force à exercer sur le cylindre pour l'immerger en entier ?

1. Référentiel ; Terrestre, supposé galiléen
   Système : cylindre
   BAME :
   Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = \rho V g\overrightarrow{u_z} = \rho shg\overrightarrow{u_z}$

Poussée d'Archimède : $\overrightarrow{\Pi_a} = -\rho_{fluide} V g\overrightarrow{u_z} == -\rho_0 szg\overrightarrow{u_z}$

PFD : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\overrightarrow{a_{M/R}} = \vec{0}$ car équilibre c'est-à-dire $\vec{P} + \overrightarrow{\Pi_a} = \vec{0}$

C'est-à-dire : $\rho shg\overrightarrow{u_z} - \rho_0 sz_0 g\overrightarrow{u_z} = \vec{0}$

Projection sur z : $\rho shg - \rho_0 sz_0 g = 0$

On en déduit : $\boldsymbol{z_0 = \frac{\rho}{\rho_0} h}$

Vérification.

2. On souhaite : $z = h$
   BAME :

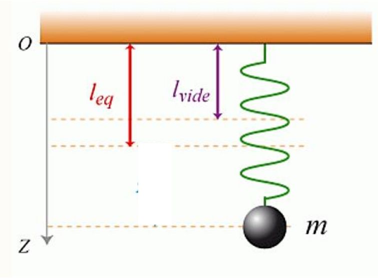
   Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = \rho V g\overrightarrow{u_z} = \rho shg\overrightarrow{u_z}$
   Poussée d'Archimède : $\overrightarrow{\Pi_a} = -\rho_{fluide} V g\overrightarrow{u_z} == -\rho_0 shg\overrightarrow{u_z}$
   Force $\vec{F} = F\overrightarrow{u_z}$

PFD : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\overrightarrow{a_{M/R}} = \vec{0}$ car équilibre c'est-à-dire $\vec{P} + \overrightarrow{\Pi_a} + \vec{F} = \vec{0}$

Projection sur z : $\rho shg - \rho_0 shg + F = 0$

On en déduit : $\boldsymbol{F = (\rho_0 - \rho) shg}$

14) Pour le système « masse-ressort » ci-dessous, déterminer l'expression de la position d'équilibre $\boldsymbol{z_{éq}}$. Vérifier la cohérence de votre résultat.



Référentiel : Terrestre, supposé galiléen

Système : masse m

BAME :

Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\overrightarrow{u_z}$

Tension du ressort : $\vec{T} = -k(l - l_0)\overrightarrow{u_{sortant}} = -k(z - l_0)\overrightarrow{u_z}$

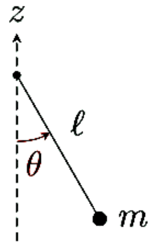
PFD : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\overrightarrow{a_{M/R}} = \vec{0}$ car équilibre c'est-à-dire $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

Projection sur z : $mg - k(z_{éq} - l_0) = 0$

On obtient : $\boldsymbol{z_{éq} = l_0 + \frac{mg}{k}}$

Vérifications : $z_{éq} \geq l_0$; si m augmente, alors $z_{éq}$ augmente ; si k augmente, alors $z_{éq}$ diminue.

15) Pendule simple ci-contre : A partir du théorème de l'énergie mécanique, établir l'équation différentielle du mouvement.



Référentiel : *R* terrestre supposé galiléen

Système : Point *M* de masse *m*

Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) et énergies potentielles associées :

- Poids $\vec{P}$; énergie potentielle associée : $E_{PP} = mgz + cte = -mglcos\theta + cte$
- Tension du fil : $\vec{T}$; cette force ne travaille pas, donc associée à une énergie potentielle nulle

Energie cinétique de la masse *m*, en mouvement circulaire de rayon l :

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$$

Théorème de l'Energie Mécanique :

$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}(E_C + E_P) = P(\vec{F}_{non\,conservative}) = 0$ ici car absence de frottement

Equation différentielle : **(Attention : on dérive par rapport au temps)**

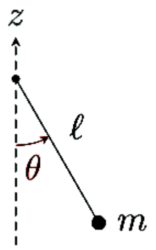
$ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mgl\dot{\theta}sin\theta = 0$

$ml\dot{\theta}(l\ddot{\theta} + gsin\theta) = 0$

$\dot{\theta} = 0$ sans intérêt physique, d'où :

$\boldsymbol{l\ddot{\theta} + gsin\theta = 0}$ **: Equation différentielle du mouvement**

16) Pendule simple ci-contre : A partir de l'énergie potentielle, déterminer la position d'équilibre stable, la position d'équilibre instable.



Référentiel : *R* terrestre supposé galiléen

Système : Point *M* de masse *m*

Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) et énergies potentielles associées :

- Poids $\vec{P}$; énergie potentielle associée : $E_{PP} = mgz + cte = -mglcos\theta + cte$
- Tension du fil : $\vec{T}$; cette force ne travaille pas, donc associée à une énergie potentielle nulle

On dérive l'énergie potentielle (par rapport à θ, qui est la variable de l'espace) :

$$\frac{dE_P}{d\theta} = mglsin\theta$$

$\frac{dE_P}{d\theta} = \mathbf{0}\ pour\ sin\theta = 0, c'est\ à\ dire\ pour\ \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}\ ou\ \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\pi}$ **:** 2 positions d'équilibre

$\frac{d^2E_P}{d\theta^2} = +mglcos\theta$

$\frac{d^2E_P}{d\theta^2}(\mathbf{0}) = +mglcos(\mathbf{0}) > 0$ Position d'équilibre stable

$\frac{d^2E_P}{d\theta^2}(\boldsymbol{\pi}) = +mglcos(\boldsymbol{\pi}) < 0$ Position d'équilibre instable

Puis : de 1 à 2 exercices proposés par le colleur.

Programme ATS

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Observation d'un mouvement	
Point matériel	Citer des exemples de systèmes pouvant se ramener à l'étude de leur centre de masse.
Principe d'inertie	Citer quelques exemples d'expériences où les référentiels d'étude peuvent être considérés comme galiléens.
12. Lois de Newton	
Principe des actions réciproques	Énoncer le principe des actions réciproques et l'appliquer dans le cas de la réaction d'un support en l'absence de frottement solide.
Principe fondamental de la dynamique pour un point matériel de masse constante	Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans le cas d'un mouvement rectiligne. Établir que le théorème de l'énergie mécanique découle du principe fondamental de la dynamique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Observation d'un mouvement	
Énergie cinétique	Définir la vitesse et l'énergie cinétique d'un point matériel.
2. Interactions conservatives	
Énergie potentielle fonction d'une seule variable spatiale	Citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur associée à un champ uniforme et de l'énergie potentielle élastique associée à un ressort.
Équilibre en référentiel galiléen	Identifier sur le graphe de l'énergie potentielle les éventuelles positions d'équilibre stable et instable. Exploiter d'autres situations où l'expression de l'énergie potentielle est fournie.

3. Énergie mécanique	
Énergie mécanique	Distinguer une énergie cinétique d'une énergie potentielle.
Conservation de l'énergie	Identifier les cas de conservation de l'énergie mécanique. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle ou d'une expression d'une énergie mécanique une vitesse ou une position en des points particuliers. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement borné ou non de la trajectoire.
Non conservation de l'énergie mécanique Modèle d'ordre 1	Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Énoncer le théorème liant l'énergie mécanique à la puissance des forces non conservatives.

Notions et contenus	Capacités exigibles
12. Lois de Newton	
Travail d'une force	Définir le travail et la puissance d'une force. Calculer le travail d'une interaction conservative. Calculer la force associée à une interaction conservative. Calculer la puissance d'une force dissipative.
Principe fondamental de la dynamique pour un point matériel de masse constante	Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans le cas d'un mouvement rectiligne. Établir que le théorème de l'énergie mécanique découle du principe fondamental de la dynamique.