CPGE ATS

Programme de colles – Semaine 2 (23 au 28 septembre 2024)

Chapitre étudié et questions de cours :

- **M2 Energie mécanique. Aucune résolution d'équation différentielle n'a été vue.**
- **T1 Formes d'énergie.**

2 questions de cours par étudiant : 1 question de cours (parmi les questions 1 à 9), 1 « démo » (parmi les questions 10 à 14).

Réponses attendues en bleu.

1) Donner les expressions des forces suivantes : poids, force de rappel élastique, force de frottement fluide, poussée d'Archimède.

Poids : $\vec{P} = \vec{F}_{Terre \to m} = m.\vec{g}$

P poids en newtons (N)

m masse en kilogrammes (kg)

g accélération de la pesanteur (m.s^{-2})

Force de rappel élastique : $\vec{T} = -k.(l - l_0).\vec{u_x} = -k.x.\vec{u_x}$

T en newtons (N)

k = raideur du ressort (N.m^{-1})

x = allongement du ressort : $x = l - l_0$ (m)

$\vec{u_x}$: vecteur unitaire sortant du ressort

Force de frottement fluide : $\vec{f} = -h.\vec{v}$

f en newtons (N)

h coefficient de frottement fluide (kg.s^{-1})

v : vitesse du point matériel (m.s^{-1})

Poussée d'Archimède : Un système immergé dans un fluide subit de la part de ce fluide une force verticale vers le haut égale à l'opposé du poids du volume de fluide déplacé.

$$\vec{\Pi_a} = -\rho_{fluide} V g \vec{u_z} \text{ (pour un axe } z \text{ orienté vers le bas)}$$

2) Donner les expressions du travail d'une force + unités.

Travail élémentaire fourni par la force $\vec{F}$ au point matériel M au cours de son déplacement élémentaire $\overrightarrow{dM}$:

$\boldsymbol{\delta W(\vec{F})_{/R} = \vec{F}.\overrightarrow{dM}}$

Unité du travail : le joule (J)

Travail d'une force $\vec{F}$ le long d'une trajectoire donnée allant de A vers B :

$\boldsymbol{W(\vec{F})_{A\to B} = \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{F(M)}.\overrightarrow{dM}}$

3) Donner la définition de l'énergie cinétique et du théorème de l'énergie cinétique.

Energie cinétique d'un point matériel de masse *m*, en mouvement dans un référentiel *R* :

$$\boldsymbol{E_{c,M/R} = \frac{1}{2} m v_{M/R}{}^2}$$

Théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel de masse m se déplaçant le long d'une trajectoire $\widehat{AB}$:

$$\boldsymbol{\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum W(\overrightarrow{F_n})_{A\to B}}$$

4) Donner la définition de l'énergie potentielle, ainsi que les expressions des énergies potentielles de pesanteur et élastique.

Une force est dite **conservative** si son travail le long d'une trajectoire $\widehat{AB}$ ne dépend que des points A et B, et pas du chemin suivi pour aller de A vers B.

Dans ce cas, la force $\vec{F}$ dérive d'une **énergie potentielle E_P** :

$$\boldsymbol{W(\overrightarrow{F})_{A\to B} = -\Delta E_P = E_P(A) - E_P(B)}$$

Ou, sous forme infinitésimale :

$$\boldsymbol{\delta W(\vec{F}) = -dE_P}$$

Energie Potentielle de Pesanteur E_{PP} mesurée le long d'un axe vertical orienté vers le haut :

$$\boldsymbol{E_{PP} = mgz + cte}$$

Energie Potentielle de Pesanteur E_{PP} mesurée le long d'un axe vertical orienté vers le bas :

$$\boldsymbol{E_{PP} = - mgz + cte'}$$

Les constantes sont déterminées à partir des Conditions aux Limites (CL)

Energie Potentielle Elastique $E_{P\,él}$ dont dérive la force de rappel élastique $\overrightarrow{F_{él}}$ exercée par un ressort de raideur *k* :

$$\boldsymbol{E_{P\,él} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 \Rightarrow \overrightarrow{F_{él}} = -k.x.\overrightarrow{u_x}} \text{ si allongement } x = l - l_0 \text{ suivant } \overrightarrow{u_x}$$

5) Donner la définition de l'énergie mécanique et du théorème de l'énergie mécanique.

Energie mécanique d'un point matériel :

$$E_m = E_C + E_P$$

Théorème de l'Energie Mécanique pour un point matériel de masse m :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}(E_C + E_P) = P(\vec{F}_{non\ conservative})$$

6) Définitions des positions d'équilibre stable et instable à partir de l'énergie potentielle.

Une position d'équilibre est **stable** si la force y ramène le point matériel lorsqu'il est faiblement éloigné. Dans ce cas, **l'énergie potentielle** est **minimale**. On a :

$$\frac{dE_P}{dx}(x_{éq}) = 0 \qquad \frac{d^2E_P}{dx^2}(x_{éq}) > 0$$

Une position d'équilibre est **instable** si la force en éloigne le point matériel lorsqu'il est faiblement éloigné. Dans ce cas, **l'énergie potentielle** est **maximale**. On a :

$$\frac{dE_P}{dx}(x_{éq}) = 0 \qquad \frac{d^2E_P}{dx^2}(x_{éq}) < 0$$

7) Définir un système ouvert, un système fermé, un système isolé ; définir une grandeur extensive, une grandeur intensive.

Un **système ouvert** échange de la matière et de l'énergie avec le milieu extérieur.

Un **système fermé** n'échange pas de matière mais échange de l'énergie avec le milieu extérieur.

Un **système isolé** n'échange ni matière ni énergie avec le milieu extérieur.

Grandeur extensive : grandeur proportionnelle à la quantité de matière. Ex : Volume *V*, masse *m*.

Grandeur intensive : grandeur indépendante de la quantité de matière. Ex : Pression *P*, Température *T*, masse volumique ρ.

8) Equation d'état des gaz parfaits sous différentes formes ; unités.

Equation d'état des gaz parfaits : ***PV = nRT***

P pression en Pa ; *V* volume en m^3 ; *n* quantité de matière en mol ; *T* température en K

R est appelée **constante de gaz parfaits**, *R* = 8,31 J.mol^{-1}.K^{-1}

L'écriture précédente est appelée formulation **extensive**.

Autres écritures possibles, sous forme **intensive**, à savoir retrouver :

- En faisant apparaître le volume molaire $V_m = \frac{V}{n}$: ***PV$_m$ = RT***
- En faisant apparaître le volume massique $v = \frac{V}{m}$ et la masse molaire $M = \frac{m}{n}$: $\boldsymbol{Pv = \frac{RT}{M}}$

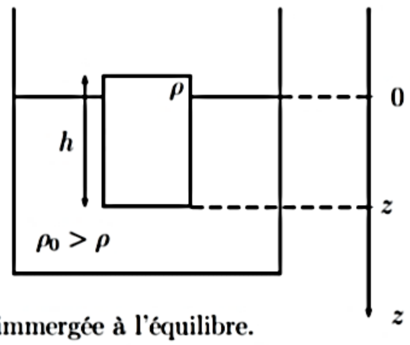
9) Définition de l'énergie interne *U* d'un système et de la capacité thermique à volume constant C_V du système. Energie interne et capacité thermique à volume constant d'un gaz parfait.

$U = E_{C\ micro} + E_{P,int}$ et $C_V = \frac{dU}{dT}$ à $volume\ constant$

Gaz parfait monoatomique : $U = \frac{3}{2}nRT\ et\ C_V = \frac{3}{2}nR$

Gaz parfait polyatomique : $U = \frac{5}{2}nRT\ et\ C_V = \frac{5}{2}nR$

10) **Un cylindre de section $s = 1$ cm², de hauteur $h = 10$ cm et de densité 0,6 (masse volumique ρ) est placé dans l'eau (masse volumique ρ_0). Un système annexe, non représenté sur la figure, maintient son axe de révolution vertical.**



1. Déterminer z_0 la hauteur immergée à l'équilibre.

2. Quelle est la force à exercer sur le cylindre pour l'immerger en entier ?

1. Référentiel ; Terrestre, supposé galiléen
   Système : cylindre
   BAME :

   Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = \rho V g\overrightarrow{u_z} = \rho shg\overrightarrow{u_z}$

   Poussée d'Archimède : $\overrightarrow{\Pi_a} = -\rho_{fluide}Vg\overrightarrow{u_z} == -\rho_0 szg\overrightarrow{u_z}$

   PFD : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\overrightarrow{a_{M/R}} = \vec{0}$ car équilibre c'est-à-dire $\vec{P} + \overrightarrow{\Pi_a} = \vec{0}$

   C'est-à-dire : $\rho shg\overrightarrow{u_z} - \rho_0 sz_0 g\overrightarrow{u_z} = \vec{0}$

   Projection sur *z* : $\rho shg - \rho_0 sz_0 g = 0$

   On en déduit : $\boldsymbol{z_0 = \frac{\rho}{\rho_0}h}$

   Vérification.

2. On souhaite : *z* = *h*
   BAME :

   Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = \rho V g\overrightarrow{u_z} = \rho shg\overrightarrow{u_z}$

   Poussée d'Archimède : $\overrightarrow{\Pi_a} = -\rho_{fluide}Vg\overrightarrow{u_z} == -\rho_0 shg\overrightarrow{u_z}$

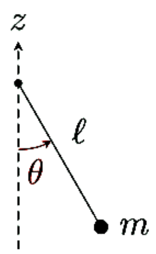
   Force $\vec{F} = F\overrightarrow{u_z}$

   PFD : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\overrightarrow{a_{M/R}} = \vec{0}$ car équilibre c'est-à-dire $\vec{P} + \overrightarrow{\Pi_a} + \vec{F} = \vec{0}$

   Projection sur *z* : $\rho shg - \rho_0 shg + F = 0$

   On en déduit : $\boldsymbol{F = (\rho_0 - \rho)shg}$

11) Pendule simple ci-contre : A partir du théorème de l'énérgie mécanique, établir l'équation différentielle du mouvement.



Référentiel : *R* terrestre supposé galiléen

Système : Point *M* de masse *m*

Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) et énergies potentielles associées :

- Poids $\vec{P}$; énergie potentielle associée : $E_{PP} = mgz + cte = -mglcos\theta + cte$
- Tension du fil : $\vec{T}$; cette force ne travaille pas, donc associée à une énergie potentielle nulle

Energie cinétique de la masse *m*, en mouvement circulaire de rayon l :

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$$

Théorème de l'Energie Mécanique :

$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}(E_C + E_P) = P(\vec{F}_{non\ conservative}) = 0$ ici car absence de frottement

Equation différentielle : **(Attention : on dérive par rapport au temps)**

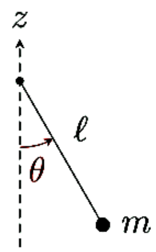
$ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mgl\dot{\theta}sin\theta = 0$

$ml\dot{\theta}(l\ddot{\theta} + gsin\theta) = 0$

$\dot{\theta} = 0$ sans intérêt physique, d'où :

$\boldsymbol{l\ddot{\theta} + gsin\theta = 0}$ **: Equation différentielle du mouvement**

12) Pendule simple ci-contre : A partir de l'énergie potentielle, déterminer la position d'équilibre stable, la position d'équilibre instable.



Référentiel : *R* terrestre supposé galiléen

Système : Point *M* de masse *m*

Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) et énergies potentielles associées :

- Poids $\vec{P}$; énergie potentielle associée : $E_{PP} = mgz + cte = -mglcos\theta + cte$
- Tension du fil : $\vec{T}$; cette force ne travaille pas, donc associée à une énergie potentielle nulle

On dérive l'énergie potentielle (par rapport à θ, qui est la variable de l'espace) :

$\frac{dE_P}{d\theta} = mglsin\theta$

$\frac{dE_P}{d\theta} = \mathbf{0}\ pour\ sin\theta = 0, c'est\ à\ dire\ pour\ \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}\ ou\ \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\pi}$: 2 positions d'équilibre

$\frac{d^2E_P}{d\theta^2} = +mglcos\theta$

$\frac{d^2E_P}{d\theta^2}(\mathbf{0}) = +mglcos(\mathbf{0}) > 0$ Position d'équilibre stable

$\frac{d^2E_P}{d\theta^2}(\boldsymbol{\pi}) = +mglcos(\boldsymbol{\pi}) < 0$ Position d'équilibre instable

13) On considère un pneumatique de voiture monté sur sa jante. On admettra que le pneu se comporte comme une enveloppe déformable, parfaitement étanche, qui délimite un volume qui reste toujours constant, et que le gaz qu'il contient se comporte comme un gaz parfait.

La pression dans ce pneumatique, mesurée à $T_A = 20°C$, est $p_A = 3{,}0$ bar, $V_A = 35$ L.

a) Déterminer le nombre de moles de gaz contenues dans le pneu. On donne : $R = 8{,}31$ J.mol^{-1}.K^{-1}.

b) Quelle sera la pression dans le pneu pour une température du gaz à l'intérieur du pneu de $T_B = 40°C$?

a) Equation d'état des gaz parfaits : $\boldsymbol{P_A V_A = nRT_A}$

D'où : $\boldsymbol{n} = \frac{P_A V_A}{RT_A} = \frac{3.10^5.35.10^{-3}}{8{,}31.(273+20)} = \boldsymbol{4{,}4\ mol}$

b) $\boldsymbol{P_A V_A = nRT_A}$ **(1)**
$\boldsymbol{P_B V_B = nRT_B}$ **(2)**
$\frac{(2)}{(1)}$ **:** $\frac{P_B V_B}{P_A V_A} = \frac{nRT_B}{nRT_A}$ **d'où :** $\boldsymbol{P_B = \frac{T_B}{T_A}.\frac{V_A}{V_B}P_A = \frac{(273+40)}{(273+20)}.\frac{35}{35}.3.0 = 3.2\ bar}$

14) L'argon Ar est un gaz monoatomique d'énergie interne : $U(T) = \frac{3}{2}\,nRT$ et le dioxygène O_2 un gaz diatomique, d'énergie interne : $U(T) = \frac{5}{2}\,nRT$ (hypothèse gaz parfaits). Pour chaque gaz, donner les expressions de :

a) la capacité thermique à volume constant C_v.
b) la capacité thermique molaire à volume constant C_{vm}.
c) la capacité thermique massique à volume constant c_v.
d) La valeur de la variation d'énergie interne pour une augmentation de température de 10°C d'un kg de gaz.

Application numérique : $M(Ar) = 40\ g.mol^{-1}$; $R = 8{,}31\ J.K^{-1}.mol^{-1}$; $M(O) = 16\ g.mol^{-1}$.

a) $C_v = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2}\,nR$ pour Ar ; $C_v = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{dU}{dT} = \frac{5}{2}\,nR$ pour O_2.
b) $C_{vm} = \frac{C_v}{n} = \frac{3}{2}\,R$ pour Ar ; $C_{vm} = \frac{C_v}{n} = \frac{5}{2}\,R$ pour O_2.
c) $c_v = \frac{C_v}{m} = \frac{3}{2}\,\frac{R}{M}$ pour Ar ; $c_v = \frac{C_v}{m} = \frac{5}{2}\,\frac{R}{M}$ pour O_2.
d) $Pour\ 1\ kg\ :\ \Delta u = c_v.\Delta T = \frac{3}{2}\,\frac{R}{M}\ pour\ Ar; on\ obtient\ 3{,}1\ kJ.mol^{-1}$
$Pour\ 1\ kg\ :\ \Delta u = c_v.\Delta T = \frac{5}{2}\,\frac{R}{M}\ pour\ O_2; on\ obtient\ 6{,}5\ kJ.mol^{-1}$

Puis : de 1 à 2 exercices proposés par le colleur.

Programme ATS

M2

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Observation d'un mouvement	
Énergie cinétique	Définir la vitesse et l'énergie cinétique d'un point matériel.
2. Interactions conservatives	
Énergie potentielle fonction d'une seule variable spatiale	Citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur associée à un champ uniforme et de l'énergie potentielle élastique associée à un ressort.
Équilibre en référentiel galiléen	Identifier sur le graphe de l'énergie potentielle les éventuelles positions d'équilibre stable et instable. Exploiter d'autres situations où l'expression de l'énergie potentielle est fournie.

3. Énergie mécanique	
Énergie mécanique	Distinguer une énergie cinétique d'une énergie potentielle.
Conservation de l'énergie	Identifier les cas de conservation de l'énergie mécanique. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle ou d'une expression d'une énergie mécanique une vitesse ou une position en des points particuliers. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement borné ou non de la trajectoire.
Non conservation de l'énergie mécanique Modèle d'ordre 1	Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Énoncer le théorème liant l'énergie mécanique à la puissance des forces non conservatives.

Notions et contenus	Capacités exigibles
12. Lois de Newton	
Travail d'une force	Définir le travail et la puissance d'une force. Calculer le travail d'une interaction conservative. Calculer la force associée à une interaction conservative. Calculer la puissance d'une force dissipative.
Principe fondamental de la dynamique pour un point matériel de masse constante	Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans le cas d'un mouvement rectiligne. Établir que le théorème de l'énergie mécanique découle du principe fondamental de la dynamique.

T1

Notions et contenus	Capacités exigibles
5. Formes d'énergie	
L'énergie fonction d'état Stockage de l'énergie	Citer différentes formes d'énergies et les paramètres les caractérisant ; énergie cinétique (vitesse), énergie potentielle (position), énergie électrostatique (tension), énergie magnétique (intensité)…
Énergie interne U d'un système Capacité thermique à volume constant dans le cas d'un gaz parfait Capacité thermique à volume constant d'une phase condensée considérée indilatable et	Associer la modification de la température, le changement de phase d'un système, à la variation d'énergie interne. Utiliser le fait que l'énergie interne ne dépend que de la température pour un gaz parfait. Utiliser le fait que l'énergie interne ne dépend que de la température pour une phase condensée incompressible et indilatable.

6. Transferts d'énergie	
État d'équilibre d'un système	Proposer un jeu de paramètres d'état permettant de caractériser un état d'équilibre. Différencier un système ouvert d'un système fermé. Distinguer les grandeurs extensives et les grandeurs intensives.