Air dans un ballon de football

* Pompe : admission de l'air à $P_1 = 1$ bar.

$P_1 V_{pompe} = n_{pompe} RT$. On détermine n_{pompe}

Hypothèse : $T = 293$ K.

$$n_{pompe} = \frac{P_1 V_{pompe}}{RT} = \frac{10^5 \times 105.10^{-6}}{8,31 \times 293}$$

$$= 4,31.10^{-3} \text{ mol}.$$

(En prenant $P_1 = 1$ atm $\simeq 1$ bar).

* Ballon : gonflage à $2,1$ atm $\simeq 2,1$ bar. $P_2 = 2,1$ bar

$P_2 V_{ballon} = n_{ballon} RT$

Hypothèse : $T = 293$ K

$$n_{ballon} = \frac{P_2 V_{ballon}}{RT} = \frac{2,1.10^5 \times \frac{4}{3}\pi\left(\frac{0,22}{2}\right)^3}{8,31 \times 293}$$

$$\left(V_{ballon} = \frac{4}{3}\pi R^3\right) = 0,481 \text{ mol}.$$

* Combien de coups de pompe ?

$$N = \frac{n_{ballon}}{n_{pompe}} = 111 \text{ coups}$$

Remarque : Même calcul pour $P_2 = 1,6$ bar

Même calcul :

$N = 85$ coups

Etude des oscillations d'un pendule (ATS 2020)

1. On donne : $v = \ell\dot{\theta}$ (mouvement circulaire)

d'où :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 = \underline{\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2}$$

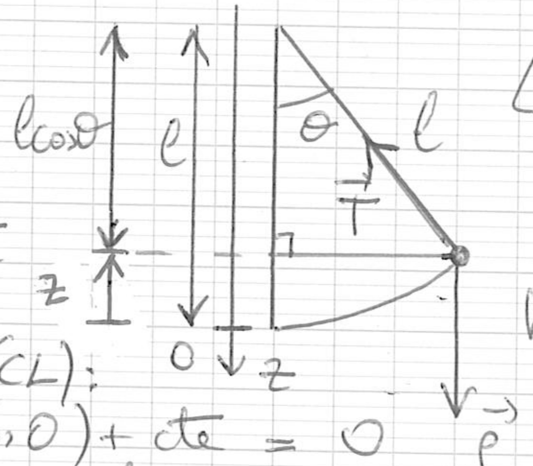
2. $E_p = -mgz + cte$ car z orienté vers le bas.

$z = \ell\cos\theta - \ell$

d'où :

$E_p = -mgz + cte$

$= mg\ell(1-\cos\theta) + cte$



⚠ z négatif sur le tracé

Condition aux limites (CL) :

$E_p(0) = mg\ell(1-\cos 0) + cte = 0$

d'où : $cte = 0$

$$\underline{E_p(\theta) = mg\ell(1-\cos\theta)}$$

<u>Remarque</u> : Seule $E_p = E_{pp} = -mgz + cte$ est prise en compte car :

BAME :

$\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u_z}$ associé à $E_{pp} = -mgz + cte$

$\vec{T}$ ne travaille pas, associée à une $E_p = 0$

3. On dérive E_p par rapport à θ :

$$\frac{dE_p}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(mg\ell(1-\cos\theta)\right)$$

$$= \frac{d}{d\theta}\left(mg\ell - mg\ell\cos\theta\right)$$

$$= mg\ell\sin\theta$$

$$\frac{dE_p}{d\theta} = 0 \iff mgl\sin\theta = 0$$

obtenu pour :

$$\theta = 0\ [\pi]$$

ou $\begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \pi \end{cases}$ 2 positions d'équilibre.

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}(mgl\sin\theta) = mgl\cos\theta$$

$\theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2E_p}{d\theta^2} = mgl\cos(0) = mgl > 0$

Position d'équilibre stable

$\theta = \pi \Rightarrow \frac{d^2E_p}{d\theta^2} = mgl\cos(\pi) = -mgl < 0$

Position d'équilibre instable

4. Théorème de la Puissance Mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}(E_p + E_c) = \Sigma P_{nc}$$

E_p : Energies Potentielles de la masse m
E_c : Energie cinétique de la masse m
ΣP_{nc} : Puissance des forces non conservatives.

5. Ici : $P_{nc} = 0$ (Pas de frottement).

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}\left(mgl - mgl\cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2\right)$$

$$= mgl\dot\theta\sin\theta + ml^2\ddot\theta\dot\theta = 0$$

Attention : On dérive par rapport au temps et θ est une fonction qui dépend du temps.

On obtient :

$$ml\dot\theta(g\sin\theta + l\ddot\theta) = 0$$

$m \neq 0$, $\ell \neq 0$, $\dot{\theta} \neq 0$ (absurde)
d'où :

$$g \sin\theta + \ell\ddot{\theta} = 0$$

En divisant par ℓ :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

Par identification :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{\ell} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Homogénéité :

$$[\omega_0] = \left[\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right] = \left(\frac{\cancel{m}.s^{-2}}{\cancel{m}}\right)^{\frac{1}{2}} = s^{-1} \text{ ou } rad.s^{-1} \quad \text{OK}$$

6. On observe :

$\theta = 0 \rightarrow$ Minimum d'énergie potentielle
$\Leftrightarrow$ Position d'équilibre stable

$\theta = \pi$ ou $\theta = -\pi$
$\rightarrow$ Maximum d'énergie potentielle
$\Leftrightarrow$ Position d'équilibre instable.

7. Le système est conservatif : l'énergie mécanique se conserve.

$$E_m(\theta) = E_c(\theta) + E_{pp}(\theta) = E_m(0)$$
$$E_m(0) = E_c(0) + E_{pp}(0)$$
$$= \frac{1}{2}mv_0^2 + 0$$
$$= \frac{1}{2} \times 0{,}2 \times (\sqrt{10})^2 = 0{,}1 \times 10 = 1\,J$$

8. Position angulaire θ_0 maximale atteinte lorsque
$v = 0$ ou $E_c(\theta_0) = 0$
Par conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m(\theta_0) = E_m(0)$$
$$E_c(\theta_0) + E_{pp}(\theta_0) = E_c(0) + E_{pp}(0)$$
$$0 + \cancel{m}gl(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2$$
$$1 - \cos\theta_0 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{gl}$$
$$\underline{1 - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{gl} = \cos\theta_0}$$

A.N :

$$1 - \frac{1}{2}\times\frac{(\sqrt{10})^2}{10\times 1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{2} \iff \underline{\theta_0 = \frac{\pi}{3} \text{ ou } -\frac{\pi}{3}}$$

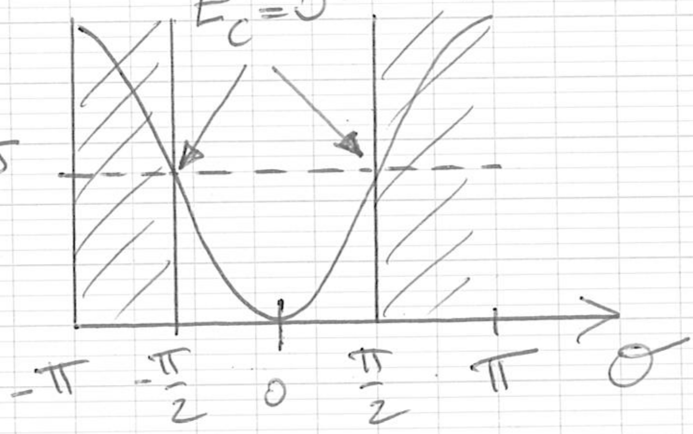
Ou

Contradiction / Erreur de sujet

$\Downarrow$

Correctif :
$E_{p\,max} = \cancel{2J}$
$= 4J$

$$E_c = 0 \Rightarrow E_p = E_c(0) = \frac{1}{2}mv_0^2 = 1J$$



Puit de potentiel. $\underline{\theta_0 = \frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2}}$

9. $E_m\left(\theta_1 = \frac{\pi}{4}\right) = E_m(0)$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 + \cancel{m}gl(1-\cos\theta_1) = \frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2$$

avec $\cos\theta_1 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$v_1^2 + 2gl\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = v_0^2$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gl\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

AN :

$$v_1 = \sqrt{10 - 2\times10\times 1\times\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$= \underline{2 m.s^{-1}}$$

10. Pour que la bille effectue un tour complet, il faut qu'elle atteigne $\theta = \pi$

$\Rightarrow E_p = mgl(1-\cos\pi) = 2mgl$.

... avec une vitesse nulle.

$$E_m(0) = E_m(\theta)$$

$$E_c(0) + \cancel{E_p(0)} = \cancel{E_c(\theta)} + E_p(\theta)$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 = 2\cancel{m}gl.$$

$$v_0^2 = 4gl$$

$$v_0 = \sqrt{4gl}$$

$$v_0 = \sqrt{4\times10\times1} = \underline{6{,}2 m.s^{-1}}$$